Приложения определённого интеграла

Длина дуги

Опр. $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[\alpha, \beta]$. $\{M(x; y; z)\} \in \mathbb{R}_3$,

где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ называется простой

кривой, если $\forall\, t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ $(t_1 \neq t_2) \Rightarrow M(x_1; y_1; z_1) \neq M(x_2; y_2; z_2)$

$(x_i = \varphi(t_i), y_i = \psi(t_i), z_i = \chi(t_i); i = 1, 2)$.

$z \equiv 0 \Rightarrow$ плоская кривая.

Пример. $y = f(x)$, $f(x) \in C[a, b]$ $\begin{cases} x = t & a \leq t \leq b \\ y = f(t) & \\ (z = 0) & \text{простая кривая} \end{cases}$

Приложения определённого интеграла

Длина дуги

Опр. $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[\alpha, \beta]$. $\{M(x; y; z)\} \in \mathbb{R}_3$, где $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $z = \chi(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ назыв. простой кривой, если $\forall\, t_1, t_2 \in [\alpha, \beta]$ $(t_1 \neq t_2) \Rightarrow M(x_1; y_1; z_1) \neq M(x_2; y_2; z_2)$

$(x_i = \varphi(t_i), y_i = \psi(t_i), z_i = \chi(t_i); i = 1, 2)$.

$z \equiv 0 \Rightarrow$ плоская кривая.

Пример. $y = f(x)$, $f(x) \in C[a, b]$ $\begin{cases} x = t & a \leq t \leq b \\ y = f(t) & \\ (z = 0) & \text{простая кривая} \end{cases}$

Опр. Уравнения $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$, $t \in \{t\}$ - промежуток, задают параметрически кривую L, если $\{t\}$ можно разбить на конечное или бесконечное (счётное) число отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, покрывающих $\{t\}$ и совпадающих не более чем концами так, что на $[\alpha_i, \beta_i]$ $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$ – простая кривая.

Пример. $L: \begin{cases} x = \cos t & t \in [0, 4\pi] \\ y = \sin t & \text{или даже} \\ (z = 0) & t \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$ – кривая, заданная параметрически

Далее кривая – параметрич. заданная кривая.

Приложения определённого интеграла

Длина дуги

<u>Опр.</u> $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[\alpha, \beta]$. $\{M(x;y;z)\} \in \mathbb{R}_3$, где $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ назыв. простой кривой, если $\forall\, t_1, t_2 \in [\alpha,\beta]$ $(t_1 \neq t_2) \Rightarrow M(x_1;y_1;z_1) \neq M(x_2;y_2;z_2)$ $(x_i=\varphi(t_i), y_i=\psi(t_i), z_i=\chi(t_i); i=1,2)$.

$z\equiv 0 \Rightarrow$ плоская кривая.

Пример. $y=f(x)$, $f(x)\in C[a,b]$ $\begin{cases} x=t & a\le t\le b \\ y=f(t) & \\ (z=0) & \text{простая кривая} \end{cases}$

<u>Опр.</u> Уравнения $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$, $t\in\{t\}$ – промежуток, задают параметрически кривую L, если $\{t\}$ можно разбить на конечное или бесконечное (счётное) число отрезков $[\alpha_i,\beta_i]$, покрывающих $\{t\}$ и совпадающих не более чем концами так, что на $[\alpha_i,\beta_i]$ $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$ – простая кривая.

Пример. $L: \begin{cases} x=\cos t & t\in[0,4\pi] \\ y=\sin t & \text{или даже} \\ (z=0) & t\in(-\infty,+\infty) \end{cases}$ – кривая, заданная параметрически

Далее кривая – параметрич. заданная кривая.

<u>Опр</u> $L: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$ – назыв. гладкой, если $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha,\beta]$, причём

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0 \quad \forall t\in[\alpha,\beta]$$

Приложения определённого интеграла

Длина дуги

Опр. $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[\alpha,\beta]$. $\{M(x;y;z)\} \in \mathbb{R}_3$, где $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\chi(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$ назыв. простой кривой, если $\forall\, t_1, t_2 \in[\alpha,\beta]$ $(t_1\neq t_2) \Rightarrow M(x_1;y_1;z_1)\neq M(x_2;y_2;z_2)$ $(x_i=\varphi(t_i), y_i=\psi(t_i), z_i=\chi(t_i); i=1,2)$.

