

# Геометрия

7 класс

С. Водораздел

## Содержание:

- Геометрические фигуры: Геометрические фигуры: точка, прямая Геометрические фигуры: точка, прямая, Геометрические фигуры: точка, прямая, отрезок.
- Полуплоскость, луч и угол. Аксиомы и теоремы.
- Треугольники. Параллельные прямые.
- Смежные и вертикальные углы.
- Перпендикулярные прямые.
- Биссектриса угла.
- 1-ый и 2-ой признаки равенства треугольников.
- Высота, медиана и биссектриса треугольника.
- Равнобедренный треугольник.
- 3-ий признак равенства треугольников.
- Признаки параллельности прямых.
- Сумма углов треугольника.
- Внешний угол Внешний угол.
- Признаки равенства прямоугольных треугольников.
- Расстояние от точки до прямой
- Соотношения между сторонами и углами треугольника
- Неравенство треугольника.
- Окружность.
- Касательная к окружности
- Построение касательной
- Касание окружностей Касание окружностей (внутреннее) Касание окружностей (внутреннее) (внешнее)
- Описанная окружность Описанная окружность, Описанная окружность. Вписанная окружность
- Построение угла, равного данному. Построение угла, равного данному. Построение биссектрисы угла
- Деление отрезка пополам. Деление отрезка пополам. Построение прямой, перпендикулярной данной
- Построение треугольника: по двум сторонам и углу Построение треугольника: по двум сторонам и углу, по трём сторонам.
- Справка

# Основные свойства простейших геометрических фигур

Геометрические фигуры: точка,  
прямая, отрезок.



