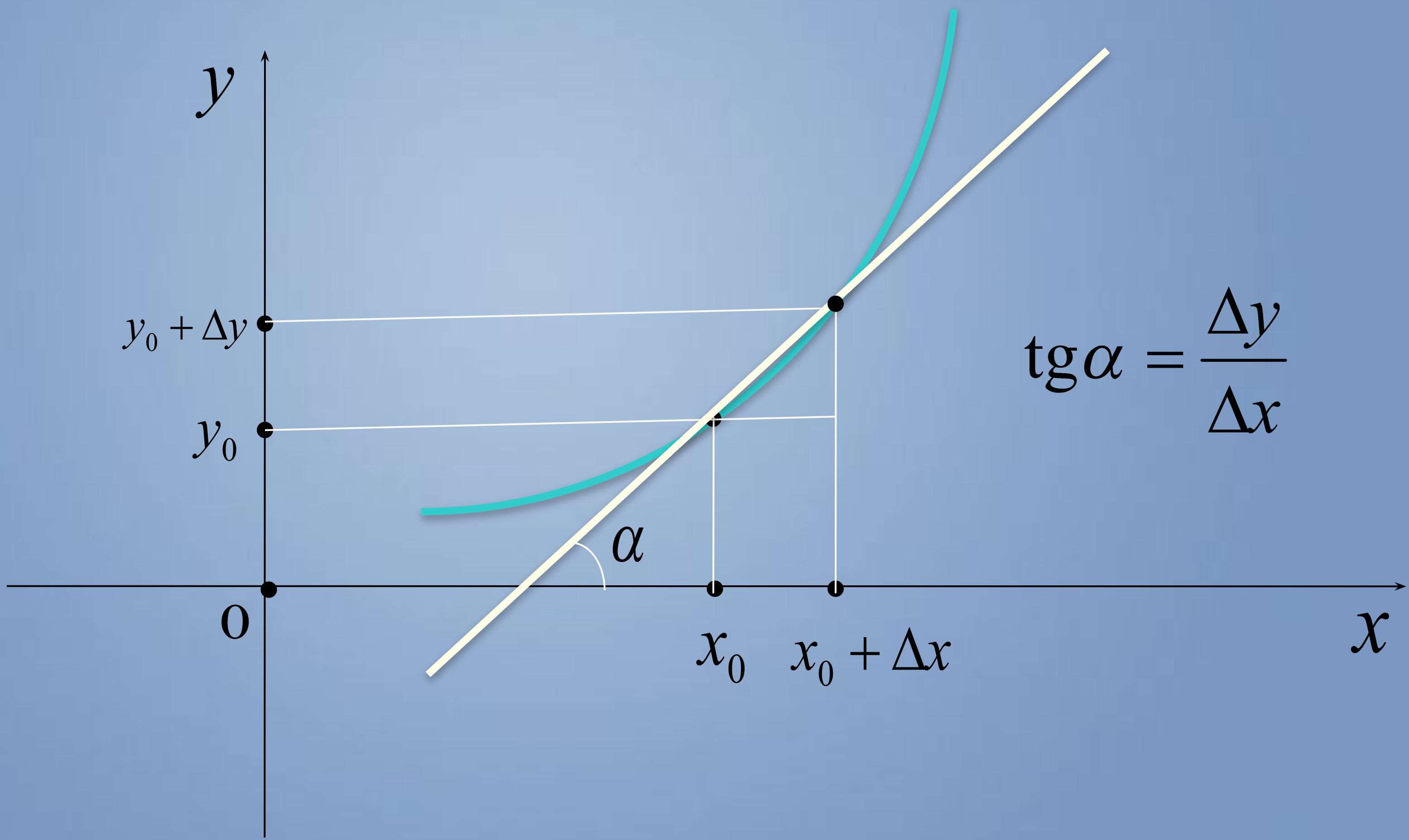
Тема №4.
Дифференциальное исчисление

Производной функции в точке называется предел, если он существует и конечен, отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Производная



$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Производная

Геометрический смысл производной функции: производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой к графику функции в этой точке с положительным направлением оси *0x*.