$z\equiv 0 \Rightarrow$ плоская кривая.

Пример. $y=f(x)$, $f(x)\in C[a,b]$ $\begin{cases} x=t \\ y=f(t) \\ (z=0)\end{cases}$ $a\le t\le b$ простая кривая

Опр. Уравнения $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t)\end{cases}$, $t\in\{t\}$ - промежуток, задают параметрически кривую L, если $\{t\}$ можно разбить на конечное или бесконечное (счётное) число отрезков $[\alpha_i,\beta_i]$, покрывающих $\{t\}$ и совпадающих не более чем концами так, что на $[\alpha_i,\beta_i]$ $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t)\end{cases}$ — простая кривая.

Пример. $L: \begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ (z=0)\end{cases}$ $t\in[0,4\pi]$ или даже $t\in(-\infty,+\infty)$ — кривая, заданная параметрически

Далее кривая — параметрич. заданная кривая.

Опр $L: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$ — назыв. гладкой,

если $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha,\beta]$, причём

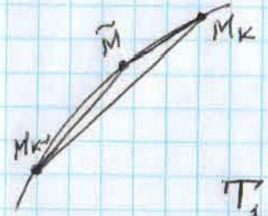
$$(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2>0 \quad \forall t\in[\alpha,\beta]$$

$L: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t)\end{cases}$ $t\in[\alpha,\beta]$ $\quad T=\{\alpha=t_0<\ldots<t_{k-1}<t_k<\ldots<t_n=\beta\}$

$M_k(x_k;y_k;z_k)$ $x_k=\varphi(t_k)$, $y_k=\psi(t_k)$, $z_k=\chi(t_k)$, $k=0,1,\ldots,n$

$$l_T=\sum_{k=1}^{n}|\overline{M_{k-1}M_k}|=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(x_k-x_{k-1})^2+(y_k-y_{k-1})^2+(z_k-z_{k-1})^2}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1}))^2+(\psi(t_k)-\psi(t_{k-1}))^2+(\chi(t_k)-\chi(t_{k-1}))^2}\ -$$

— длина ломаной, вписанной в кривую.



Если $T_1=T\cup\{\tilde{t}\} \Rightarrow l_{T_1}\ge l_T$ (по нер-ву треугольника)

$$T_1\succ T_2 \Rightarrow l_{T_1}\ge l_{T_2}$$

Опр. Кривая L называется спрямляемой, если $\{l_T\}$ ограничено сверху. Число $l=l(L)=\sup\limits_{T}\{l_T\}$ называется длиной кривой L

I. Гладкая кривая $L: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$ $\alpha \le t \le \beta$ – спрямляема, причём

$$\ell(L)=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt$$

Д-во. $f(t)=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt \equiv I$.

$T=\{\alpha=t_0<\ldots<t_n=\beta\}$, $\varphi'(t),\psi'(t),\chi'(t)\in C[\alpha,\beta] \Rightarrow$ огр.

т.е. $\exists M>0: |\varphi'(t)|\le M, |\psi'(t)|\le M, |\chi'(t)|\le M \ \forall t\in[\alpha,\beta]$

$$\ell_T=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2+[\chi(t_k)-\chi(t_{k-1})]^2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по т. Лагранжа $\exists\, \alpha_k,\beta_k,\gamma_k\in(t_{k-1},t_k)$:

$$\ell_T=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2+[\psi'(\beta_k)]^2+[\chi'(\gamma_k)]^2}\,\Delta t_k$$

$\ell_T\le M\sqrt{3}\sum_{k=1}^{n}\Delta t_k=M\sqrt{3}(\beta-\alpha)\Rightarrow L$ – спрямляема.

