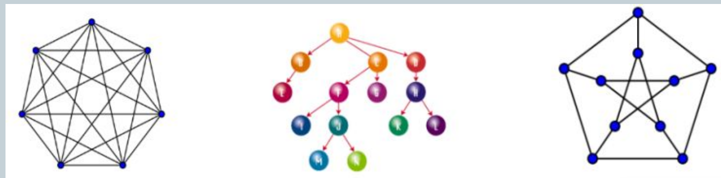
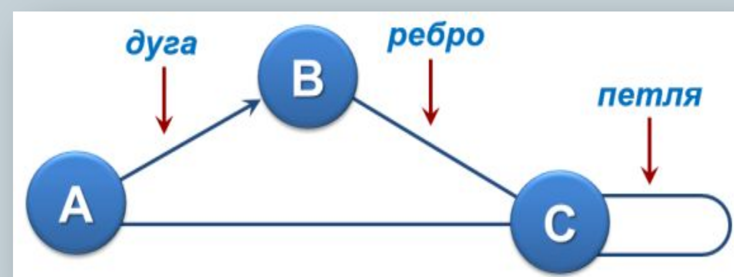
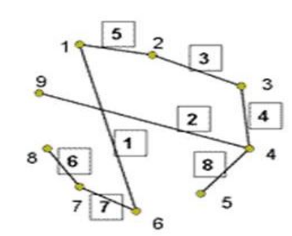
Теория графов: основные понятия

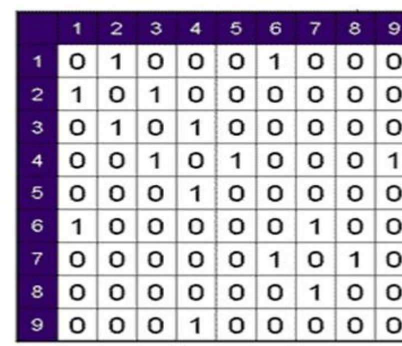


Примеры графа

Основоположник теории графов Л. Эйлер







	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	0	1	0	0	0	1	0	0	0
2	1	0	1	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	0	0	0	0
4	0	0	1	0	1	0	0	0	1
5	0	0	0	1	0	0	0	0	0
6	1	0	0	0	0	0	1	0	0
7	0	0	0	0	0	1	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0	0
9	0	0	0	1	0	0	0	0	0

Матрица смежности

Теория оптимизации: основные понятия

процесс постановки и решения задач оптимизации

- анализ проблемной ситуации
- построение математической модели
- анализ модели
- выбор метода и средства решения
- выполнение численных расчетов
- анализ результатов расчетов
- применение результатов расчетов
- коррекция и доработка модели

Классические задачи оптимизации на графах:

✔задача о минимальном (максимальном) покрывающем дереве в графе;

✔задача о минимальном пути в графе;

✔задача нахождения максимального потока в сети .