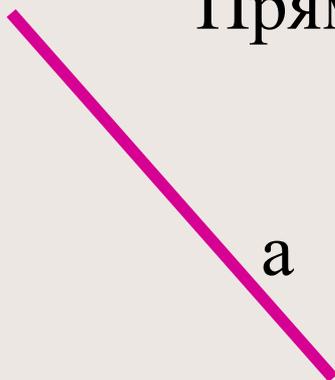
# Точка и прямая

ТОЧКА



A

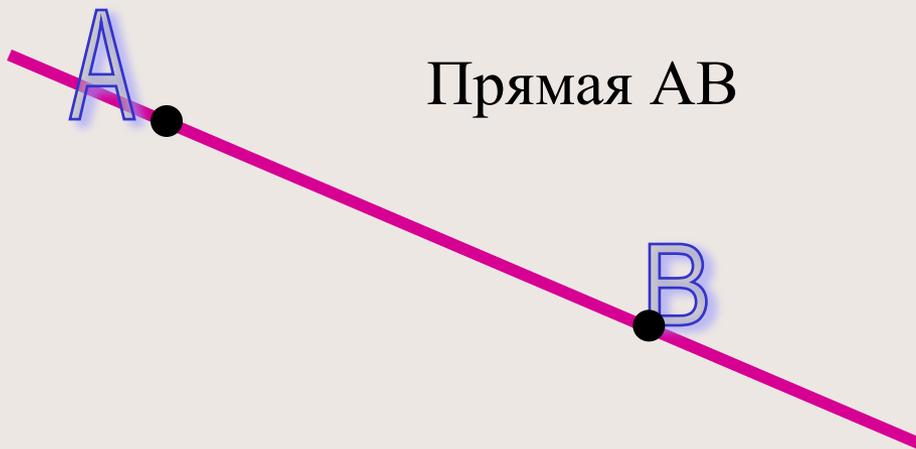
Точка А



Прямая а

а

ПРЯМАЯ



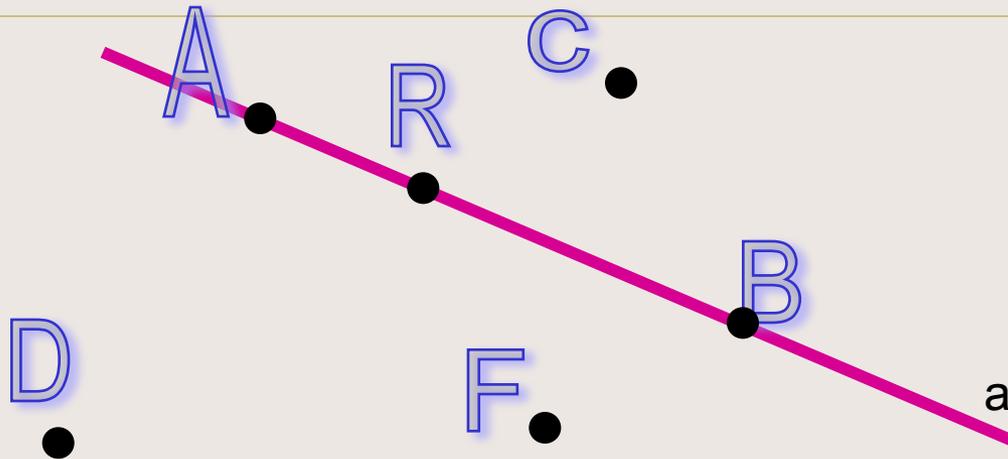
A

Прямая АВ

B



# Точка и прямая



$$A \in a$$

$$R \in a$$

$$B \in a$$

$$F \notin a$$