$I=\lim\limits_{\delta_T\to 0}\sigma_T(f,\Xi)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0\ \forall T, \delta_T<\delta\ \forall\Xi=\{\xi_k\}$

$|\sigma_T(f,\Xi)-I|<\frac{\varepsilon}{2}$. $\varphi'(t),\psi'(t),\chi'(t)\in C[\alpha,\beta]\Rightarrow$ равн. непр.

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0: \forall t',t''\in[\alpha,\beta], |t'-t''|<\delta_2\Rightarrow|\varphi'(t')-\varphi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$,

$|\psi'(t')-\psi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$, $|\chi'(t')-\chi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$. $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$

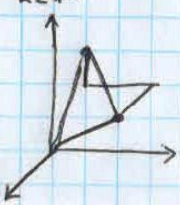
$\exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$, $\forall T, \delta_T<\delta$ $|\ell_T-I|\le|\ell_T-\sigma_T(f,\Xi)|+$

$+|\sigma_T(f,\Xi)-I|<\sum_{k=1}^{n}\Big|\sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2+[\psi'(\beta_k)]^2+[\chi'(\gamma_k)]^2}-$

$-\sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\xi_k)]^2+[\chi'(\xi_k)]^2}\Big|\Delta t_k+\frac{\varepsilon}{2}\le$

$$\le\sum_{k=1}^{n}\sqrt{[\varphi'(\alpha_k)-\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\beta_k)-\psi'(\xi_k)]^2+[\chi'(\gamma_k)-\chi'(\xi_k)]^2}\cdot\Delta t_k+\frac{\varepsilon}{2}<$$

$$<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{\frac{\varepsilon^2\cdot 3}{16(\beta-\alpha)^2}}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot(\beta-\alpha)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$



т.е. $\lim\limits_{\delta_T\to 0}\ell_T=I$.

А надо, чтобы $\sup\limits_{T}\ell_T=I$. Достат.: $\ell_T\le I\ \forall T$ (?)

Пусть $\exists T_0: \ell_{T_0}\ge I$. $I=\lim\limits_{\delta_T\to 0}\ell_T$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$:

$\forall T, \delta_T<\delta\ |\ell_T-I|<\varepsilon$, $\varepsilon=\frac{\ell_{T_0}-I}{2}>0$

$\forall T\succ T_0, \delta_T<\delta\Rightarrow\frac{\ell_{T_0}-I}{2}=\varepsilon>|\ell_T-I|\ge$

$\ge\ell_T-I\ge\ell_{T_0}-I$ – противор.

Теорема доказана.

I. Гладкая кривая $L: \begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t) \end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$ – спрямляема, причём

$$\ell(L)=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt$$

Д-во. $f(t)=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt\equiv I$.

$T=\{\alpha=t_0<\ldots<t_n=\beta\}$, $\varphi'(t),\psi'(t),\chi'(t)\in C[\alpha,\beta]\Rightarrow$ огр.

т.е. $\exists M>0: |\varphi'(t)|\le M, |\psi'(t)|\le M, |\chi'(t)|\le M\ \forall t\in[\alpha,\beta]$

$$\ell_T=\sum_{k=1}^n\sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2+[\chi(t_k)-\chi(t_{k-1})]^2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по т. Лагранжа $\exists\alpha_k,\beta_k,\gamma_k\in(t_{k-1},t_k)$:

$$\ell_T=\sum_{k=1}^n\sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2+[\psi'(\beta_k)]^2+[\chi'(\gamma_k)]^2}\,\Delta t_k$$

$\ell_T\le M\sqrt3\sum_{k=1}^n\Delta t_k=M\sqrt3(\beta-\alpha)\Rightarrow L$ – спрямляема.

$I=\lim\limits_{\delta_T\to0}\sigma_T(f,\Xi)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0\ \forall T, \delta_T<\delta\ \forall\Xi=\{\xi_k\}$

$|\sigma_T(f,\Xi)-I|<\frac{\varepsilon}{2}$. $\varphi'(t),\psi'(t),\chi'(t)\in C[\alpha,\beta]\Rightarrow$ равн. непр.