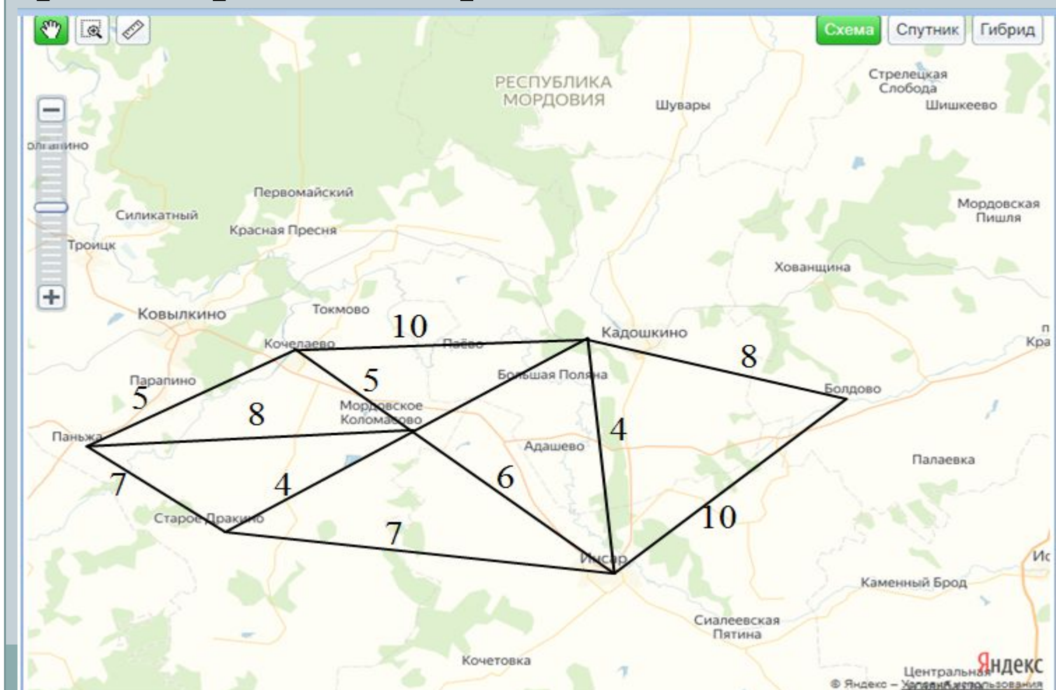
$$f(x) \to \max_{x \in \Delta_\beta} \text{ или } f(x) \to \min_{x \in \Delta_\beta},$$

где x –переменная, обозначающая некоторый специальный объект графа;

Δ_β - множество допустимых значений содержит все возможные специальные объекты рассматриваемого вида

Задача о минимальном покрывающем дереве в графе: постановка задачи

Стоимость прокладки автодороги между двумя соседними населенными пунктами (млн. рублей) равна значению весовой функции для каждого ребра. Разработаем такой проект, чтобы общая стоимость его реализации была минимальной, при этом из любого населенного пункта по построенной транспортной сети можно попасть в любой другой населенный пункт рассматриваемого района.



$$5x_{12} + 8x_{13} + 7x_{14} + 5x_{23} + 10x_{25} + 4x_{34} + 7x_{35} +$$

$$+7x_{35} + 6x_{36} + 7x_{46} + 4x_{56} + 8\,x_{57} + 10x_{67} \rightarrow min.$$

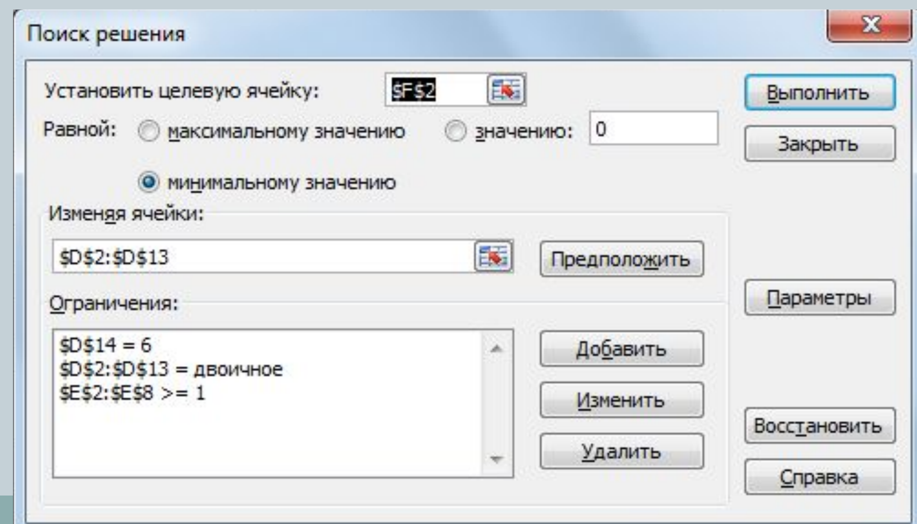
$$\begin{cases} x_{12} + x_{13} + x_{14} \geq 1; \\ x_{12} + x_{23} + x_{25} \geq 1; \\ x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{35} + x_{36} \geq 1; \\ x_{14} + x_{34} + x_{46} \geq 1; \\ x_{25} + x_{35} + x_{56} + x_{57} \geq 1; \\ x_{36} + x_{46} + x_{56} + x_{67} \geq 1; \\ x_{56} + x_{67} \geq 1; \\ x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{23} + x_{25} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{46} + x_{56}, + x_{57} + x_{67} = 6; \\ x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{25}, x_{34}, x_{35}, x_{36}, x_{46}, x_{56}, x_{57}, x_{67} \in \{0,1\}. \end{cases}$$

