

Приложения определённого интеграла

Длина дуги

Опр. $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[\alpha, \beta]$. $\{M(x; y; z)\} \in \mathbb{R}^3$,

где $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [\alpha, \beta]$ назыв. простой

кривой, если $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] (t_1 \neq t_2) \Rightarrow M(x_1; y_1; z_1) \neq M(x_2; y_2; z_2)$

($x_i = \varphi(t_i), y_i = \psi(t_i), z_i = \chi(t_i); i = 1, 2$).

$z \equiv 0 \Rightarrow$ проекция кривая.

Пример. $y = f(x), f(x) \in C[a, b]$

$$\begin{cases} x = t & a \leq t \leq b \\ y = f(t) \\ (z = 0) \end{cases} \text{ простая кривая}$$

Приложения определенного интеграла

Длина дуги

Опр. $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[\alpha, \beta]$. $\{M(x, y, z)\} \in \mathbb{R}^3$,

где $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [\alpha, \beta]$ назыв. простой

кривой, если $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] (t_1 \neq t_2) \Rightarrow M(x_1, y_1, z_1) \neq M(x_2, y_2, z_2)$

$(x_i = \varphi(t_i), y_i = \psi(t_i), z_i = \chi(t_i); i = 1, 2)$.

$z \equiv 0 \Rightarrow$ плоская кривая.

Пример. $y = f(x), f(x) \in C[a, b]$ $\begin{cases} x = t & a \leq t \leq b \\ y = f(t) \\ (z = 0) \end{cases}$ простая кривая

Опр. Уравнения $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}, t \in \{t\}$ - параметризация, задают

параметрически кривую L , если $\{t\}$ можно разбить на

конечное или бесконечное (счётное) число отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$,

покрывающих $\{t\}$ и совпадающих не более чем конеч-

но раз, где на $[\alpha_i, \beta_i]$ $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$ - простая кривая.

Пример. $L: \begin{cases} x = \cos t & t \in [0, 4\pi] \\ y = \sin t & \text{или даже} \\ (z = 0) & t \in (-\infty, +\infty) \end{cases}$ кривая, заданная параметрически

Данная кривая - параметрически заданная кривая.

Приложения определённого интеграла

Длина дуги

Опр. $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[\alpha, \beta]$. $\{M(x; y; z)\} \in \mathbb{R}^3$,
где $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [\alpha, \beta]$ назыв. простой
кривой, если $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] (t_1 \neq t_2) \Rightarrow M(x_1; y_1; z_1) \neq M(x_2; y_2; z_2)$
($x_i = \varphi(t_i), y_i = \psi(t_i), z_i = \chi(t_i); i = 1, 2$).

$z \equiv 0 \Rightarrow$ плоская кривая.

Пример. $y = f(x), f(x) \in C[a, b]$ $\begin{cases} x = t & a \leq t \leq b \\ y = f(t) \\ (z = 0) \end{cases}$ простая кривая

Опр. Уравнения $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}, t \in \{t\}$ - параметризация, задают
параметрически кривую L , если $\{t\}$ можно разбить на
конечное или бесконечное (счётное) число отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$,
покрывающих $\{t\}$ и совпадающих не более чем концы-
ми так, что на $[\alpha_i, \beta_i]$ $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$ - простая кривая.

Пример. $L: \begin{cases} x = \cos t & t \in [0, 4\pi] \\ y = \sin t \\ (z = 0) \end{cases}$ кривая, заданная
или даже - как пара-
метрически $t \in (-\infty, +\infty)$ метрически
Далее кривая - параметрически заданная кривая.

Опр $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$ - назыв. гладкой,

если $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, при этом

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

Приложения определённого интеграла

Длина дуги

Опр. $\varphi(t), \psi(t), \chi(t) \in C[\alpha, \beta]$. $\{M(x; y; z)\} \in \mathbb{R}_3$,

где $x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [\alpha, \beta]$ назыв. простой кривой, если $\forall t_1, t_2 \in [\alpha, \beta] (t_1 \neq t_2) \Rightarrow M(x_1; y_1; z_1) \neq M(x_2; y_2; z_2)$ ($x_i = \varphi(t_i), y_i = \psi(t_i), z_i = \chi(t_i); i = 1, 2$).