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0: \forall t',t''\in[\alpha,\beta], |t'-t''|<\delta_2\Rightarrow|\varphi'(t')-\varphi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$,

$|\psi'(t')-\psi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$, $|\chi'(t')-\chi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}\Rightarrow\forall\varepsilon>0$

$\exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$, $\forall T, \delta_T\le\delta$ $|\ell_T-I|\le|\ell_T-\sigma_T(f,\Xi)|+$

$$+|\sigma_T(f,\Xi)-I|<\sum_{k=1}^n\Big|\sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2+[\psi'(\beta_k)]^2+[\chi'(\gamma_k)]^2}-$$

$$-\sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\xi_k)]^2+[\chi'(\xi_k)]^2}\Big|\Delta t_k+\frac{\varepsilon}{2}\le$$

$$\le\sum_{k=1}^n\sqrt{[\varphi'(\alpha_k)-\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\beta_k)-\psi'(\xi_k)]^2+[\chi'(\gamma_k)-\chi'(\xi_k)]^2}\cdot\Delta t_k+\frac{\varepsilon}{2}<$$

$$<\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{\varepsilon^2\cdot3}{16(\beta-\alpha)^2}}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot(\beta-\alpha)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

т.е. $\lim\limits_{\delta_T\to0}\ell_T=I$.

А надо, чтобы $\sup\limits_T\ell_T=I$. Достат.: $\ell_T\le I\ \forall T$ (?)

Пусть $\exists T_0: \ell_{T_0}\ge I$. $I=\lim\limits_{\delta_T\to0}\ell_T$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$:

$\forall T, \delta_T<\delta\ |\ell_T-I|<\varepsilon$, $\varepsilon=\frac{\ell_{T_0}-I}{2}>0$

$\forall T\succ T_0, \delta_T<\delta\Rightarrow\frac{\ell_{T_0}-I}{2}=\varepsilon>|\ell_T-I|\ge$

$\ge\ell_T-I\ge\ell_{T_0}-I$ – противор.

Теорема доказана.

Частные случаи для плоской кривой ($z=0$)

$y=f(x)$, т.е. $\begin{cases} x=t \\ y=f(t)\end{cases}$ $a\le t\le b$

$$\ell(L)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$x\in[a,b]$ $\varphi(x)=\ell[a,x]=\int_a^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$

$$\varphi'(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}$$

I. Гладкая кривая $L:\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \\ z=\chi(t)\end{cases}$ $\alpha\le t\le\beta$ — спрямляема, причём

$$\ell(L)=\int_\alpha^\beta\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}\,dt$$

Д-во. $f(t)=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2+(\chi'(t))^2}$, $\int_\alpha^\beta f(t)dt\equiv I$.

$T=\{\alpha=t_0<\ldots<t_n=\beta\}$. $\varphi'(t),\psi'(t),\chi'(t)\in C[\alpha,\beta]\Rightarrow$ огр.

т.е. $\exists M>0: |\varphi'(t)|\le M, |\psi'(t)|\le M, |\chi'(t)|\le M\ \forall t\in[\alpha,\beta]$

$$\ell_T=\sum_{k=1}^n\sqrt{[\varphi(t_k)-\varphi(t_{k-1})]^2+[\psi(t_k)-\psi(t_{k-1})]^2+[\chi(t_k)-\chi(t_{k-1})]^2}\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ по т. Лагранжа $\exists\,\alpha_k,\beta_k,\gamma_k\in(t_{k-1},t_k)$:

$$\ell_T=\sum_{k=1}^n\sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2+[\psi'(\beta_k)]^2+[\chi'(\gamma_k)]^2}\,\Delta t_k$$

$\ell_T\le M\sqrt3\sum_{k=1}^n\Delta t_k=M\sqrt3\,(\beta-\alpha)\Rightarrow L$ — спрямляема.