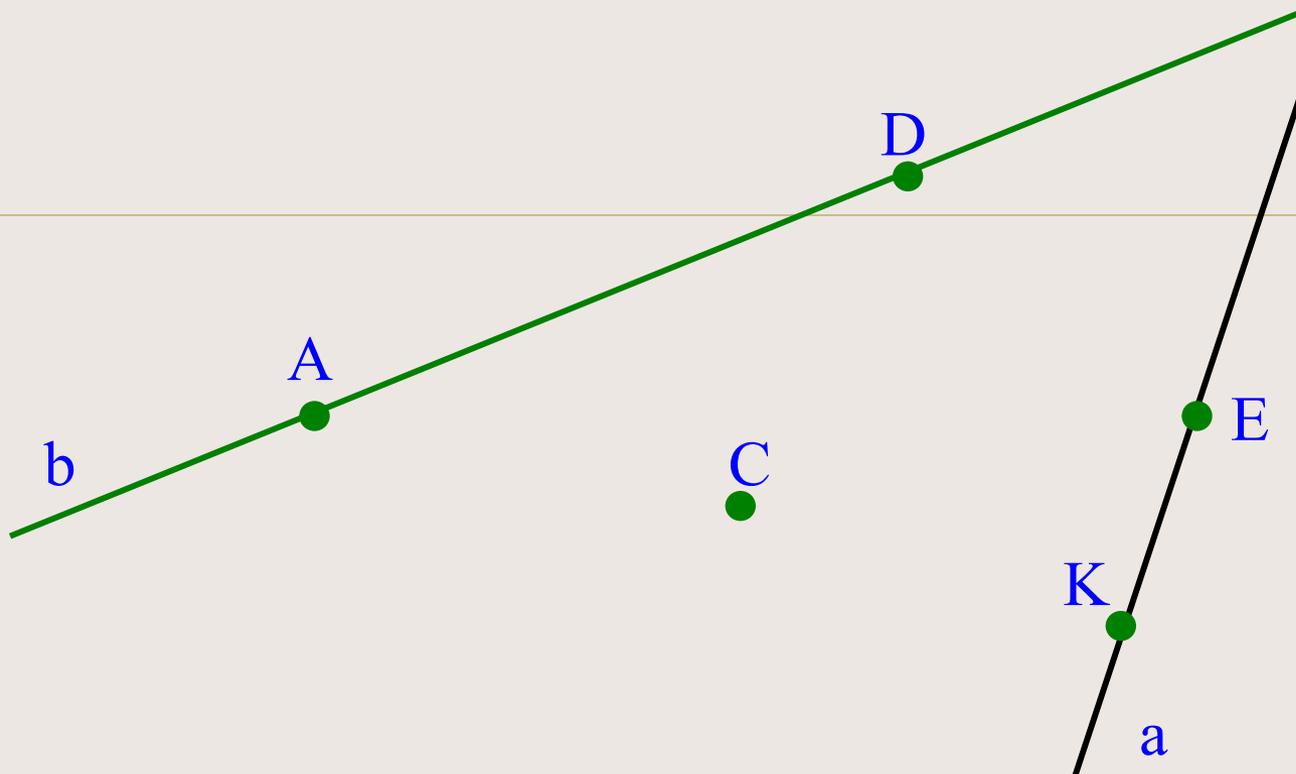
$$D \notin a$$

$$C \notin a$$

Какова бы ни была прямая, существуют точки ей принадлежащие, и точки, не принадлежащие ей.

Через любые две точки можно провести прямую и только одну.





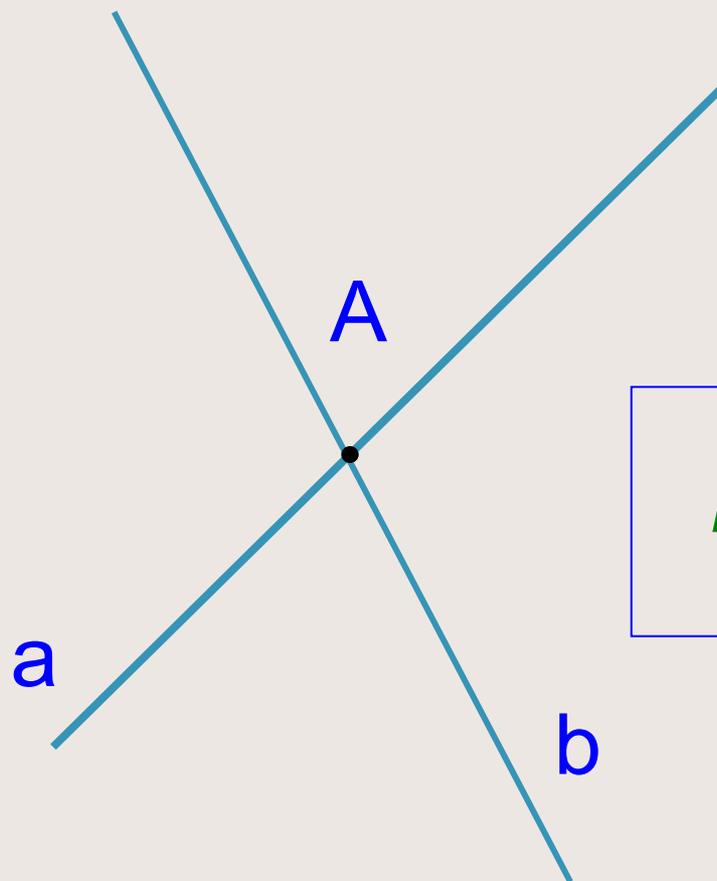
*Перечерти рисунок в тетрадь и ответь на вопросы:*