$z \equiv 0 \Rightarrow$ плоская кривая.

Пример. $y = f(x), f(x) \in C[a, b]$ $\begin{cases} x = t & a \leq t \leq b \\ y = f(t) \\ z = 0 \end{cases}$ простая кривая

Опр. Уравнения $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t), t \in \{t\} \\ z = \chi(t) \end{cases}$ - параметризация, задают параметрически кривую L , если $\{t\}$ можно разбить на конечное или бесконечное (счётное) число отрезков $[\alpha_i, \beta_i]$, покрывающих $\{t\}$ и совпадающих не более чем концами так, что на $[\alpha_i, \beta_i]$ $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases}$ - простая кривая.

Пример. $L: \begin{cases} x = \cos t & t \in [0, 4\pi] \\ y = \sin t \\ z = 0 \end{cases}$ кривая, заданная парой параметрических уравнений.

Опр $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} t \in [\alpha, \beta]$ - назыв. гладкой,

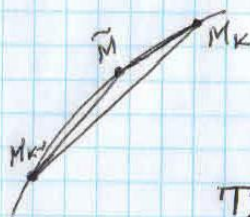
если $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta]$, причём

$$(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2 > 0 \quad \forall t \in [\alpha, \beta]$$

$$L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \quad T = \{\alpha = t_0 < \dots < t_{k-1} < t_k < \dots < t_n = \beta\}$$
$$M_k(x_k; y_k; z_k) \quad x_k = \varphi(t_k), y_k = \psi(t_k), z_k = \chi(t_k), k = 0, 1, \dots, n$$
$$t \in [\alpha, \beta]$$

$$l_T = \sum_{k=1}^n |M_{k-1} M_k| = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}$$
$$= \sum_{k=1}^n \sqrt{(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}))^2 + (\psi(t_k) - \psi(t_{k-1}))^2 + (\chi(t_k) - \chi(t_{k-1}))^2}$$

- длина ломаной, вписанной в кривую.



Если $T_1 = T \cup \{\tilde{t}\} \Rightarrow l_{T_1} \geq l_T$
(по пер-му треугольнику)

$$T_1 \supset T_2 \Rightarrow l_{T_1} \geq l_{T_2}$$

Опр. Кривая L называется спрямляемой, если $\{l_T\}$ ограничено сверху. Число $l = l(L) = \sup_T \{l_T\}$ называется длиной кривой L

I. Γνωσκά κρύβαν $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$ - σφαιρική, ημικύβη

$$L(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt$$

2-βο. $f(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \equiv I$.

$T = \{\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta\}$, $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow \sigma_{\varphi}$.

π.ε. $\exists M > 0: |\varphi'(t)| \leq M, |\psi'(t)| \leq M, |\chi'(t)| \leq M \forall t \in [\alpha, \beta]$

$$L_T = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2 + [\chi(t_k) - \chi(t_{k-1})]^2} \Rightarrow$$

\Rightarrow no τ. Λογάρωχα $\exists \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in (t_{k-1}, t_k)$:

$$L_T = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2 + [\psi'(\beta_k)]^2 + [\chi'(\gamma_k)]^2} \cdot \Delta t_k$$

$$L_T \leq M\sqrt{3} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = M\sqrt{3} (\beta - \alpha) \Rightarrow L \text{ - σφαιρική.}$$

$I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \square)$, π.ε. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall T, \delta_T < \delta \forall \square = \{\xi_k\}$

$|\sigma_T(f, \square) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow$ ραβν. κενρ.