Задача о минимальном покрывающем дереве в графе: решение задачи в Ms Excel

Таблица с исходными данными в режиме формул

	A	B	C	D	E	F
1	i	j	вес.коэф.	переменные	ограничения	значение ЦФ
2	1	2	5	1	=СУММ(D2:D4)	=СУММПРОИЗВ(C2:C13;D2:D13)
3	1	3	8	0	=СУММ(D2;D5:D6)	
4	1	4	7	0	=СУММ(D3;D5;D7:D9)	
5	2	3	5	1	=СУММ(D4;D7;D10)	
6	2	5	10	0	=СУММ(D6;D8;D11:D12)	
7	3	4	4	1	=СУММ(D9:D11;D13)	
8	3	5	7	0	=СУММ(D12:D13)	
9	3	6	6	1		
10	4	6	7	0		
11	5	6	4	1		
12	5	7	8	1		
13	6	7	10	0		
14	оганичение общее			=СУММ(D2:D13)		

Диалоговое окно мастера
Поиск решения

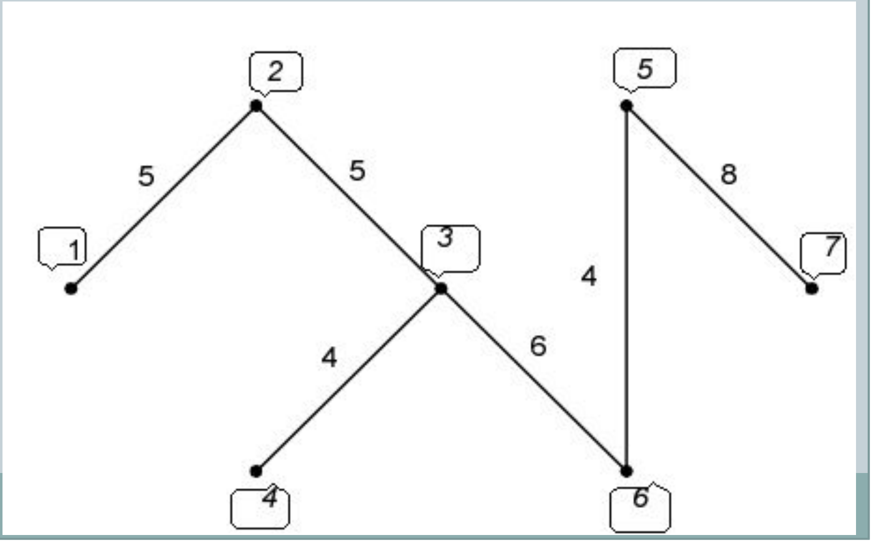


Задача о минимальном покрывающем дереве в графе: результат решение задачи

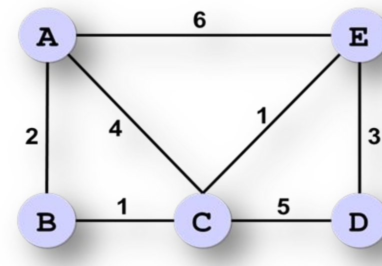
	A	B	C	D	E	F
1	i	j	вес.коэф.	переменные	ограничения	значение ЦФ
2	1	2	5	1	1	32
3	1	3	8	0	2	
4	1	4	7	0	3	
5	2	3	5	1	1	
6	2	5	10	0	2	
7	3	4	4	1	2	
8	3	5	7	0	1	
9	3	6	6	1		
10	4	6	7	0		
11	5	6	4	1		
12	5	7	8	1		
13	6	7	10	0		
14	оганичение общее			6		

в минимальное покрывающее дерево входят ребра (1, 2), (2, 3), (3, 4), (3, 6), (5, 6), (5, 7)

оптимальный проект транспортной сети рассматриваемого района будет заключаться в построении автодорог между населенными пунктами 1 и 2, 2 и 3, 3 и 4, 3 и 6, 5 и 6, 5 и 7



Задача о минимальном пути в графе



Дана схема железнодорожной сети в виде графа. Протяженность каждой дороги представлена весовыми коэффициентами. Определить кратчайший путь между точками A и D.

