

Лабораторная работа № 3

ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

- Одним из основных методов теории активного эксперимента является статистическое планирование эксперимента. План эксперимента показывает расположение опытных точек в n -мерном пространстве. Рассмотрим **Планы I порядка**.
- При планировании по схеме полного факторного эксперимента ПФЭ, реализуются все возможные комбинации факторов на всех выбранных для исследования уровнях.

Суть ПФЭ

1. Одновременное варьирование всех факторов при проведении эксперимента по определенному плану.
2. Представление математической модели (функции отклика) в виде линейного полинома.
3. Исследование полученного полинома модели методами математической статистики.

Необходимое количество экспериментов в ПФЭ определяется:

$$N = \ell^n$$

N – количество опытов;

ℓ - число уравнений;

n – количество факторов, влияющих на параметр (y);

Как правило принимают $\ell = 2$. Если $n = 2$, то $N = 2^2 = 4$.

Четыре опыта должны провести в ПФЭ.

Определения в ПФЭ:

- *Уровни факторов* – границы исследуемой области по данному технологическому параметру ($\ell=2$).
- *Нулевой (основной) уровень* – это некоторое начальное значение фактора, при составлении математической модели.
Это точка с координатами $(x_1^0, x_2^0 \dots x_n^0)$.
- *Интервал варьирования* – это часть области определения фактора симметричное относительно его нулевого уровня.

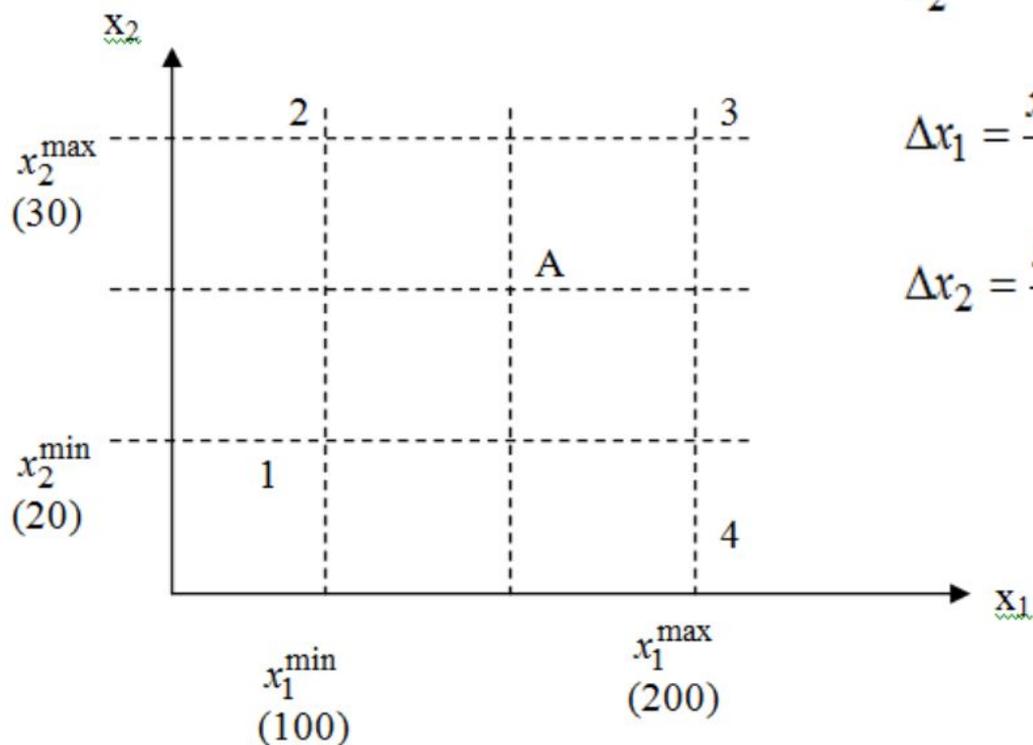
Пример:

Допустим объект исследования – реактор, в котором выход продукта – y , зависит от двух параметров (T, P):

- $T-x_1; T=100\div 200^\circ\text{C}$
- $P-x_2; P=20\div 30\text{ат}$

	$T (X_1)$	$P (X_2)$
Верхний уровень	200	30
Нижний уровень	100	20

Пример:



A – центр планирования.

$$x_1^0 = \frac{x_1^{\max} + x_1^{\min}}{2} = 150 - \text{основной уровень.}$$

$$x_2^0 = \frac{x_2^{\max} + x_2^{\min}}{2} = \frac{30 + 20}{2} = 25;$$

$$\Delta x_1 = \frac{x_1^{\max} - x_1^{\min}}{2} = 50;$$

$$\Delta x_2 = \frac{x_2^{\max} - x_2^{\min}}{2} = \frac{30 - 20}{2} = 5;$$

Полный факторный эксперимент

- План эксперимента указывает расположение в n -мерном пространстве опытных точек независимых переменных или условия всех опытов, которые необходимо провести.
- В ПФЭ эксперимент ставится только на границе области (1;2;3;4 – опыты)

- План эксперимента задается обычно в виде *матрицы планирования* – это таблица, каждая строчка которой – условия опыта, а каждый столбец матрицы соответствует значениям переменных в различных опытах.

$N=2^2=4$ $n=2$. Это ПФЭ типа 2^2 .

Матрица планирования в натуральном масштабе.

