

# Делимость натуральных чисел

Лекция 5

2 курс

Замечание:

1. Вопрос о существовании разности на множестве натуральных чисел решается очень просто: достаточно, чтобы уменьшаемое было больше вычитаемого.

**$a-b$  существует, если  $a > b$ ,**

**где  $a, b \in N$**

2. Для операции деления такого простого признака нет.

Поэтому и возникла в математике теория делимости натуральных чисел.

# Определение отношения делимости натуральных чисел

- Пусть даны натуральные числа  $a$  и  $b$ .

$$a; b \in N$$

Говорят, что число  $a$  делится на  $b$ , если существует такое натуральное  $g$ ,  $g \in N$

что  $a = b \cdot g$

**b** называют делителем числа **a**, число  
**a** – кратным **b**

Обозначают  $a \boxtimes b$

Читают : **a** кратно **b**

- Что общего и что различного в понятиях?
- 1. «делитель данного числа»
- 2. « делитель»

- $24 : 5$  - число 5 есть делитель. Компонент действия деления.
- $24 : 6$  число 6 – не только делитель (компонент действия деления), но и делитель числа 24, так как  $24 = 6 \cdot 4$ .
- Число  $b$  называется делителем числа  $a$  тогда, когда число  $a$  есть кратное  $b$ .

## Уточним понятие «отношение делимости»

- 1. Единица (число 1) является делителем любого натурального числа, так как  $a=1 \cdot a$ .
- 2. Теорема №1.
- Делитель  $b$  данного числа  $a$  не превышает этого числа.
- Если  $a \boxtimes b$ , то  $b \leq a$



- Доказательство:
- Так как  $a \boxtimes b$ , то существует такое  $g \in N$ , что  $a = b \cdot g$

Значит,  $a - b = b \cdot g - b = b \cdot (g - 1)$

Так как  $g \in N$ , то  $g \geq 1$

Тогда,  $b \cdot (g - 1) \geq 0$

Следовательно,  $b \leq a$

Следствие:

- Множество делителей данного числа конечно.
- Например:
- Делители числа 36 образуют конечное множество

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Сопутствующие понятия  
Простые и составные числа

- Определение:
  - Простым числом называется такое натуральное число, большее 1, которое имеет только два делителя – единицу и само это число.

Например:

- Число 7 – простое.
- Число 2 – простое.  
(единственное простое четное число).
- Числа 3, 11, 19, 23, 117 ... являются простыми, так как эти числа имеют по два делителя.
- Число 1 .....?

- Определение:
- Составным числом называется натуральное число, которое имеет более двух делителей.
- Например: 4, 6, 12, 121, 45, 225 – составные числа.
- Число 1 - составное?

- Чисел кратных данному числу, бесконечное множество.
- Например:

Числа кратные 6 образуют множество:

$$A = \{6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, \dots\}$$

- Общий вид чисел, кратных 6:

$$x=6 \cdot n, \text{ где } n \in N$$

- Общий вид чисел, кратных 5:

