Решение показательных уравнений

Алгебра и начала анализа

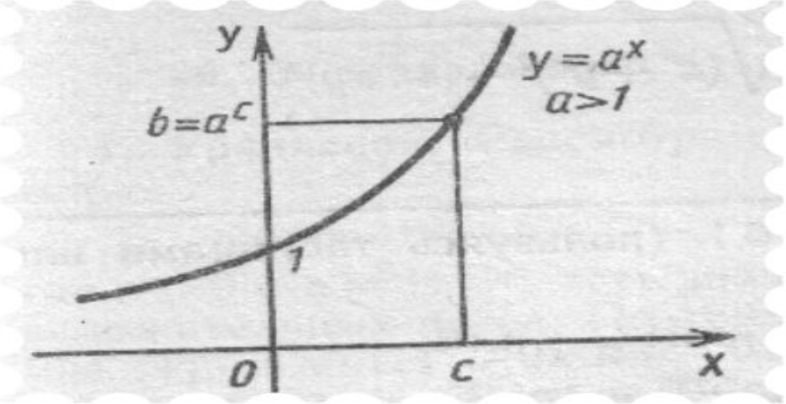
11 класс.

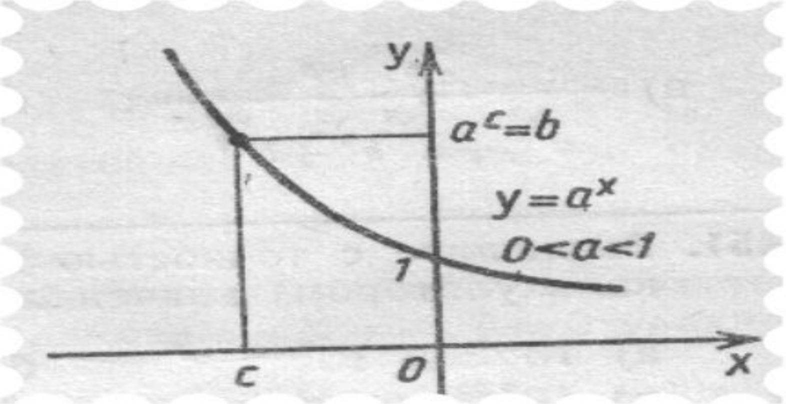
Цель урока

- *Выработать умения решать показательные уравнения*
- *Сформировать навыки решения показательных уравнений*

Повторение

- ***Показательной функцией называется…***
- ***Приведите примеры***
- ***Перечислите свойства показательной функции***
- ***Сформулируйте основные свойства степени***





Проверь себя

- Функция $y = a^x$, где a>0, x $\in$ R, называется показательной функцией.
- Например:

$$y = 2^x \qquad y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \qquad y = (0{,}3)^x$$

Основные свойства функции

$$y = a^x$$

При a>1

- $D(a^x) = R$
- $E(a^x) = R_+$
- $x_2 > x_1, a^{x_2} > a^{x_1}$
- $a^x = 1$ если $x \in]-\infty;0[, mo\, 0 < a^x < 1;$ $x \in]0;\infty[, mo$ $a^x > 1$

При 0<a<1

- $D(a^x) = R$
- $E(a^x) = R_+$
- $x_2 > x_1, a^{x_2} < a^{x_1}$
- $a^x = 1$

$$\text{если}$$
$$x \in \left]-\infty;0\right[, \text{то}$$
$$a^x > 1;$$
$$x \in \left]0;\infty\right[, \text{то}\, 0 < a^x < 1$$

Свойства степени

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$(a \cdot в)^x = a^x \cdot в^x$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

Показательное уравнение

Показательным *называется* **уравнение,** *содержащее переменную в показателе степени*.

Например:

$$2^x = 4$$

$$3^x - 2 \cdot 3^{x-2} = 63$$

$$2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot (10^{x-1})^3$$

Методы решения показательных уравнений

1. Приведение показательного уравнения к виду

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$$

2. Вынесение общего множителя за скобки.
3. Приведение показательного уравнения к квадратному.
4. Графическое решение показательного уравнения.

1. Приведение показательного уравнения к виду

$$a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$$

Решить уравнение:

Образец 1

$$27^{1-x} = \frac{1}{81}$$

$$(3^3)^{1-x} = 3^{-4}$$

$$3^{3-3x} = 3^{-4}$$

$$3 - 3x = -4$$

$$-3x = -7$$

$$x = \frac{7}{3}$$

$$\text{Ответ}: \frac{7}{3}$$

Образец 2

$$\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{2}{7}\right)^{4-5x}$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^{x^2} = \left(\frac{7}{2}\right)^{5x-4}$$

$$x^2 = 5x - 4$$

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x_1 = 1, x_2 = 4$$

Ответ: 1; 4.