Уравнение касательной к графику функции, проведённой в точке $(x_0; y_0)$ с учётом геометрического смысла производной имеет вид:

$$y - y_0 = y'(x_0)\cdot(x - x_0).$$

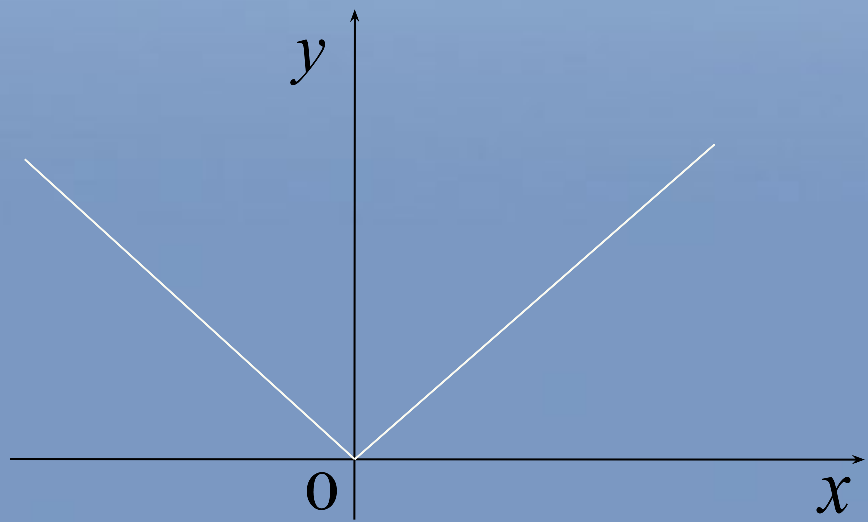
Производная

Нахождение производной функции называется ***дифференцированием*** функции.

Критерий дифференцируемости функции в точке: Чтобы функция была дифференцируемой в некоторой точке необходимо и достаточно, чтобы она в этой точке имела конечную производную.

Функция называется дифференцируемой на множестве, если она дифференцируема в каждой точке этого множества.

Теорема (Необходимое условие дифференцируемости функции): Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она в этой точке непрерывна. (Обратное утверждение неверно).



$$y = |x|$$

Правила дифференцирования

Пусть С - постоянная величина, $u = u(x), v = v(x).$

1. $C' = 0$
2. $(u \pm v)' = u' \pm v'$
3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
5. $(C \cdot u)' = C \cdot u'$

Формулы дифференцирования

1. $\left(x^{n}\right)' = n \cdot x^{n-1}$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^{2}}$$

2. $\left(a^{x}\right)' = a^{x} \cdot \ln a$

$$\left(e^{x}\right)' = e^{x}$$

3. $\left(\log_{a} x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

$$\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$$

Формулы дифференцирования

4. $(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\mathrm{tg}x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

$(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$

5. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

Производная

Производная сложной функции

$$y = f\{g[\varphi(x)]\}$$

$$y' = f'(g) \cdot g'(\varphi) \cdot \varphi'(x)$$

При условии, что функции имеют производные в соответствующих точках.

Задача

Пример. Найти производную функции

$$y = \sin^3 \ln x.$$

Задача

Пример. Найти производную функции

$$y = \sin^3 \ln x.$$

Ответ:

$$y' = 3\sin^2 \ln x \cdot \cos \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

Задача

Пример. Найти производную функции

$$y = 5^{\sqrt{x}} \cdot \lg(3 - x).$$

Задача

Пример. Найти производную функции

$$y = 5^{\sqrt{x}} \cdot \lg(3 - x).$$

Ответ:

$$y' = 5^{\sqrt{x}} \ln 5 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \lg(3 - x) + 5^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{(3 - x)\ln 10} \cdot (-1).$$

Задача

Пример. Найти производную функции

$$y=\sqrt[3]{tg^2\frac{x^3-3^{-x}}{\arcsin\sqrt{x}}}.$$

Задача

Ответ:

$$y' = \frac{2}{3} tg^{-\frac{1}{3}} \frac{x^3 - 3^{-x}}{\arcsin\sqrt{x}} \cdot \cos^{-2} \frac{x^3 - 3^{-x}}{\arcsin\sqrt{x}} \cdot$$

$$\cdot \frac{(3x^2 + 3^{-x}\ln 3) \cdot \arcsin\sqrt{x} - (x^3 - 3^{-x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\arcsin^2\sqrt{x}}$$

Задача

Написать уравнение касательной к графику функции $y = \dfrac{x-6}{x+2}$ в точке его пересечения с осью ординат.