Весовая матрица смежности

	A	B	C	D	E
A		2	4		6
B	2		1		
C	4	1		5	1
D			5		3
E	6		1	3	

Транспортная матрица

Исходные пункты	Пункты назначения					Кол-во отправленного груза
	A	B	C	D	E	
A	**X**	**2**	**4**	**X**	**6**	1
B	**2**	**X**	**1**	**X**	**X**	1
C	**4**	**1**	**X**	**5**	**1**	1
D	**X**	**X**	**5**	**X**	**3**	0
E	**6**	**X**	**1**	**3**	**X**	1
Кол-во прибывшего груза	0	1	1	1	1	

Здесь X – означает запрет перевозки в данном направлении.

Требуется определить такую последовательность вершин, по которым должна перемещаться единица груза, отправленная из вершины A, при которой стоимость транспортных расходов будет минимальна и груз попадет в вершину D. Так как транспортные расходы при перемещении груза из одной вершины в другую равны расстоянию между вершинами, то последовательность вершин, при которой транспортные расходы будут минимальными, определяет наикратчайший путь из вершины A в вершину D.

Задача о минимальном пути в графе

Построим математическую модель данной задачи.

Для этого введем целочисленные переменные $x_{ij} = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases} \quad (i, j = 1..5)$.

Здесь x_{ij}=1 в случае, если кратчайший путь содержит переход из вершины i в вершину j и x_{ij}=0 в противном случае.

Построим целевую функцию в виде: $f(X) = \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} \to \min$

Сформируем ограничения задачи:

– Первая пара ограничений задаёт условия для начальной вершины пути (A). В искомом пути в эту вершину не должно быть входа, но должен быть один выход: $\sum_{i=1}^{5} x_{iA} = 0, \sum_{j=1}^{5} x_{Aj} = 1$

– Вторая пара ограничений задаёт условия для конечной вершины пути (D). В неё должен быть один вход, но не должно быть выхода: $\sum_{i=1}^{5} x_{iD} = 1, \sum_{j=1}^{5} x_{Dj} = 0$

– Для всех остальных вершин (кроме A и D) устанавливаются ограничения, задающие равенство количества входов и выходов в каждую из них в искомом кратчайшем пути: $\sum_{j=1}^{5} x_{kj} = \sum_{i=1}^{5} x_{ik}, k \neq A, k \neq D$