π.ε. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0: \forall t', t'' \in [\alpha, \beta], |t' - t''| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(t') - \varphi(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}$

$|\psi'(t') - \psi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}, |\chi'(t') - \chi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0, \forall T, \delta_T \leq \delta \quad |L_T - I| \leq |L_T - \sigma_T(f, \square)| +$

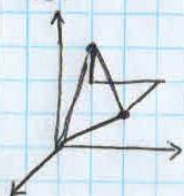
$$+ |\sigma_T(f, \square) - I| < \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2 + [\psi'(\beta_k)]^2 + [\chi'(\gamma_k)]^2} \cdot \Delta t_k -$$

$$- \sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2 + [\psi'(\xi_k)]^2 + [\chi'(\xi_k)]^2} \cdot \Delta t_k + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi(\alpha_k) - \varphi(\xi_k)]^2 + [\psi(\beta_k) - \psi(\xi_k)]^2 + [\chi(\gamma_k) - \chi(\xi_k)]^2} \cdot \Delta t_k + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \cdot 3}{16(\beta - \alpha)^2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \cdot (\beta - \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

π.ε. $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} L_T = I$.



Ακόμο, πρδστ $\sup_T L_T = I$. Δοστστ.: $L_T \leq I \forall T$ (?)

Πυστστ $\exists T_0: L_{T_0} \geq I$. $I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} L_T$, π.ε. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$

$\forall T, \delta_T < \delta \quad |L_T - I| < \varepsilon, \varepsilon = \frac{L_{T_0} - I}{2} > 0$

$\forall T > T_0, \delta_T < \delta \Rightarrow \frac{L_{T_0} - I}{2} = \varepsilon > |L_T - I| \geq$

$\geq L_T - I \geq L_{T_0} - I$ - πρστυβερ.

Τεορστστ Δοκστστστ.

I. Γνωστικα κρυβαα L: $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$ - σφραμινσσεια, ημωιν

$$L(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt$$

D-βc. $f(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \equiv I$.

$\mathcal{T} = \{\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta\}$, $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow \sigma \rho$.

π.e. $\exists M > 0: |\varphi'(t)| \leq M, |\psi'(t)| \leq M, |\chi'(t)| \leq M \forall t \in [\alpha, \beta]$

$$L_{\mathcal{T}} = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2 + [\chi(t_k) - \chi(t_{k-1})]^2} \Rightarrow$$

\Rightarrow no T. Λαγρυνκω $\exists \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in (t_{k-1}, t_k)$:

$$L_{\mathcal{T}} = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2 + [\psi'(\beta_k)]^2 + [\chi'(\gamma_k)]^2} \Delta t_k$$

$$L_{\mathcal{T}} \leq M\sqrt{3} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = M\sqrt{3} (\beta - \alpha) \Rightarrow L \text{ - σφραμινσσεια.}$$

$I = \lim_{\delta_{\mathcal{T}} \rightarrow 0} \sigma_{\mathcal{T}}(f, \square)$, π.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall \mathcal{T}, \delta_{\mathcal{T}} < \delta \forall \square = \{\xi_k\}$

$|\sigma_{\mathcal{T}}(f, \square) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow$ παβλ. ηεσρ.

π.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0: \forall t', t'' \in [\alpha, \beta], |t' - t''| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(t') - \varphi(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}$,

$|\psi'(t') - \psi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}, |\chi'(t') - \chi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0, \forall \mathcal{T}, \delta_{\mathcal{T}} < \delta |L_{\mathcal{T}} - I| \leq |L_{\mathcal{T}} - \sigma_{\mathcal{T}}(f, \square)| +$

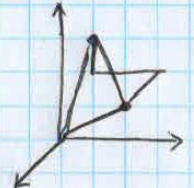
$$+ |\sigma_{\mathcal{T}}(f, \square) - I| < \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2 + [\psi'(\beta_k)]^2 + [\chi'(\gamma_k)]^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2 + [\psi'(\xi_k)]^2 + [\chi'(\xi_k)]^2} \right| \Delta t_k + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi(\alpha_k) - \varphi(\xi_k)]^2 + [\psi(\beta_k) - \psi(\xi_k)]^2 + [\chi(\gamma_k) - \chi(\xi_k)]^2} \cdot \Delta t_k + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \cdot 3}{16(\beta - \alpha)^2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \cdot (\beta - \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

π.e. $\lim_{\delta_{\mathcal{T}} \rightarrow 0} L_{\mathcal{T}} = I$.