- 1. Какие точки принадлежат прямой a?*
- 2. Какие точки не принадлежат прямой b?*
- 3. Какие точки не принадлежат прямой a?*
- 4. Какие точки принадлежат прямой b?*



Подсказка

# Пересечение прямых



$$a \cap b = A$$

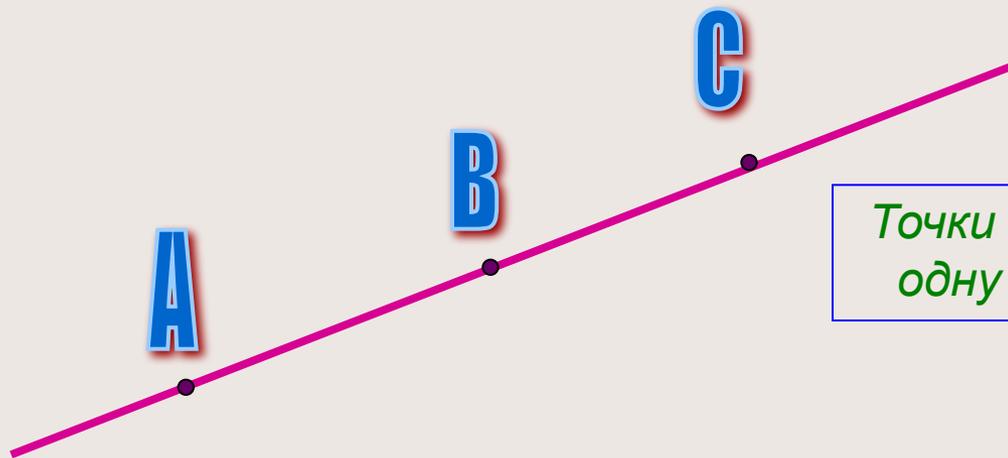
Прямые  $a$  и  $b$   
пересекаются в  
точке  $A$



Из трёх точек, лежащих на одной прямой,  
одна и только одна лежит между двумя  
другими

Точка  $B$  лежит между  $A$  и  $C$

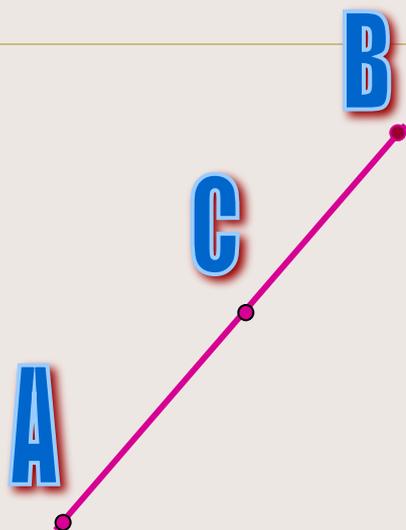
Точки  $A$  и  $C$  лежат по  
разные стороны от  $B$



Точки  $B$  и  $C$  лежат по  
одну сторону от  $A$



# Отрезок



Точки A и B - концы отрезка AB.

