Законы математической логики

Законы математической логики	Закон относительно операции конъюнкции	Закон относительно операции дизъюнкции
Тавтология	$x \wedge x = x$	$x \vee x = x$
Коммутативность	$x \wedge y = y \wedge x$	$x \vee y = y \vee x$
Ассоциативность	$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$	$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$
Дистрибутивность	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
Законы де Моргана	$\overline{x \wedge y} = \overline{x} \vee \overline{y}$	$\overline{x \vee y} = \overline{x} \wedge \overline{y}$
Законы поглощения	$x \wedge (x \vee y) = x$	$x \vee (x \wedge y) = x$
Операции с 0 и 1	$x \wedge 1 = x$; $x \wedge 0 = 0$	$x \vee 1 = 1$; $x \vee 0 = x$
Закон дополнительности	$x \wedge \overline{x} = 0$	$x \vee \overline{x} = 1$
Закон склеивания	$(y \vee x) \wedge (y \vee \overline{x}) = y$	$(y \wedge x) \vee (y \wedge \overline{x}) = y$
Закон ортогонализации	$x \vee (\overline{x} \wedge y) = x \vee y$	
Закон импликации	$x \Rightarrow y = \overline{x} \vee y$	
Инверсия	$\overline{\overline{x}} = x$	

Пример 1. Упростить выражение:

$$X \cdot Y \vee X \cdot \overline{Y}$$

Воспользуемся распределительным законом:

$X \cdot (Y \vee Z) = X \cdot Y \vee X \cdot Z$

(или вынесем общий множитель за скобку)

$$X \cdot Y \vee X \cdot \overline{Y} = X \cdot \underbrace{(\overline{Y} \vee Y)}_{1} = X \cdot 1 = X$$

Пример 2. Упростите логическое выражение

$$F= \overline{(A \vee B)\to \overline{(B \vee C)}}.$$

1. Избавимся от импликации и отрицания. Воспользуемся (¬(A→B)=A& ¬ B).
   Получится: ¬((AvB)→ ¬(BvC))= (AvB)& ¬ (¬(BvC)).
2. Применим закон двойного отрицания, получим:
   (A v B) & ¬(¬(B v C)) = (A v B) & (B v C).
3. Применим правило дистрибутивности ((A·B) +(A·C) = A·(B+C)). Получим:
   (AvB)& (B v C)= (AvB)&Bv(AvB)&C
4. Применим закон коммутативности (A&B=B&A) и дистрибутивности
   Получим: (AvB)&Bv(AvB)&C = A&BvB&BvA&CvB&C.
5. Применим (A& A= A) и получим: A&BvB&BvA&CvB&C=
   A&BvBvA&CvB&C
6. Применим ((A&B) v(A&C) = A&(BvC)), т.е. вынесем за скобки B.
   Получим:A&BvBvA&CvB&C= B& (Av1)vA&CvB&C.
7. Применим (Av 1= 1). Получим:B& (Av1) vA&CvB&C= BvA&CvB&C.
8. Переставим местами слагаемые, сгруппируем и вынесем B за скобки.
   Получим:BvA&CvB&C = B& (1vC)vA&C.
9. Применим (Av 1= 1) и получим ответ: **B&(1vC)vA&C=BvA&C.**

Закрепление изученного

№1

Упростите выражение:

1. $F = \neg (A \& B) \vee \neg (B \vee C)$.
2. $F = (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$.
3. $F = A \& C \vee \bar{A} \& C$.
4. F =□Av□Bv□CvAvBvC

Ответы:

1. F = ¬ (A&B) v ¬ (BvC) =□Av□B.
2. $F = (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A) = 1$.
3. $F = A \& C \vee \bar{A} \& C = C$.
4. F =□Av□Bv□CvAvBvC=1.

№2

Упростите выражение:

1. F = ¬(X&Yv ¬(X&Y)).
2. F = □X&¬ (□YvX).
3. F = (XvZ) & (Xv□Z) & (□YvZ).

Ответы:

1. F = ¬(X&Yv ¬(X&Y)) = 0.
2. F = □X&¬ (□YvX) = □X&Y.
3. F = (XvZ) & (Xv□Z) & (□YvZ)
   =X&(□YvZ).