Αναδο, πωδοτ $\sup_{\mathcal{T}} L_{\mathcal{T}} = I$. Δωσται: $L_{\mathcal{T}} \leq I \forall \mathcal{T}$ (?)

Πυστω $\exists \mathcal{T}_0: L_{\mathcal{T}_0} \geq I$. $I = \lim_{\delta_{\mathcal{T}} \rightarrow 0} L_{\mathcal{T}}$, π.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0:$

$$\forall \mathcal{T}, \delta_{\mathcal{T}} < \delta |L_{\mathcal{T}} - I| < \varepsilon, \varepsilon = \frac{L_{\mathcal{T}_0} - I}{2} > 0$$

$$\forall \mathcal{T} > \mathcal{T}_0, \delta_{\mathcal{T}} < \delta \Rightarrow \frac{L_{\mathcal{T}_0} - I}{2} = \varepsilon > |L_{\mathcal{T}} - I| \geq$$

$$\geq L_{\mathcal{T}} - I \geq L_{\mathcal{T}_0} - I \text{ - πρωτωβωρ.}$$

Τωρηνικα Δωκαζηνα.

Χασιμωε σφραμινσσεια για πλωσκω κρυβαω (z=0)

$$y = f(x), \text{ π.e. } \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq b$$

$$L(L) = \int_{\alpha}^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$x \in [a, b] \varphi(x) = L[a, x] = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

$$\varphi'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

I. Гладкая кривая $L: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \chi(t) \end{cases} \alpha \leq t \leq \beta$ - спрямляемая, прямая

$$L(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2} dt$$

2-во. $f(t) = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2 + (\chi'(t))^2}$, $\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt \equiv I$.

$T = \{\alpha = t_0 < \dots < t_n = \beta\}$, $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow \text{опр.}$

т.е. $\exists M > 0: |\varphi'(t)| \leq M, |\psi'(t)| \leq M, |\chi'(t)| \leq M \forall t \in [\alpha, \beta]$

$$L_T = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})]^2 + [\psi(t_k) - \psi(t_{k-1})]^2 + [\chi(t_k) - \chi(t_{k-1})]^2} \Rightarrow$$

\Rightarrow по т. Лагранжа $\exists \alpha_k, \beta_k, \gamma_k \in (t_{k-1}, t_k)$:

$$L_T = \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2 + [\psi'(\beta_k)]^2 + [\chi'(\gamma_k)]^2} \Delta t_k$$

$$L_T \leq M \sqrt{3} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = M \sqrt{3} (\beta - \alpha) \Rightarrow L - \text{спрямляемая.}$$

$I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} \sigma_T(f, \bar{\square})$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 \forall T, \delta_T < \delta \forall \bar{\square} = \{\xi_k\}$

$|\sigma_T(f, \bar{\square}) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$. $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t) \in C[\alpha, \beta] \Rightarrow$ рабн. непрерыв.

т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0: \forall t', t'' \in [\alpha, \beta], |t' - t''| < \delta_2 \Rightarrow |\varphi(t') - \varphi(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}$

$|\psi'(t') - \psi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)}, |\chi'(t') - \chi'(t'')| < \frac{\varepsilon}{4(\beta - \alpha)} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0$

$\exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0, \forall T, \delta_T \leq \delta |L_T - I| \leq |L_T - \sigma_T(f, \bar{\square})| +$

$$+ |\sigma_T(f, \bar{\square}) - I| < \sum_{k=1}^n \left| \sqrt{[\varphi'(\alpha_k)]^2 + [\psi'(\beta_k)]^2 + [\chi'(\gamma_k)]^2} - \right.$$

$$\left. - \sqrt{[\varphi'(\xi_k)]^2 + [\psi'(\xi_k)]^2 + [\chi'(\xi_k)]^2} \right| \Delta t_k + \frac{\varepsilon}{2} \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^n \sqrt{[\varphi(\alpha_k) - \varphi(\xi_k)]^2 + [\psi(\beta_k) - \psi(\xi_k)]^2 + [\chi(\gamma_k) - \chi(\xi_k)]^2} \cdot \Delta t_k + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{\varepsilon^2 \cdot 3}{16(\beta - \alpha)^2}} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2(\beta - \alpha)} \cdot (\beta - \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т.е. $\lim_{\delta_T \rightarrow 0} L_T = I$.