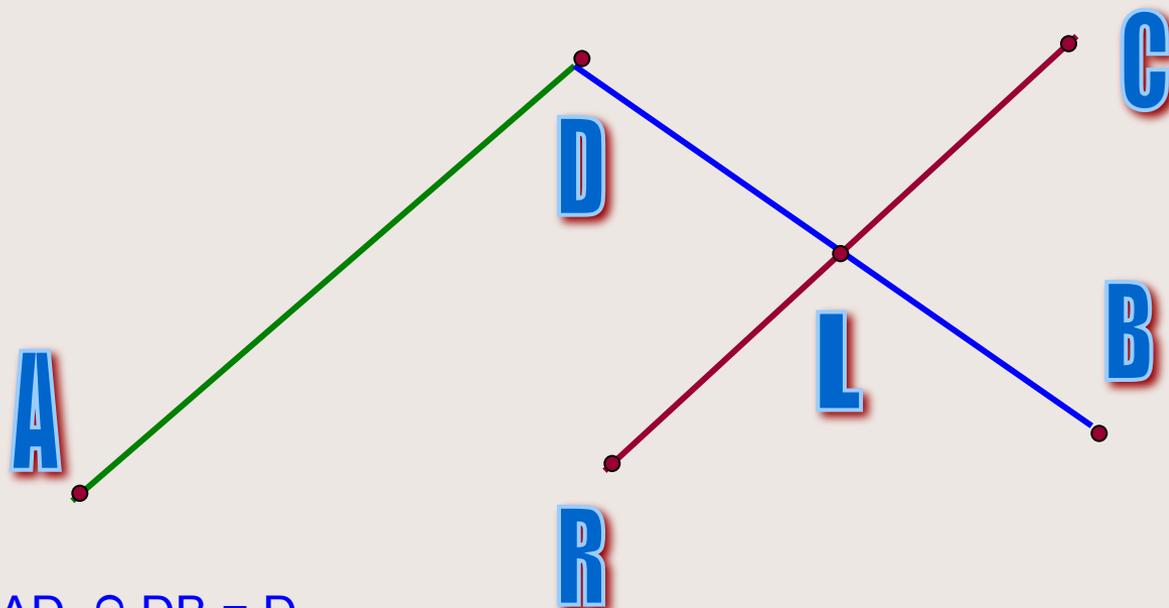
Точка C – внутренняя точка отрезка AB

$$AC + CB = AB$$

*Каждый отрезок имеет определённую длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.*



# Пересечение отрезков



$$AD \cap DB = D$$

$$AD \cap RC = \emptyset$$

$$RC \cap DB = L$$



## ОБРАЗЕЦ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Точки А, В и С лежат на одной прямой. Известно, что  $AB=6\text{см}$ ,  $AC=9\text{см}$ ,  $BC=3\text{ см}$ . Какая из этих точек лежит между двумя другими?

*Дано:*  $A, B, C \in a$ .  $AB=6\text{см}$ ,  $AC=9\text{см}$ ,  $BC=3\text{ см}$ .

*Решение:*

$AB+AC=BC$  (аксиома 3).  $6+9 \neq 3 \Rightarrow A$  не лежит между  $B$  и  $C$

$AC+BC=AB$  (аксиома 3).  $9+3 \neq 6 \Rightarrow C$  не лежит между  $B$  и  $A$