Задача о минимальном пути в графе

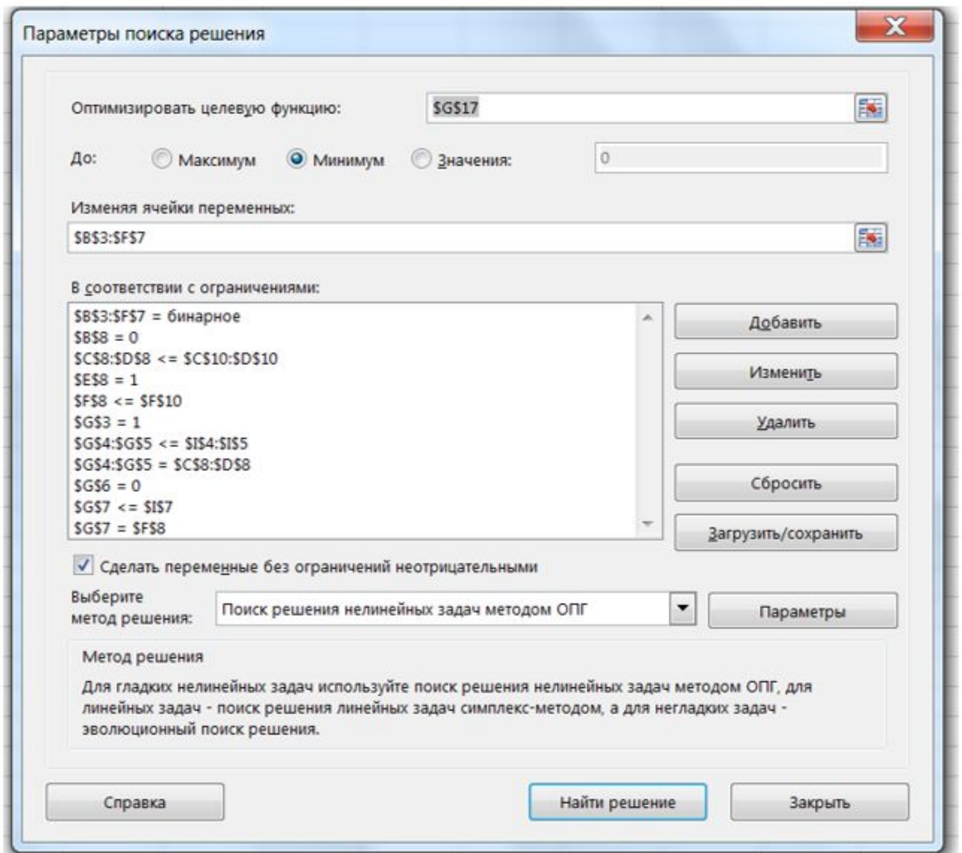
– Для каждой вершины количество входов и выходов не должно быть более одного: $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le 1$, $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \le 1$.

Построим экранную форму задачи:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**пемеренные**						**Ограничения**		
2		*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*Лев.часть*	*Знак*	*Прав.часть*
3	*A*						=СУММ(B3:F3)	=	1
4	*B*						=СУММ(B4:F4)	<=	1
5	*C*						=СУММ(B5:F5)	<=	1
6	*D*						=СУММ(B6:F6)	=	0
7	*E*						=СУММ(B7:F7)	<=	1
8	*Лев.часть*	=СУММ(B3:B7)	=СУММ(C3:C7)	=СУММ(D3:D7)	=СУММ(E3:E7)	=СУММ(F3:F7)			
9	*Знак*	=	<=	<=	=	<=			
10	*Прав.часть*	0	1	1	1	1			
11									
12	**Тарифы**	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*			
13	*A*	100	2	4	100	6			
14	*B*	2	100	1	100	100			
15	*C*	4	1	100	5	1			
16	*D*	100	100	5	100	3	**ЦФ**		
17	*E*	6	100	1	3	100	***=СУММПРОИЗВ(B3:F7;B13:F17)***		

Задача о минимальном пути в графе

В процедуре Excel «Поиск решения» зададим все ограничения .



Задача о минимальном пути в графе

Осуществим поиск решения и получим результатную экранную форму:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**пемеренные**						**Ограничения**		
2		***A***	***B***	***C***	***D***	***E***	*Лев.часть*	*Знак*	*Прав.часть*
3	***A***	0	1	0	0	0	1	=	1
4	***B***	0	0	1	0	0	1	<=	1
5	***C***	0	0	0	0	1	1	<=	1
6	***D***	0	0	0	0	0	0	=	0
7	***E***	0	0	0	1	0	1	<=	1
8	*Лев.часть*	0	1	1	1	1			
9	*Знак*	=	<=	<=	=	<=			
10	*Прав.часть*	0	1	1	1	1			
11									
12	**Тарифы**	***A***	***B***	***C***	***D***	***E***			
13	***A***	100	2	4	100	6			
14	***B***	2	100	1	100	100			
15	***C***	4	1	100	5	1			
16	***D***	100	100	5	100	3	**ЦФ**		
17	***E***	6	100	1	3	100	***7***		

Согласно полученным расчетам кратчайший путь (A-B-C-E-D) будет равен 7 ед.