N	x_1	x_2	y
1	100	20	y_1
2	100	30	y_2
3	200	30	y_3
4	200	20	y_4

- Матрица планирования составляется для того, чтобы эксперимент провести по определенному плану, определить значения выходного параметра в каждом опыте и построить статистическую модель.
- При планировании I порядка получают математическую модель, вида:

$$\hat{y} = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n;$$

Кодирование переменных

- Для удобства расчетов перейдем от натуральных единиц к безразмерным.
- Формула кодирования:

$$X_i = \frac{x_i - x_i^0}{\Delta x_i};$$

- x_i – значение натуральной переменной (верхний или нижний уровень);
- X_i – кодированное значение i -того фактора;
- x_i^0 - основной уровень натуральной переменной;
- Δx_i - интервал варьирования натуральной переменной;

Кодирование переменных

Для температуры:

$$X_1^V = \frac{200 - 150}{50} = 1;$$

$$X_1^H = \frac{100 - 150}{50} = -1;$$

Для давления:

$$X_2^V = \frac{20 - 15}{5} = 1;$$

$$X_2^H = \frac{10 - 15}{5} = -1;$$

N	x_0	x_1	x_2
1	+1	+1	+1
2	+1	+1	-1
3	+1	-1	+1
4	+1	-1	-1

ИЛИ

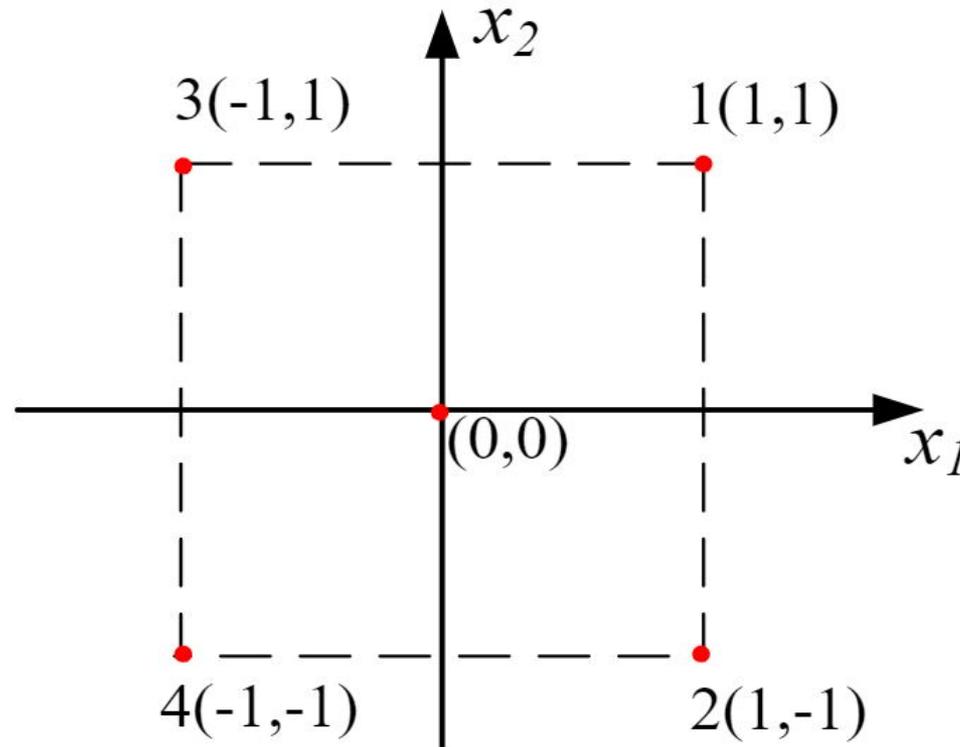
N	x_0	x_1	x_2
1	+	+	+
2	+	+	-
3	+	-	+
4	+	-	-

Это матрица планирования в безразмерном масштабе.

x_0 – фиктивная переменная (+1), необходимая для вычисления свободного члена полинома.

Кодирование переменных

- Расположение опытных точек в факторном пространстве будет следующим:



Свойства матрицы планирования.

1. ортогональность:

скалярное произведение двух любых столбцов матрицы равно нулю:

$$\sum_{i=1}^N x_{ui} x_{ji} = 0; \quad u \neq j; u, i = 1, \dots, n;$$

Свойства матрицы планирования

- *симметричность:*

сумма элементов всех столбцов матрицы, кроме первого, равна нулю:

$$\sum_{i=1}^N x_{iu} = 0, \quad u = 1, \dots, n_i$$

- *нормировка:*

сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов

$$\sum_{i=1}^N x_{iu}^2 = N, \quad u = 1, \dots, n_i$$

Свойства матрицы планирования.

- свойство *ротатабельности*:
все точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказания значений выходного параметра одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Расчет коэффициентов регрессии.

- Благодаря этим свойствам упрощается расчет коэффициентов регрессии.
- После составления плана (матрицы) проводят эксперимент (дублируя опыты) и на основании результатов эксперимента рассчитывают коэффициенты регрессии.

Расчет коэффициентов регрессии.

$$1. b_0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{0i} y_i ;$$

$$2. b_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{iu} y_i ;$$

$$3. b_{uj} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{iu} x_{ij} y_i$$

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2$$

Пример

- Вычислить коэффициенты регрессии на основании экспериментальных данных, приведенных в табл.

N	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	Y
1	+1	1	1	1	68,2
2	+1	1	-1	-1	62,5
3	+1	-1	1	-1	56,8
4	+1	-1	-1	1	50,7

Пример

$$b_0 = \frac{68,2 + 62,5 + 56,8 + 50,7}{4} = 59,6;$$

$$b_1 = \frac{68,2 + 62,5 - 56,8 - 50,7}{4} = 5,8;$$

$$b_2 = \frac{68,2 - 62,5 + 56,8 - 50,7}{4} = 2,95;$$

$$b_{12} = \frac{68,2 - 62,5 - 56,8 + 50,7}{4} = -0,1.$$

$$\hat{y} = 59,6 + 5,8x_1 + 2,95x_2 - 0,1x_1x_2.$$

Выполнить Лабораторную работу №3

«Полный факторный эксперимент» по заданным исходным данным.