Задача

Решение:

$$x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = -3$$

$$y'(x) = \frac{(x-6)'(x+2) - (x-6)(x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{(x+2) - (x-6)}{(x+2)^2} =$$

$$= \frac{8}{(x+2)^2}$$

$$k_{кас} = y'(x_0) \Rightarrow k_{кас} = y'(0) = \frac{8}{(0+2)^2} = 2$$

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y + 3 = 2(x - 0) \Rightarrow y = 2x - 3.$$

Задача

Написать уравнение касательной к графику функции $y = x^2 - 4x + 1$, перпендикулярной прямой $x + 2y - 4 = 0$. Решение:

$$x + 2y - 4 = 0 \Rightarrow y = -0,5x + 2 \Rightarrow k_{пр} = -0,5$$

$$k_{пр} \cdot k_{кас} = -1 \Rightarrow k_{кас} = 2$$

$$y'(x_0) = k_{кас}$$

$$y'(x) = 2x - 4 \Rightarrow 2x_0 - 4 = 2 \Rightarrow x_0 = 3$$

$$y_0 = f(x_0) = 9 - 12 + 1 = -2$$

$$y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$y + 2 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 8.$$

Эластичностью функции называется предел отношения относительного приращения функции к относительному приращению переменной, когда приращение этой переменной стремится к нулю.

Эластичность

Из определения вытекает формула расчёта эластичности функции:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y'$$

Эластичность

Эластичность функции приближённо показывает на сколько процентов изменится функция при изменении независимой переменной на 1%.

Свойства эластичности

1. Эластичность функции равна произведению независимой переменной на темп изменения функции

$$E_x(y) = x \cdot T_y, \qquad T_y = \frac{y'}{y}.$$

2. $$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v)$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v)$$

Свойства эластичности

3. Эластичности взаимно обратных функции являются взаимно обратными:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}.$$

Задача

Пример. Зависимость между себестоимостью единицы продукции y (тыс.руб.) и выпуском продукции x (млн.руб.) выражается функцией $y = 40 - 0{,}2x.$ Найти эластичность себестоимости при выпуске продукции, равном 150 млн.руб.

Задача

Решение:

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{40 - 0{,}2x} \cdot (-0{,}2) = \frac{0{,}2x}{0{,}2x - 40} =$$

$$= \frac{x}{x - 200} = \frac{150}{150 - 200} = \frac{150}{-50} = -3.$$

Получили то, что при выпуске продукции, равном 150 млн.руб. увеличение этого выпуска на 1% приведёт к снижению себестоимости на 3%.

Производная

Основные теоремы дифференциального исчисления:

1. Теорема Ферма. Если дифференцируемая на множестве функция достигает наибольшего или наименьшего значения в какой-либо точке этого множества, то производная функции в этой точке равна нулю.

Производная

2. Теорема Ролля. Пусть функция непрерывна на некотором отрезке, дифференцируема внутри отрезка и на концах отрезка принимает равные значения, то внутри отрезка найдётся хотя бы одна точка, в которой производная функции равна нулю.

Производная

3. Теорема Лагранжа. Пусть функция $y(x)$ непрерывна на некотором отрезке [*a*; *b*], дифференцируема внутри отрезка (на интервале (*a*; *b*)), то на этом интервале найдётся хотя бы одна точка x_0 , для которой справедливо равенство:

$$y'(x_0) = \frac{y(b) - y(a)}{b - a}.$$

Производная

4. Теорема Ферма. Пусть функции $f(x), g(x)$ непрерывны на некотором отрезке [*a*; *b*], дифференцируемы на интервале (*a*; *b*) и $g'(x) \neq 0$ во вех точках этого интервала, то на этом интервале найдётся хотя бы одна точка x_0, для которой справедливо равенство:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

Правило Лопиталя

Применяется при вычислении пределов для устранения неопределённостей видов

$$\left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right], \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Правило Лопиталя

$$[0\cdot\infty]=\left[0\cdot\frac{1}{0}\right]=\left[\frac{0}{0}\right]$$

$$[0\cdot\infty]=\left[\frac{1}{\infty}\cdot\infty\right]=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

Задача

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-1)-\ln 5}{x^2-9}$.

Задача

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\ln(2x-1)-\ln 5}{x^2-9}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\ln(2x-1)-\ln 5}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{2/(2x-1)}{2x}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{1}{x(2x-1)}=\frac{1}{15}.$$

Задача

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^3}$.