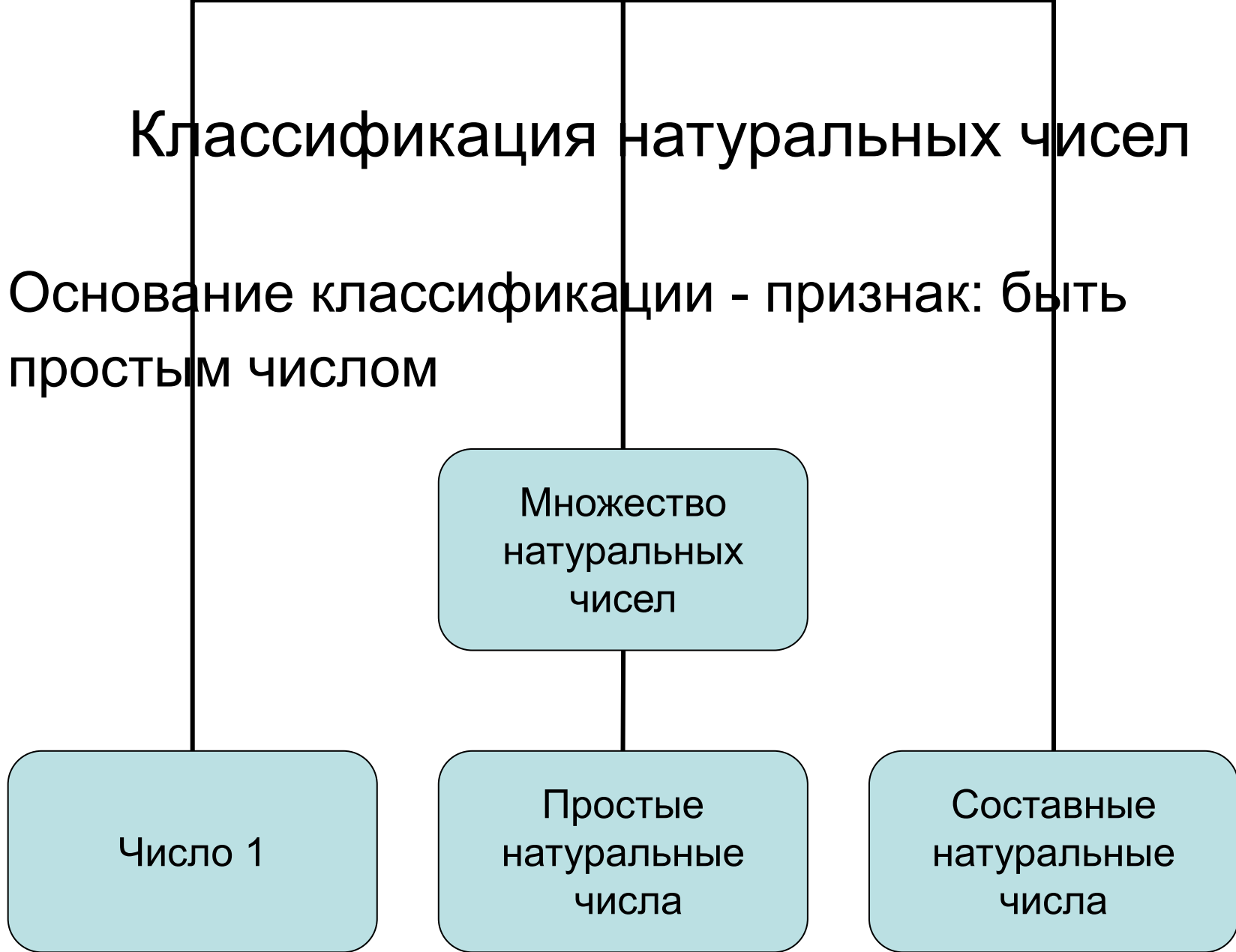
$$x=5 \cdot n, \text{ где } n \in N$$

- Общий вид чисел, кратных k:

$$x=k \cdot n, \text{ где } n \in N$$

# Классификация натуральных чисел

- Основание классификации - признак: быть простым числом





# Свойства отношения делимости

- 1. Отношение делимости рефлексивно, антисимметрично и транзитивно.
- 2. Отношение делимости есть отношение нестрогого порядка

## Теорема 1.

- Отношение делимости рефлексивно.  
(любое натуральное число делится само на себя).
- Если отношение делимости обозначить  $-R$ , а элемент  $-n$ , то свойство рефлексивности имеет вид:  $n R n$

## Доказательство

- Для любого натурального  $a$  справедливо равенство  $a = a \cdot 1$ .

$1 \in N$ , по определению делимости

$$a \boxtimes a$$

Что и требовалось доказать.