$AB+BC=AC$  (аксиома 3).  $6+3 = 9 \Rightarrow B$  лежит между  $A$  и  $C$

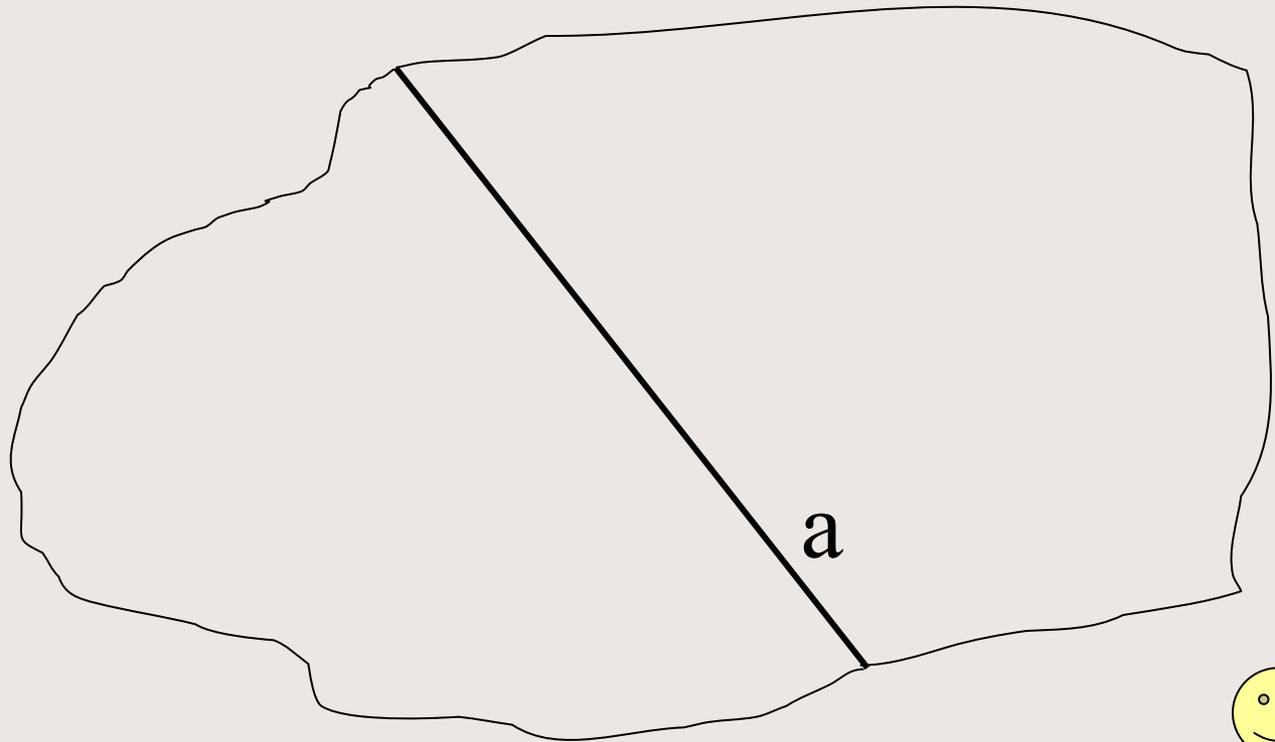
*Ответ:*  $B$  лежит между  $A$  и  $C$

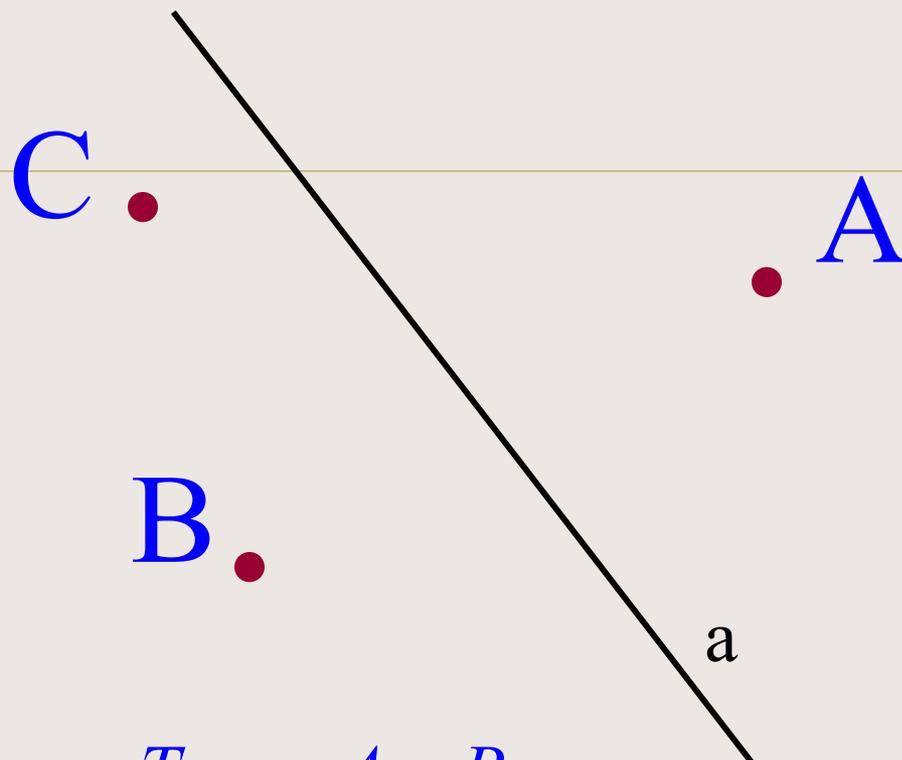


Полуплоскость, луч, угол.



*Прямая разбивает  
плоскость на две  
полуплоскости.*

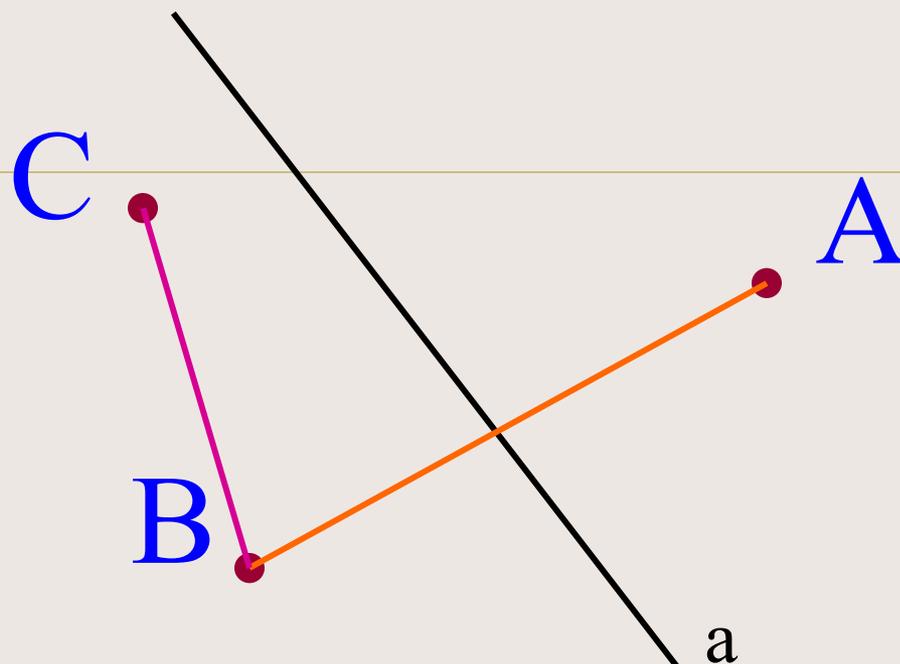




*Точки A и B лежат в разных  
полуплоскостях*

*Точки B и C лежат в одной полуплоскости*





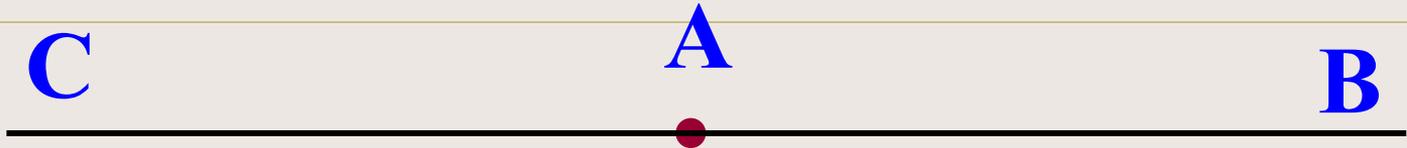
*Точки A и B лежат по разные стороны от прямой a.  $\Rightarrow$   
Отрезок AB пересекает прямую a.*