Аналог, чтобы $\sup_T L_T = I$. Достат.: $L_T \leq I \forall T$ (?)

Пусть $\exists T_0: L_{T_0} \geq I$. $I = \lim_{\delta_T \rightarrow 0} L_T$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0:$

$$\forall T, \delta_T < \delta |L_T - I| < \varepsilon, \quad \varepsilon = \frac{L_{T_0} - I}{2} > 0$$

$$\forall T > T_0, \delta_T < \delta \Rightarrow \frac{L_{T_0} - I}{2} = \varepsilon > |L_T - I| \geq$$

$$\geq L_T - I \geq L_{T_0} - I \text{ - противор.}$$

Теорема доказана.

Частные случаи для плоской кривой ($z = 0$)

$$y = f(x), \text{ т.е. } \begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad 0 \leq t \leq b$$

$$L(L) = \int_0^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$x \in [a, b] \quad \varphi(x) = L[a, x] = \int_a^x \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$$

$$\varphi'(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

Полярные координаты. $r = r(\varphi), \alpha \leq \varphi \leq \beta$

$$L: \begin{cases} x = r(\varphi) \cos \varphi \\ y = r(\varphi) \sin \varphi \end{cases} \quad \alpha \leq \varphi \leq \beta$$

$$(x'_\varphi)^2 + (y'_\varphi)^2 = (r'_\varphi \cos \varphi - r(\varphi) \sin \varphi)^2 +$$

$$+ (r'_\varphi \sin \varphi + r(\varphi) \cos \varphi)^2 = (r'_\varphi)^2 \cos^2 \varphi -$$

$$- 2r(\varphi)r'_\varphi \cos \varphi \sin \varphi + (r(\varphi))^2 \sin^2 \varphi + (r'_\varphi)^2 \sin^2 \varphi +$$

$$+ 2r(\varphi)r'_\varphi \sin \varphi \cos \varphi + (r(\varphi))^2 \cos^2 \varphi = (r(\varphi))^2 + (r'_\varphi)^2.$$

$$L(L) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\varphi))^2 + (r'_\varphi)^2} d\varphi$$

Площадь плоской фигуры

Плоская фигура — любое ограниченное мн-во на плоскости.

Опр P — плоская фигура. Число $\mu(P)$ — площадь, если

- 1) $\mu(P) \geq 0$
- 2) $P_1 \sim P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$
- 3) $P = P_1 \cup P_2$ ($P_1 \cap P_2 = \emptyset$) $\Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$
- 4) P — един. квадрат $\Rightarrow \mu(P) = 1$

Площадь плоской фигуры

Плоская фигура — любое ограниченное мн-во на плоскости.

Опр P — плоская фигура. Число $\mu(P)$ — площадь, если

1) $\mu(P) \geq 0$ 2) $P_1 \sim P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$ 4) P — един. квадрат

3) $P = P_1 \cup P_2$ ($P_1 \cap P_2 = \emptyset$) $\Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \mu(P) = 1$

P — многоугольник, его площадь $\tilde{\mu}(P)$ — известная.



Объедин. перес. мн-ков,
разность мн-ков — мн-к
 \emptyset — мн-к, $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$.

Площадь плоской фигуры

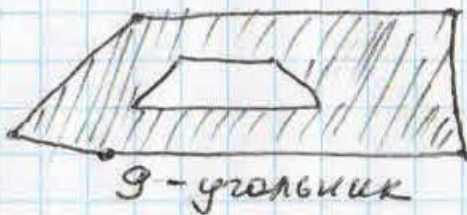
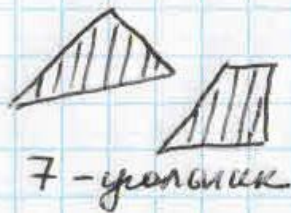
Плоская фигура - любое ограниченное мн-во на плоскости.