$I=\lim\limits_{\delta_T\to0}\sigma_T(f,\Xi)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0\ \forall T, \delta_T<\delta\ \forall\Xi=\{\xi_k\}$

$|\sigma_T(f,\Xi)-I|<\frac{\varepsilon}{2}$. $\varphi'(t),\psi'(t),\chi'(t)\in C[\alpha,\beta]\Rightarrow$ равн. непр.

т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0: \forall t',t''\in[\alpha,\beta], |t'-t''|<\delta_2\Rightarrow|\varphi'(t')-\varphi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$,

$|\psi'(t')-\psi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$, $|\chi'(t')-\chi'(t'')|<\frac{\varepsilon}{4(\beta-\alpha)}$. $\Rightarrow\forall\varepsilon>0$

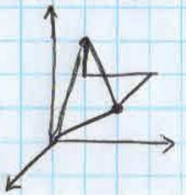
$\exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0$, $\forall T, \delta_T\le\delta$ $|\ell_T-I|\le|\ell_T-\sigma_T(f,\Xi)|+$

$$+|\sigma_T(f,\Xi)-I|<\sum_{k=1}^n\left|\sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2+[\psi'(\beta_k)]^2+[\chi'(\gamma_k)]^2}-\right.$$

$$\left.-\sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\xi_k)]^2+[\chi'(\xi_k)]^2}\right|\Delta t_k+\frac{\varepsilon}{2}\le$$

$$\le\sum_{k=1}^n\sqrt{[\varphi'(\alpha_k)-\varphi'(\xi_k)]^2+[\psi'(\beta_k)-\psi'(\xi_k)]^2+[\chi'(\gamma_k)-\chi'(\xi_k)]^2}\cdot\Delta t_k+\frac{\varepsilon}{2}<$$

$$<\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{\varepsilon^2\cdot3}{16(\beta-\alpha)^2}}+\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2(\beta-\alpha)}\cdot(\beta-\alpha)+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$



т.е. $\lim\limits_{\delta_T\to0}\ell_T=I$.

А надо, чтобы $\sup\limits_T\ell_T=I$. Достат.: $\ell_T\le I\ \forall T$ (?)

Пусть $\exists T_0: \ell_{T_0}\ge I$. $I=\lim\limits_{\delta_T\to0}\ell_T$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$:

$\forall T, \delta_T<\delta$ $|\ell_T-I|<\varepsilon$. $\varepsilon=\frac{\ell_{T_0}-I}{2}>0$

$\forall T\succ T_0, \delta_T<\delta\Rightarrow\frac{\ell_{T_0}-I}{2}=\varepsilon>|\ell_T-I|\ge$

$\ge\ell_T-I\ge\ell_{T_0}-I$ — противор.

Теорема доказана.

Частные случаи для плоской кривой ($z=0$)

$y=f(x)$, т.е. $\begin{cases}x=t\\ y=f(t)\end{cases}$ $a\le t\le b$

$$\ell(L)=\int_a^b\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$x\in[a,b]$ $\varphi(x)=\ell[a,x]=\int_a^x\sqrt{1+(f'(t))^2}\,dt$

$$\varphi'(x)=\sqrt{1+(f'(x))^2}$$

Полярные координаты. $r=r(\varphi)$, $\alpha\le\varphi\le\beta$

$L:\begin{cases}x=r(\varphi)\cos\varphi\\ y=r(\varphi)\sin\varphi\end{cases}$ $\alpha\le\varphi\le\beta$

$$(x'_\varphi)^2+(y'_\varphi)^2=(r'_\varphi\cos\varphi-r(\varphi)\sin\varphi)^2+$$
$$+(r'(\varphi)\sin\varphi+r(\varphi)\cos\varphi)^2=(r'(\varphi))^2\cos^2\varphi-$$
$$-2r(\varphi)r'(\varphi)\cos\varphi\sin\varphi+(r(\varphi))^2\sin^2\varphi+(r'(\varphi))^2\sin^2\varphi+$$
$$+2r(\varphi)r'(\varphi)\sin\varphi\cos\varphi+(r(\varphi))^2\cos^2\varphi=(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2.$$

$$\ell(L)=\int_\alpha^\beta\sqrt{(r(\varphi))^2+(r'(\varphi))^2}\,d\varphi$$

Площадь плоской фигуры

Плоская фигура – любое ограниченное мн-во на плоскости

Опр P – плоская фигура. Число $\mu(P)$ – площадь, если

1) $\mu(P) \geq 0$ 2) $P_1 \asymp P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$ 4) P – един. квадрат

3) $P = P_1 \cup P_2$ $(P_1 \cap P_2 = \varnothing) \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$ $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Площадь плоской фигуры

Плоская фигура – любое ограниченное мн-во на плоскости.