Образец 3

$$2^x \cdot 5^x = 0{,}1 \cdot \left(10^{x-1}\right)^3$$

$$(2 \cdot 5)^x = 10^{-1} \cdot 10^{3x-3}$$

$$10^x = 10^{3x-4}$$

$$x = 3x - 4$$

$$x = 2$$

$$\textit{Ответ}: 2.$$

Замечание:

$$a^{f(x)} = 1$$

$$a^{f(x)} = a^0$$

Наприме
р:

$$2^{x-5} = 1$$

$$2^{x-5} = 2^0$$

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

2. Вынесение общего множителя за скобки.

Решите уравнение:

Образец 1

$$3^x - 2\cdot 3^{x-2} = 63$$

$$3^{x-2}\cdot\left(3^2 - 2\right) = 63$$

$$3^{x-2}\cdot 7 = 63$$

$$3^{x-2} = 9$$

$$3^{x-2} = 3^2$$

$$x - 2 = 2$$

$$x = 4$$

$$\textit{Ответ}: 4$$

Образец 2

$$4 \cdot 3^{x+2} + 5 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x} = 5$$

$$3^{x} \cdot \left(4 \cdot 3^{2} + 5 \cdot 3^{1} - 6\right) = 5$$

$$3^{x} \cdot (36 + 15 - 6) = 5$$

$$3^{x} \cdot 45 = 5$$

$$3^{x} = \frac{1}{9}$$

$$3^{x} = 3^{-2}$$

$$x = -2$$

$$\text{\textit{Ответ}}: -2$$

3. Приведение показательного уравнения к квадратному.

Решить уравнение:

Образец 1

$$4^x - 3\cdot 2^x = 4$$

$$4^x = \left(2^2\right)^x = 2^{2x}$$

$$2^{2x} - 3\cdot 2^x = 4$$

обозначим

$$2^x = t$$

$$t^2 - 3t - 4 = 0$$

$$t_1 = 4$$

$$t_2 = -1$$

вернёмся к замене

$$2^x = 4$$

$$2^x = 2^2$$

$$x_1 = 2$$

$$2^x = -1 (\textit{решения нет})$$

Ответ: 2.

Пример: $4^x + 2^{x+1} - 24 = 0$

Решение:

Заметив, что $4^x=(2^2)^x=(2^x)^2$ и

$2^{x+1} = 2^x \times 2^1$, запишем уравнение в виде:

$(2^x)^2 + 2\times2^x - 24 = 0,$

Введем новую переменную $2^x = y$;

Тогда уравнение примет вид:

$y^2 + 2y - 24 = 0$

$D = в^2 - 4ac = 2^2 - 4\times1\times(-24) = 100 > 0$

, находим $y_1 = 4$, $y_2 = -6$.

Получаем два уравнения:

$2^x = 4$ и $2^x = -6$

$2^2 = 2^2$ корней нет.

$x = 2.$

Образец 2

$$2^{2+x}-2^{2-x}=15$$

$$2^2\cdot 2^x-\frac{2^2}{2^x}=15$$

$$4\cdot 2^x-\frac{4}{2^x}=15$$

обозначим

$$2^x=t$$

$$4t-\frac{4}{t}=15$$

$$4t^2-15t-4=0$$

$$t_1=4$$

$$t_2=-\frac{1}{4}$$

$$2^x=4$$

$$2^x=2^2$$

$$x_1=2$$

$2^x=-\dfrac{1}{4}$(*решения нет*)

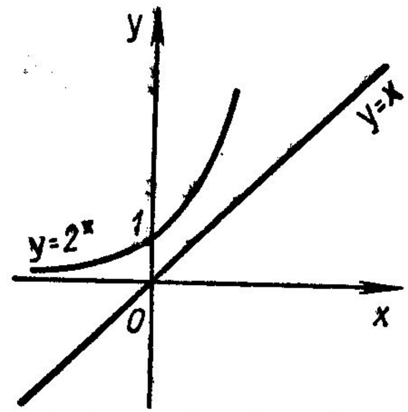
Ответ $: x=2$

4. Графическое решение показательных уравнений

Решить уравнение:

$$2^x = x$$

Строим графики функций $y = 2^x$ и $y = x$.