## Теорема 2

- Отношение делимости антисимметрично (если  $a$  кратно  $b$ , то  $b$  не кратно  $a$ )
- Если отношение делимости обозначить  $R$ , а элементы отношения —  $a$  и  $b$ , то свойство антисимметричности имеет вид:  
если  $a R b$ , то  $\overline{b R a}$

## Доказательство:

(доказательство осуществляется методом от противного)

- Предположим обратное.

Пусть  $b \not\leq a$ , но тогда  $a \leq b$ .

По условию  $a \not\geq b$ . Следовательно,  $a \geq b$

Неравенства  $a \leq b$  и  $a \geq b$   
справедливы, если  $a=b$ . Противоречие.

Значит наше предположение не верно.

## Теорема 3

- Отношение делимости транзитивно.

Если  $a \mid b$  и  $b \mid c$ , то  $a \mid c$

Если отношение делимости обозначить  $\mid$ , а элементы отношения –  $a, b, c$  то свойство транзитивности имеет вид:  
если  $a \mid b$  и  $b \mid c$ , то  $a \mid c$ .

# Доказательство

- Если  $a \propto b$ , то  $(\exists g \in N)$ , такое, что

$$a = b \cdot g$$

- Если  $b \propto c$ , то  $(\exists p \in N)$ , такое, что

$$b = c \cdot p$$

- Тогда имеем:  $a = b \cdot g = (c \cdot p) \cdot g = c \cdot (p \cdot g)$   
ассоциативный

- Число  $p \cdot g$  – натуральное. Значит:  $a \propto c$

# Признак делимости суммы

## Теорема 4

- Если каждое из натуральных чисел

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

делится на натуральное число  $b$ , то

*сумма*  $(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$

делится на это число.



# Доказательство

- Если  $a_1 \boxtimes b$ , то  $(\exists g_1 \in N)$ , что  $a_1 = b \cdot g_1$
  - Если  $a_2 \boxtimes b$ , то  $(\exists g_2 \in N)$ , что  $a_2 = b \cdot g_2$
- 
- Если  $a_n \boxtimes b$ , то  $(\exists g_n \in N)$ , что  $a_n = b \cdot g_n$

- Преобразуем сумму чисел

дистрибутивный

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \dots + a_n &= b \cdot g_1 + b \cdot g_2 + \dots + b \cdot g_n = \\ &= b \cdot (g_1 + g_2 + \dots + g_n) = b \cdot g \end{aligned}$$

Так как сумма натуральных чисел есть натуральное число, то ее можно заменить натуральным числом  $g$ . Следовательно,

$$g_1 + g_2 + \dots + g_n = g$$

А это значит, что сумма  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  делится на  $b$ .

## Замечание

- Обратная теорема: если сумма натуральных чисел кратна натуральному числу  $s$ , то каждое слагаемое кратно этому числу  $s$ .
- Обратная теорема не верна.

- $25=12+13$

$$25 \not\equiv 5, \quad \overline{12 \not\equiv 5} \quad \text{и} \quad \overline{13 \not\equiv 5}$$

- Теорема о делимости суммы есть необходимое условие, но не достаточное

# Признак делимости разности

## Теорема 5

- Если уменьшаемое  $a$  и вычитаемое  $b$  делятся на число  $c$ , то и разность  $(a-b)$ , где  $a > b$ , делится на  $c$ .

*$(\forall a, b, c \in N)$ , если  $a > b$  и  $a \div c$ , и  $b \div c$ , то  $(a - b) \div c$*

**Доказать самостоятельно!**

## Обобщение теоремы 5

- Теорема:

Разность двух натуральных чисел  $a$  и  $b$  делится на натуральное число  $c$ , тогда и только тогда, когда  $a$  при делении на  $c$  и  $b$  при делении на  $c$  дают одинаковые остатки.