Опр P - плоская фигура. Число $\mu(P)$ - площадь, если

1) $\mu(P) \geq 0$ 2) $P_1 \sim P_2 \Rightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$ 4) P - един. квадрат

3) $P = P_1 \cup P_2$ ($P_1 \cap P_2 = \emptyset$) $\Rightarrow \mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \mu(P) = 1$

P - многоугольник, его площадь $\tilde{\mu}(P)$ - известная.



Объедин. неперес. мн-ков, разность мн-ков - мн-к \emptyset - мн-к, $\tilde{\mu}(\emptyset) = 0$.

P - фигура Q, S - много-ки: $Q \subset P \subset S$; Q - внутр. мн-к, S - внутр. мн-к

$\forall Q, S: Q \subset P \subset S \quad \tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \{\tilde{\mu}(Q)\}$ оцр. св. $\{\tilde{\mu}(S)\}$ - оцр. св.

Опр. P - фигура. $\underline{\mu}(P) \equiv \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q)$, $\bar{\mu}(P) \equiv \inf_{S \supset P} \tilde{\mu}(S)$

$\underline{\mu}(P)$ - нижняя площадь $\bar{\mu}(P)$ - верхняя площадь.

$$\tilde{\mu}(Q) \leq \tilde{\mu}(S) \Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(S) \Rightarrow \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P).$$

Опр. Фигура P назыв. квадратируемой, если $\underline{\mu}(P) = \bar{\mu}(P)$.

При этом $\mu(P) \equiv \underline{\mu}(P) = \bar{\mu}(P)$.

Установим, что $\mu(P)$ - масса, т.е. удовлетворяет 1, 2, 3, 4.

1. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq 0.$

Установим, что $\mu(P)$ - мера, т.е. удовлетворяет 1, 2, 3, 4.

1. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup_{Q \in P} \tilde{\mu}(Q) \geq 0.$

2. $P_1 \sim P_2, Q_1 \subset P_1 \subset S_1 \Leftrightarrow Q_2 \subset P_2 \subset S_2$, где $Q_1 \sim Q_2, S_1 \sim S_2$, т.е.

$$\tilde{\mu}(Q_2) = \tilde{\mu}(Q_1), \tilde{\mu}(S_2) = \tilde{\mu}(S_1) \Rightarrow \underline{\mu}(P_2) = \underline{\mu}(P_1), \bar{\mu}(P_2) = \bar{\mu}(P_1) \Leftrightarrow \mu(P_2) = \mu(P_1)$$

Установим, что $\mu(P)$ - мера, т.е. удовлетворяет 1, 2, 3, 4.

1. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq 0.$

2. $P_1 \sim P_2, Q_1 \subset P_1 \subset S_1 \Leftrightarrow Q_2 \subset P_2 \subset S_2, \text{ где } Q_1 \sim Q_2, S_1 \sim S_2, \text{ т.е.}$

$$\tilde{\mu}(Q_2) = \tilde{\mu}(Q_1), \tilde{\mu}(S_2) = \tilde{\mu}(S_1) \Rightarrow \underline{\mu}(P_2) = \underline{\mu}(P_1), \bar{\mu}(P_2) = \bar{\mu}(P_1) \Leftrightarrow \mu(P_2) = \mu(P_1)$$

3. $P = P_1 \cup P_2, P_1 \cap P_2 = \emptyset \forall \varepsilon > 0 \exists Q_1, Q_2, S_1, S_2 : Q_1 \subset P_1 \subset S_1, Q_2 \subset P_2 \subset S_2$

$$\tilde{\mu}(Q_1) > \mu(P_1) - \frac{\varepsilon}{2}, \tilde{\mu}(S_1) < \mu(P_1) + \frac{\varepsilon}{2}, \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_2) - \frac{\varepsilon}{2}, \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