*Точки B и C лежат по одну сторону от прямой a.  $\Rightarrow$   
Отрезок BC не пересекает прямую a.*

*Пересекает ли отрезок AC прямую a. Почему? Ответ  
обоснуй письменно в тетради.*



# Луч



*Луч AC-*

*Луч AB-*

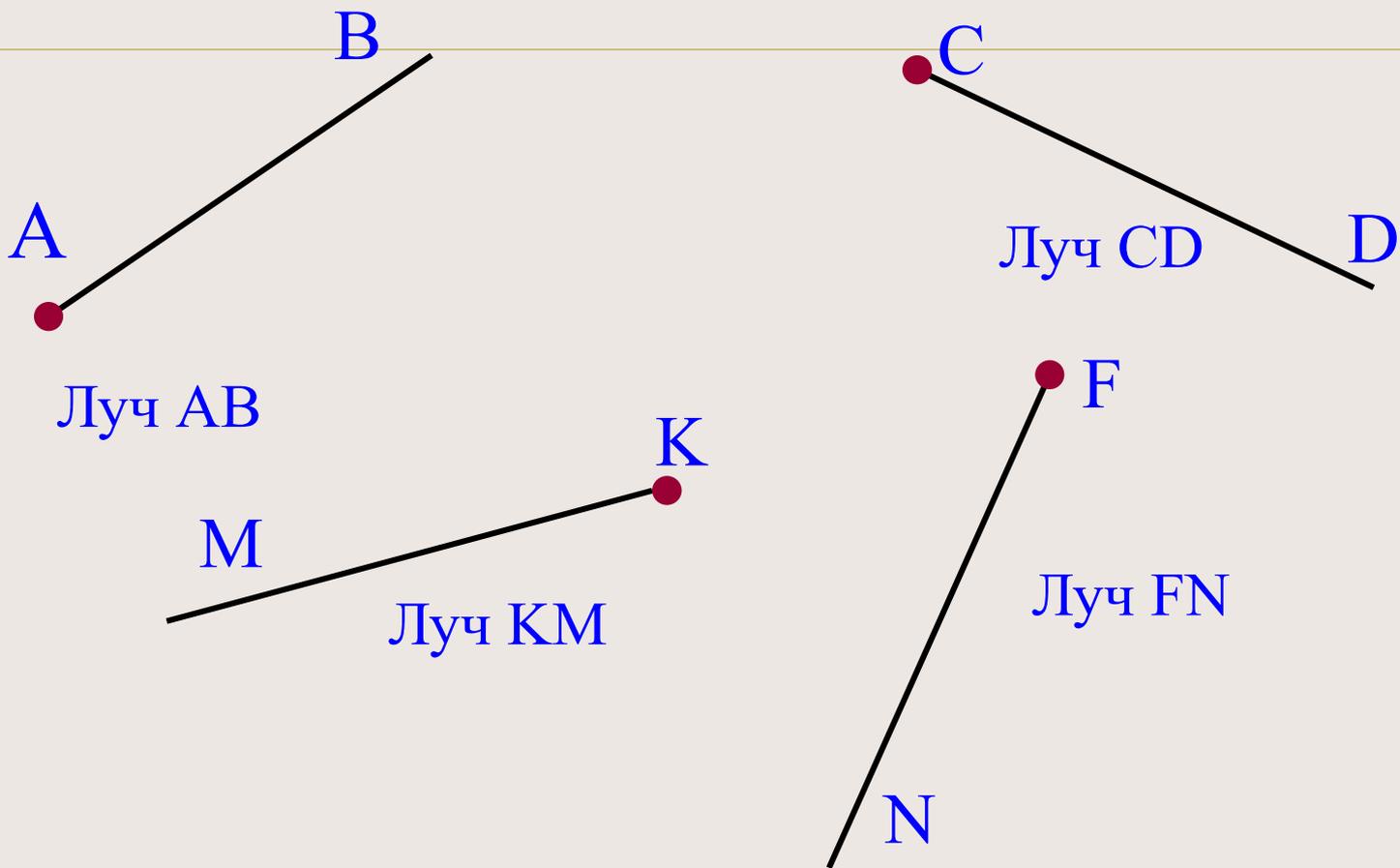
*A- начало луча*

*A- начало луча*

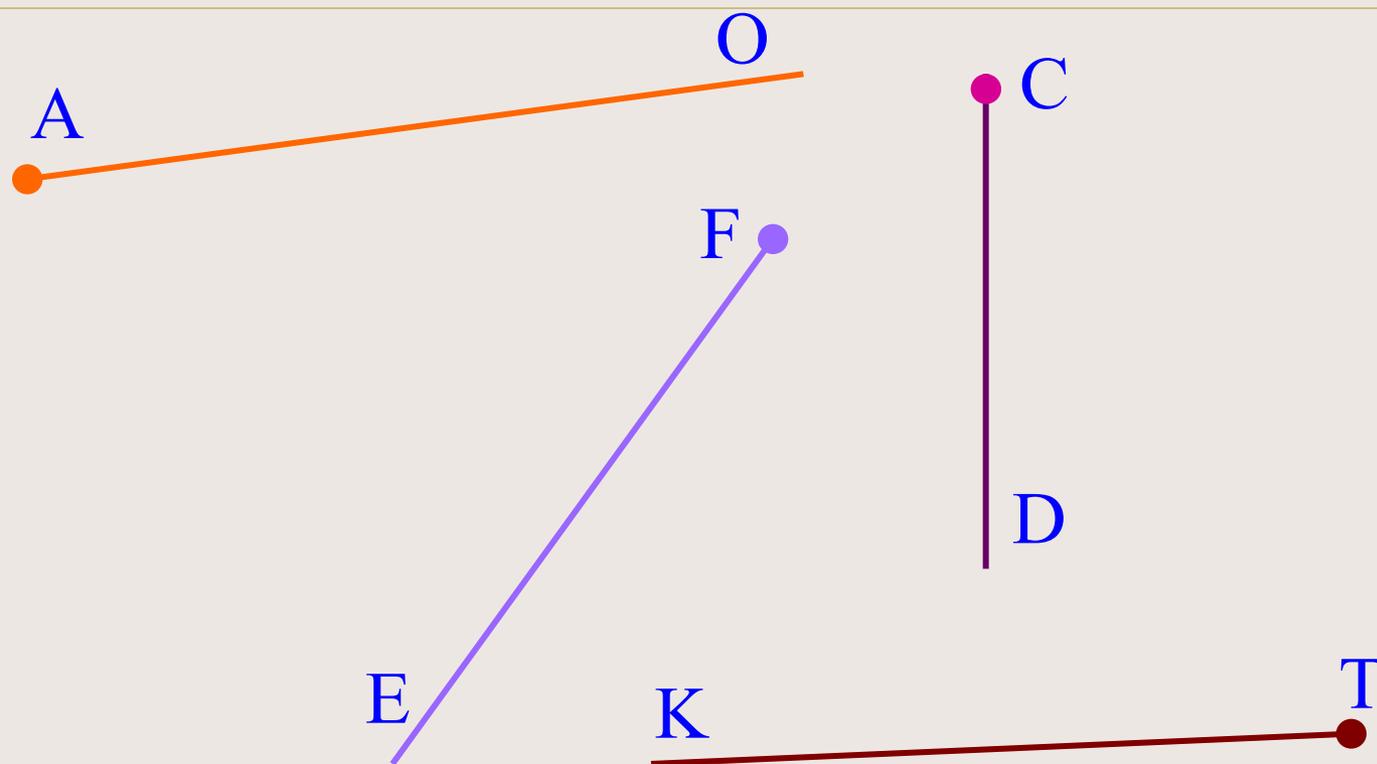
*Точка разбивает прямую на две части-  
каждая из которых называется лучом.*