Опр P – плоская фигура. Число $\mu(P)$ – площадь, если

1) $\mu(P) \geq 0$ 2) $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$ 4) P – един. квадрат

3) $P = P_1 \cup P_2$ $(P_1 \cap P_2 = \varnothing) \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$ $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P – многоугольник, его площадь $\tilde{\mu}(P)$ – известная.

7-угольник 9-угольник

Объедин. непересек. мн-ков, разность мн-ков – мн-к
$\varnothing$ – мн-к, $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$.

Площадь плоской фигуры

Плоская фигура – любое ограниченное мн-во на плоскости.

Опр P – плоская фигура. Число $\mu(P)$ – площадь, если

1) $\mu(P) \geq 0$ 2) $P_1 \cong P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$ 4) P – един. квадрат

3) $P = P_1 \cup P_2$ $(P_1 \cap P_2 = \varnothing) \Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$ $\Rightarrow \mu(P) = 1$

P – многоугольник, его площадь $\tilde{\mu}(P)$ – известная.

7-угольник 9-угольник

Объедин. непересек. мн-ков, разность мн-ков – мн-к, $\varnothing$ – мн-к, $\tilde{\mu}(\varnothing) = 0$.

P – фигура Q, S – многоуг-ки: $Q \subset P \subset S$; Q – впис. мн-к, S – опис. мн-к

$\forall Q, S:\ Q \subset P \subset S$ $\tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ огр. св. $\{\tilde{\mu}(S)\}$ – огр. сн.

Опр. P – фигура. $\underline{\mu}(P) \equiv \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$, $\overline{\mu}(P) \equiv \inf\limits_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$

$\underline{\mu}(P)$ – нижняя площадь $\overline{\mu}(P)$ – верхняя площадь.

$\tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P)$.

Опр. Фигура P назыв. квадрируемой, если $\underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$.

При этом $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$.

Установим, что $\mu(P)$ - площадь, т.е. удовлетворяет 1, 2, 3, 4.

1. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup\limits_{Q \subseteq P} \tilde{\mu}(Q) \geq 0.$

Установим, что $\mu(P)$ - площадь, т.е. удовлетворяет 1, 2, 3, 4.

1. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq 0.$

2. $P_1 \simeq P_2$ $Q_1 \subset P_1 \subset S_1 \Leftrightarrow Q_2 \subset P_2 \subset S_2$, где $Q_1 \simeq Q_2$, $S_1 \simeq S_2$, т.е.

$\tilde{\mu}(Q_2) = \tilde{\mu}(Q_1)$, $\tilde{\mu}(S_2) = \tilde{\mu}(S_1) \Rightarrow \underline{\mu}(P_2) = \underline{\mu}(P_1)$, $\overline{\mu}(P_2) = \overline{\mu}(P_1) \Leftrightarrow \mu(P_2) = \mu(P_1)$

Установим, что $\mu(P)$ - площадь, т.е. удовлетворяет 1, 2, 3, 4.

1. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup\limits_{Q\subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq 0.$

2. $P_1 \simeq P_2$ $Q_1 \subset P_1 \subset S_1 \Leftrightarrow Q_2 \subset P_2 \subset S_2$, где $Q_1 \simeq Q_2$, $S_1 \simeq S_2$, т.е.