$Q_1 \cap Q_2 = \emptyset, \text{ Возьмем } Q = Q_1 \cup Q_2, S = S_1 \cup S_2 \text{ - непересекающиеся.}$

$$\tilde{\mu}(Q) = \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq$$

$$\geq \sup_{\substack{Q: Q = Q_1 \cup Q_2 \\ Q_1 \subset P_1, Q_2 \subset P_2}} \tilde{\mu}(Q) \geq \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon, \text{ т.о. } \forall \varepsilon > 0 \underline{\mu}(P) >$$

$$> \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) \geq \mu(P_1) + \mu(P_2)$$

$$\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \bar{\mu}(P) = \sup_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq$$

$$\leq \inf_{\substack{S: S = S_1 \cup S_2 \\ S_1 \supset P_1, S_2 \supset P_2}} \tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2)$$

$$\text{т.е. } \mu(P_1) + \mu(P_2) \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \bar{\mu}(P)$$

$\Rightarrow P$ квадратер., причем $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

Установим, что $\mu(P)$ - мера, т.е. удовлетворяет 1, 2, 3, 4.

1. $\mu(P) = \underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq 0$.

2. $P_1 \sim P_2$ $Q_1 \subset P_1 \subset S_1 \Leftrightarrow Q_2 \subset P_2 \subset S_2$, где $Q_1 \sim Q_2$, $S_1 \sim S_2$, т.е.

$\tilde{\mu}(Q_1) = \tilde{\mu}(Q_2)$, $\tilde{\mu}(S_1) = \tilde{\mu}(S_2) \Rightarrow \underline{\mu}(P_1) = \underline{\mu}(P_2)$, $\bar{\mu}(P_1) = \bar{\mu}(P_2) \Leftrightarrow \mu(P_1) = \mu(P_2)$

3. $P = P_1 \cup P_2$ $P_1 \cap P_2 = \emptyset$ $\forall \varepsilon > 0 \exists Q_1, Q_2, S_1, S_2 : Q_1 \subset P_1 \subset S_1, Q_2 \subset P_2 \subset S_2$

$\tilde{\mu}(Q_1) > \mu(P_1) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\tilde{\mu}(S_1) < \mu(P_1) + \frac{\varepsilon}{2}$, $\tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_2) - \frac{\varepsilon}{2}$, $\tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_2) + \frac{\varepsilon}{2}$

$Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$, Возьмем $Q = Q_1 \cup Q_2$, $S = S_1 \cup S_2$ - непересекающиеся.

$\tilde{\mu}(Q) = \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \sup_{Q \subset P} \tilde{\mu}(Q) \geq$

$\geq \sup_{\substack{Q: Q = Q_1 \cup Q_2 \\ Q_1 \subset P_1, Q_2 \subset P_2}} \tilde{\mu}(Q) \geq \tilde{\mu}(Q_1) + \tilde{\mu}(Q_2) > \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon$. Т.о. $\forall \varepsilon > 0 \underline{\mu}(P) >$
 $> \mu(P_1) + \mu(P_2) - \varepsilon \Rightarrow \underline{\mu}(P) \geq \mu(P_1) + \mu(P_2)$

$\tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \bar{\mu}(P) = \sup_{S \supset P} \tilde{\mu}(S) \leq$

$\leq \inf_{\substack{S: S = S_1 \cup S_2 \\ S_1 \supset P_1, S_2 \supset P_2}} \tilde{\mu}(S) \leq \tilde{\mu}(S_1) + \tilde{\mu}(S_2) < \mu(P_1) + \mu(P_2) + \varepsilon \Rightarrow \bar{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2)$

т.е. $\mu(P_1) + \mu(P_2) \leq \underline{\mu}(P) \leq \bar{\mu}(P) \leq \mu(P_1) + \mu(P_2) \Rightarrow \underline{\mu}(P) = \bar{\mu}(P)$

$\Rightarrow P$ квадрат, причем $\mu(P) = \mu(P_1) + \mu(P_2)$

4. P - един. квадрат. Берем $Q = P = S$ $\underline{\mu}(P) \geq \tilde{\mu}(P) = 1$, $\bar{\mu}(P) \leq \tilde{\mu}(P) = 1$

$\Rightarrow \underline{\mu}(P) = \bar{\mu}(P) = 1$, т.е. $\mu(P) = 1$.

Это рассуждение проводится для любого мн-ка.