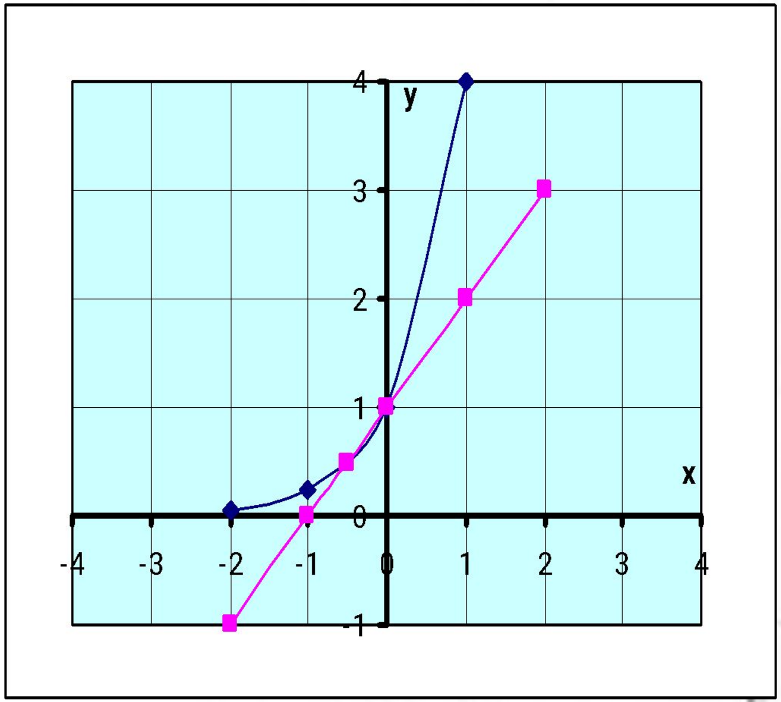


Графики функций не имеют общих точек.

Ответ: решений нет

Пример: $4^x = x + 1$

Графический: построение графиков функций в одной системе координат



Ответ: x = -0,5, x = 0.

Закрепление. Реши самостоятельно

Решить уравнение:

$1)\ 9^x = \left(\frac{1}{27}\right)^{2-x}$

$2)\ 36 \cdot 216^{3x+1} = 1$

$3)\ 17^{x^2-5x+6} = 1$

$4)\ 5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 31$

$5)\ 3^{x+2} + 3^x = 810$

$6)\ 7^x - \left(\frac{1}{7}\right)^{1-x} = 6$

$7)\ 9^x + 8 \cdot 3^x = 9$

$8)\ 2^{2x+1} + 7 \cdot 2^x = 4$

$9)\ 5^x - \left(\frac{1}{5}\right)^{x-1} = 4$

$10)\ 2^x = 3$

Проверь ответы, поставь себе оценку

- 9-10 - «5»
- 7-8 - «4»
- 5-6 - «3»

4 и менее – «2»

Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
6	-5/9	2;3	1	4	1	0	-1	1	0,55

2) Решите уравнение:

$$32^{x+3}\cdot 3^{3x+1}\cdot 625^{x+2}=600^{x+7}$$

Решение.

$$2^{5x+15}\cdot 3^{3x+1}\cdot 5^{4x+8}=2^{3x+21}\cdot 3^{x+7}\cdot 5^{2x+14},\quad \text{так как}$$

$$600=2^3\cdot 3\cdot 5^2$$

$$2^{3x+1}\cdot 3^{x+7}\cdot 5^{2x+14}\neq 0$$

Разделим обе части уравнения на данное выражение и получим :

$$2^{2x-6}\cdot 3^{2x-6}\cdot 5^{2x-6}=1$$

$$(2\cdot 3\cdot 5)^{2x-6}=1$$

$$30^{2x-6}=30^0$$

$$2x-6=0$$

$$x=3$$

Ответ : $x=3$

Основные результаты урока

- Повторили определение и свойства показательной функции
- Познакомились с методами решения показательных уравнений
- Научились подбирать способы решения для конкретных заданий

Домашнее задание

§12 выучить, № 208-214(1,3)- решить

Дополнительно- решить уравнения:

$$1)\ 2^{x^2-1}\cdot 5^{x^2-1}=0{,}001\cdot\left(10^{x+3}\right)^2$$

$$2)\ 3^{2x+1}-8\cdot 3^x=3$$

$$3)\ 2^x-2^{x-2}=3$$

$$4)\ 3^x=\frac{1}{3}x^2$$