Задача

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{x^3}$.

Решение:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{x^3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\cdot\ln 3}{3x^2}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\cdot\ln^2 3}{6x}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\cdot\ln^3 3}{6}=\infty.$$

Задача

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 \cdot \ln x).$

Задача

Пример. Найти $\lim\limits_{x\to 0}(x^2 \cdot \ln x)$.

Решение:

$$\lim_{x\to 0}(x^2 \cdot \ln x) = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{x^{-2}} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{x^{-1}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-2} = 0.$$

Производная

Достаточные признаки монотонности функции:

1. Если во всех точках некоторого множества производная дифференцируемой функции положительна, то функция на этом множестве возрастает;
2. Если во всех точках некоторого множества производная дифференцируемой функции отрицательна, то функция на этом множестве убывает;

Производная

3. Если во всех точках некоторого множества производная дифференцируемой функции равна нулю, то функция на этом множестве постоянна;

Точка x_0 является точкой ***максимума*** функции $y = f(x)$, если найдётся такая окрестность этой точки, во всех точках которой выполнено неравенство:

$$f(x) < f(x_0).$$

Точка x_0 является точкой ***минимума*** функции $y = f(x)$, если найдётся такая окрестность этой точки, во всех точках которой выполнено неравенство:
$f(x) > f(x_0)$.

Точки максимума и минимума являются точками ***экстремума*** (локального экстремума) функции.

Экстремум

Необходимое условие существования экстремума функции в точке: Если в некоторой точке дифференцируемая функция достигает экстремума, то её производная в этой точке или равна нулю, или не существует.

Точки в которых производная функции или равна нулю, или не существует называются ***критическими*** (стационарными).

Экстремум

Достаточные условия существования экстремума функции в точке:

1. Если найдётся такая окрестность критической точки, во всех точках которой функция дифференцируема и её производная справа от критической точки знакопостоянна и отличается знаком от производной функции слева, то в этой критической точке функция достигает экстремума, причём, если производная слева положительна, а справа отрицательна, то максимума, а если наоборот, то минимума.

Экстремум

2. Если функция дважды дифференцируема в некоторой точке и в этой точке производная первого порядка равна нулю, а производная второго порядка отлична от нуля, то функция в этой точке достигает экстремума, причём максимума, если вторая производная отрицательна и минимума – если положительна.

(Количество дифференцирований определяет порядок производной). $f^{(n)}(x)$

Экстремум

Для отыскания наибольшего и наименьшего значений функции $y = f(x)$ на отрезке следует:

1. Найти производную функции $f^{'}(x)$;
2. Найти критические точки функции из уравнения $f^{'}(x) = 0$;
3. Найти значения функции в критических точках, принадлежащих данному отрезку и на концах этого отрезка;
4. Среди этих значений выбрать наибольшее и наименьшее значения.

Задача

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 1$ на отрезке [-2; 0,5].

Решение:

Задача

Пример. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^4 - 2x^2 + 1$ на отрезке [-2; 0,5].

Решение: $y' = 4x^3 - 4x$

$$4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0$$

$$x_1 = 0; x_2 = 1; x_3 = -1$$

$$y(0) = 0 - 0 + 1 = 1$$

$$y(-1) = 1 - 2 + 1 = 0$$

$$y(-2) = 16 - 8 + 1 = 9$$

$$y(0,5) = \frac{1}{16} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{9}{16}$$

$$y_{\max} = 9; y_{\min} = 0.$$

Функция называется выпуклой вниз (или ***вогнутой***) на множестве, если для любых двух значений x_1, x_2 из ООФ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Функция называется выпуклой вверх (или ***выпуклой***) на множестве, если для любых двух значений x_1, x_2 из ООФ выполняется неравенство

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Производная

Теорема. Функция вогнута на множестве тогда и только тогда, когда её первая производная на этом множестве возрастает (вторая производная положительна).

Теорема. Функция выпукла на множестве тогда и только тогда, когда её первая производная на этом множестве убывает (вторая производная отрицательна).

Производная

Теорема (***достаточное условие перегиба*** функции). Если вторая производная дважды дифференцируемой функции при переходе через некоторую точку меняет свой знак, то эта точка является точкой перегиба её графика.

Рекламная пауза