$$\sqrt[n]{a}$$

Определение арифметического корня п-ой степени.

Арифметический корень

Арифметическим корнем n-ой степени из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, n-я степень которого равна a

Вычислите!

$$\sqrt[3]{2\frac{10}{27}} =$$

$$-2\sqrt[5]{32} =$$

$$\sqrt[5]{-32} =$$

$$\sqrt[5]{\frac{1}{32}} - \sqrt[3]{15\frac{5}{8}} =$$

$$0{,}7\sqrt[4]{81} - 4\sqrt[3]{3\frac{3}{8}} =$$

Утверждения

1. *Если b — неотрицательное число, а n— любое натуральное число (n ≥ 2), то* запись $\sqrt[n]{b}$ означает арифметический корень степени *n* из числа *b*.

2. *Если b- отрицательное число, а n = 2m+ 1 (m ≥ 1) — нечётное число, то запись* $\sqrt[2m+1]{b}$ *означает корень степени 2 m + 1 из числа b,* но этот корень не является арифметическим корнем.

3. *Если b — отрицательное число, а n = 2m (m ≥ 1)— четное число,*
то *запись* $\sqrt[2m]{b}$ *не имеет смысла.*

Пример 1.

а) Записи $\sqrt{13}, \sqrt[7]{0}, \sqrt[4]{9}$ - это записи арифметических корней.

б) Записи

$-\sqrt{13}, \sqrt[7]{-1}, -\sqrt[4]{9}$ - это записи корней, не являющихся арифметическими.

в) Записи $\sqrt{-13}, -\sqrt[8]{-1}, \sqrt[4]{-16}$ - не имеют смысла.

Теорема 1. Для натурального числа n (n ≥ 2) и неотрицательного числа *a* *справедливы равенства*

$$1) \quad (\sqrt[n]{a})^n = a,$$

$$2) \quad \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Пример 2.

$а)\ \left(\sqrt[6]{7}\right)^6 = 7;\quad б)\ \left(\sqrt[7]{17}\right)^7 = 17;$

$в)\ \left(\sqrt[39]{1}\right)^{39} = 1;\quad г)\ \left(\sqrt[14]{0^{14}}\right) = 0;$

$д)\ \sqrt[33]{102^{33}} = 102.$

Теорема 2. **Для натурального числа n ($n \geq 2$) и неотрицательных чисел a и b из равенства $a^n = b^n$ следует равенство $a = b$.**

Теорема 3. **Для натурального числа n (n ≥ 2) и неотрицательных чисел *a, b и c* *(c ≠ 0)* из справедливы равенства**

$$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}, \qquad (3)$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{c}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{c}}. \qquad (4)$$

Пример 3.

$$а)\ \sqrt[4]{48}=\sqrt[4]{16\cdot 3}=\sqrt[4]{16}\cdot\sqrt[4]{3}=2\sqrt[4]{3};$$

$$б)\ \sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{8\cdot 3}=\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{3}=2\sqrt[3]{3};$$

$$в)\ \sqrt[4]{\frac{2}{81}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{\sqrt[4]{81}}=\frac{\sqrt[4]{2}}{3};$$

$$г)\ \sqrt[3]{\frac{5}{8}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{2}.$$

Замечание. 1). Если *n* – нечётное число, то *теоремы 1, 2, 3 справедливы* для любых действительных чисел a, b и c (c≠0).

2). Для натурального числа m и любого действительного числа *a* *справедливо равенство*

$$\sqrt[2m+1]{-a} = -\sqrt[2m+1]{a},$$

Пример 4.

$$а)\ \sqrt[3]{-27} = -\sqrt[3]{27} = -3;$$

$$б)\ \sqrt[53]{-1} = -\sqrt[53]{1} = -1;$$

$$в)\ \sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8} = -2;$$

$$г)\ \sqrt[5]{-100000} = -\sqrt[5]{10^5} = -10.$$

Вычислите

Вычислите: а) $\sqrt[3]{-64}+\sqrt[4]{81}$; б) $\left(\sqrt{18}\right)^2-\sqrt[6]{38^6}$; в) $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{2}$;

г) $\sqrt[5]{2}\cdot\sqrt[5]{16}$; д) $\sqrt[3]{125\cdot 64}$; е) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}-\sqrt[3]{-125}$; ж) $\sqrt[3]{4}\cdot\left(\sqrt[3]{16}-\sqrt[3]{2000}\right)$.

Образец решения примера под буквой Ж

$$\sqrt[3]{2}\left(\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{500}\right)=\sqrt[3]{8}+\sqrt[3]{1000}=2+10=12$$