## Краткое условие теоремы

• Дано:  $a > b$  и

$(\forall a, g, c, p \in N)$ , таких, что  $a = c \cdot g + p$

$(\forall b, g_1, c, p \in N)$ , таких, что  $b = c \cdot g_1 + p$

Доказать, что  $(a - b) \div c$

## Доказательство

- Рассмотрим разность чисел  $a$  и  $b$ .

$$\begin{aligned}(a - b) &= (c \cdot g + p) - (c \cdot g_1 + p) = \\ &= c \cdot g + p - c \cdot g_1 - p = c \cdot g - c \cdot g_1 = \\ &= c \cdot (g - g_1) = c \cdot k\end{aligned}$$

Следовательно,  $(a-b)$  кратно  $c$

# Например:

- Задание: Не выполняя вычислений, определите делится ли разность чисел 247 и 162 на 5.
- 247 при делении на 5 дает остаток 2 и
- 162 при делении на 5 дает остаток 2.
- Значит разность  $247-162$  кратна 5.
- Действительно  $247-162=85$ ,
- $85:5=17$



Признак делимости произведения  
Теорема 6

- Если число  $a$  делится на  $b$ , то произведение вида  $a \cdot x$ , где  $x$  – натуральное число, делится на  $b$ .

*$(\forall a, b, x \in \mathbb{N}), \text{ если } a \div b, \text{ то } (a \cdot x) \div b$*

## Доказательство

- Так как  $a \div b$ , то  $(\exists g \in N)$ , что  $a = b \cdot g$

Умножим обе части этого равенства на натуральное  
число  $x$

$$\text{Тогда } a \cdot x = (b \cdot g) \cdot x = b \cdot (g \cdot x)$$

$g \cdot x$  – натуральное число

Следовательно,  $(a \cdot x) \div b$

## Следствие:

- Если один из множителей произведения делится на натуральное число, то и все произведение делится на это натуральное число.
- Например:
- $24 \cdot 978 : 12 = (24 : 12) \cdot 978 = 2 \cdot 978 =$
- $= 2 \cdot (900 + 70 + 8) = 1800 + 140 + 16 = 1956$

## Еще три теоремы о делимости

- Теорема 1
- Если в сумме одно слагаемое не делится на  $b$ , а все остальные слагаемые суммы делятся на  $b$ , то и вся сумма на  $b$  не делится.

## Доказательство

- Пусть  $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + c$

И известно, что  $a_1 \in b, a_2 \in b, a_3 \in b, \dots, a_n \in b$ , но  $\overline{c \in b}$

*Докажем, что  $\overline{s \in b}$*

Доказательство проведем методом

«ОТ ПРОТИВНОГО»

- Предположим противное.
- Пусть

$s \not\equiv b$  Преобразуем сумму  $s$

Имеем: 
$$c = s - (a_1 + a_2 + \dots + a_n)$$

Применим теорему о делимости разности.

*Так как  $s \not\equiv b$  и  $a_1 \equiv b, a_2 \equiv b, a_3 \equiv b, \dots, a_n \equiv b$*

Следовательно:  $c \equiv b$ . Противоречие

Значит наше предположение не верно. Что и требовалось доказать.

- Теорема 2. (задача)
- Если в произведении  $a \cdot b$  множитель  $a$  делится на натуральное число  $m$ , а множитель  $b$  делится на натуральное число  $n$ , то произведение  $a \cdot b$  делится на  $m \cdot n$ .

Доказать самостоятельно!

- Теорема 3.
- Если произведение  $a \cdot c$  делится на произведение  $b \cdot c$ , причем  $c$ -натуральное число, то  $a$  делится на  $b$ .



## Доказательство

- Так как

$(a \cdot c) \nmid (b \cdot c)$ , то существует  $g \in N$

$$a \cdot c = (b \cdot c) \cdot g \stackrel{\text{ассоциативный}}{=} (b \cdot g) \cdot c$$

Значит  $a = b \cdot g$ . Следовательно,  $a \mid b$

**Спасибо за внимание!**