$\tilde{\mu}(Q_2) = \tilde{\mu}(Q_1)$, $\tilde{\mu}(S_2) = \tilde{\mu}(S_1) \Rightarrow \underline{\mu}(P_2) = \underline{\mu}(P_1)$, $\overline{\mu}(P_2) = \overline{\mu}(P_1) \Leftrightarrow \mu(P_2) = \mu(P_1)$

3. $P = P_1 \cup P_2$ $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\, Q_1, Q_2, S_1, S_2$: $Q_1 \subset P_1 \subset S_1$, $Q_2 \subset P_2 \subset S_2$

$\tilde{\mu}(Q_1) > \mu(P_1) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\tilde{\mu}(S_1) < \mu(P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$; $\tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_2) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}$

$Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Возьмём $Q = Q_1 \cup Q_2$, $S = S_1 \cup S_2$ - многоугольники.

$\tilde{\mu}(Q) = \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \sup\limits_{Q\subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq$

$\geq \sup\limits_{\substack{Q:\, Q = Q_1 \cup Q_2 \\ Q_1 \subset P_1,\, Q_2 \subset P_2}} \tilde{\mu}(Q) \geq \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$. Т.о. $\forall \varepsilon > 0$ $\underline{\mu}(P) >$

$> \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) \geq \mu(P_1) + \mu(P_2)$

$\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\overline{\mu}(P) = \sup\limits_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq$

$\leq \inf\limits_{\substack{S:\, S = S_1 \cup S_2 \\ S_1 \supset P_1,\, S_2 \supset P_2}} \tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2)$

т.е. $\mu(P_1) + \mu(P_2) \leq \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

$\Rightarrow P$ квадрир., причём $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

Установим, что $\mu(P)$ - площадь, т.е. удовлетворяет 1, 2, 3, 4.

1. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq 0.$

2. $P_1 \simeq P_2$ $Q_1 \subset P_1 \subset S_1 \Leftrightarrow Q_2 \subset P_2 \subset S_2$, где $Q_1 \simeq Q_2$, $S_1 \simeq S_2$, т.е.

$\tilde{\mu}(Q_2) = \tilde{\mu}(Q_1)$, $\tilde{\mu}(S_2) = \tilde{\mu}(S_1) \Rightarrow \underline{\mu}(P_2) = \underline{\mu}(P_1)$, $\overline{\mu}(P_2) = \overline{\mu}(P_1) \Leftrightarrow \mu(P_2) = \mu(P_1)$

3. $P = P_1 \cup P_2$ $P_1 \cap P_2 = \varnothing$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists Q_1, Q_2, S_1, S_2 : Q_1 \subset P_1 \subset S_1, Q_2 \subset P_2 \subset S_2$

$\tilde{\mu}(Q_1) > \mu(P_1) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\tilde{\mu}(S_1) < \mu(P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$; $\tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_2) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}$

$Q_1 \cap Q_2 = \varnothing$. Возьмём $Q = Q_1 \cup Q_2$, $S = S_1 \cup S_2$ - многоугольники.

$\tilde{\mu}(Q) = \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \sup\limits_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq$

$\geq \sup\limits_{\substack{Q : Q = Q_1 \cup Q_2 \\ Q_1 \subset P_1, Q_2 \subset P_2}} \tilde{\mu}(Q) \geq \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$. Т.о. $\forall \varepsilon > 0$ $\underline{\mu}(P) >$

$> \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) \geq \mu(P_1) + \mu(P_2)$

$\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\overline{\mu}(P) = \sup\limits_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq$

$\leq \inf\limits_{\substack{S : S = S_1 \cup S_2 \\ S_1 \supset P_1, S_2 \supset P_2}} \tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \overline{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2)$

т.е. $\mu(P_1) + \mu(P_2) \leq \underline{\mu}(P) \leq \overline{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P)$

$\Rightarrow P$ квадрир., причём $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4. P - един. квадрат. Берём $Q = P = S$ $\underline{\mu}(P) \geq \tilde{\mu}(P) = 1$, $\overline{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(P) = 1$

$\Rightarrow \underline{\mu}(P) = \overline{\mu}(P) = 1$, т.е. $\mu(P) = 1$.

Это рассмотрение годится для любого мн-ка.