# Лучи



# Назови изображенные лучи

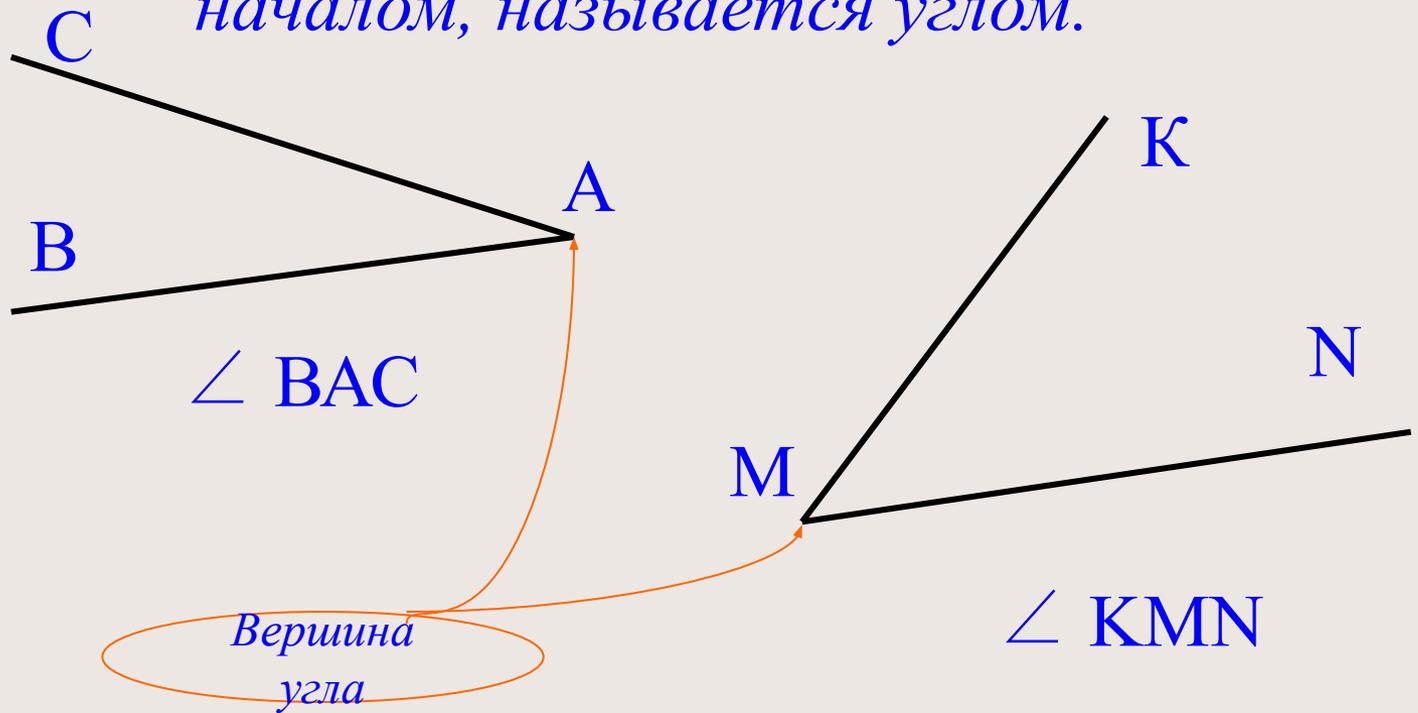


*Сделай в тетради такой же рисунок и  
запиши названия лучей в тетрадь*

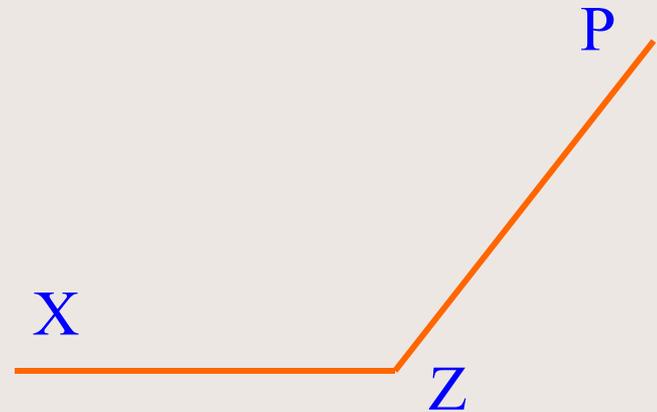
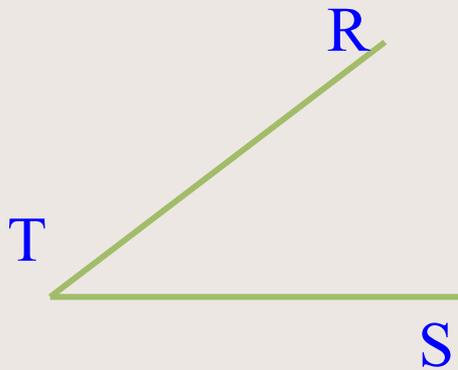
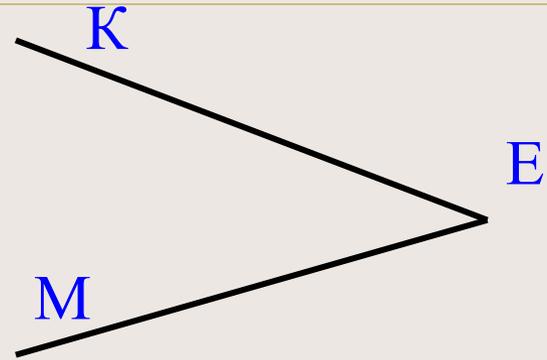
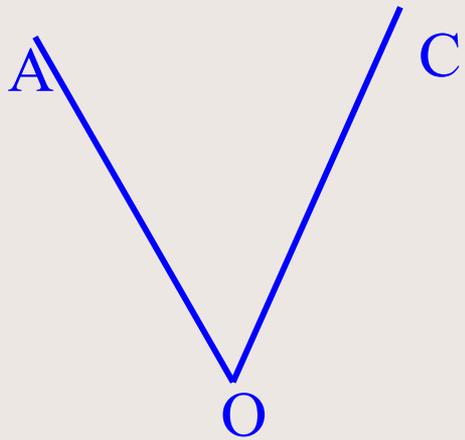


# УГОЛ

Фигура, состоящая из двух лучей с общим началом, называется углом.



*Запиши в тетрадь углы, изображенные на рисунке:*



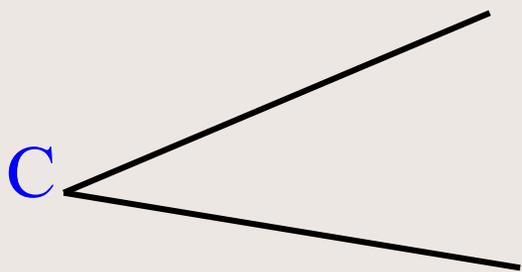
# Виды углов

*Развёрнутый угол*



$$\angle A = 180^\circ$$

*Острый угол*



$$\angle C < 90^\circ$$

*Прямой угол*



$$\angle B = 90^\circ$$

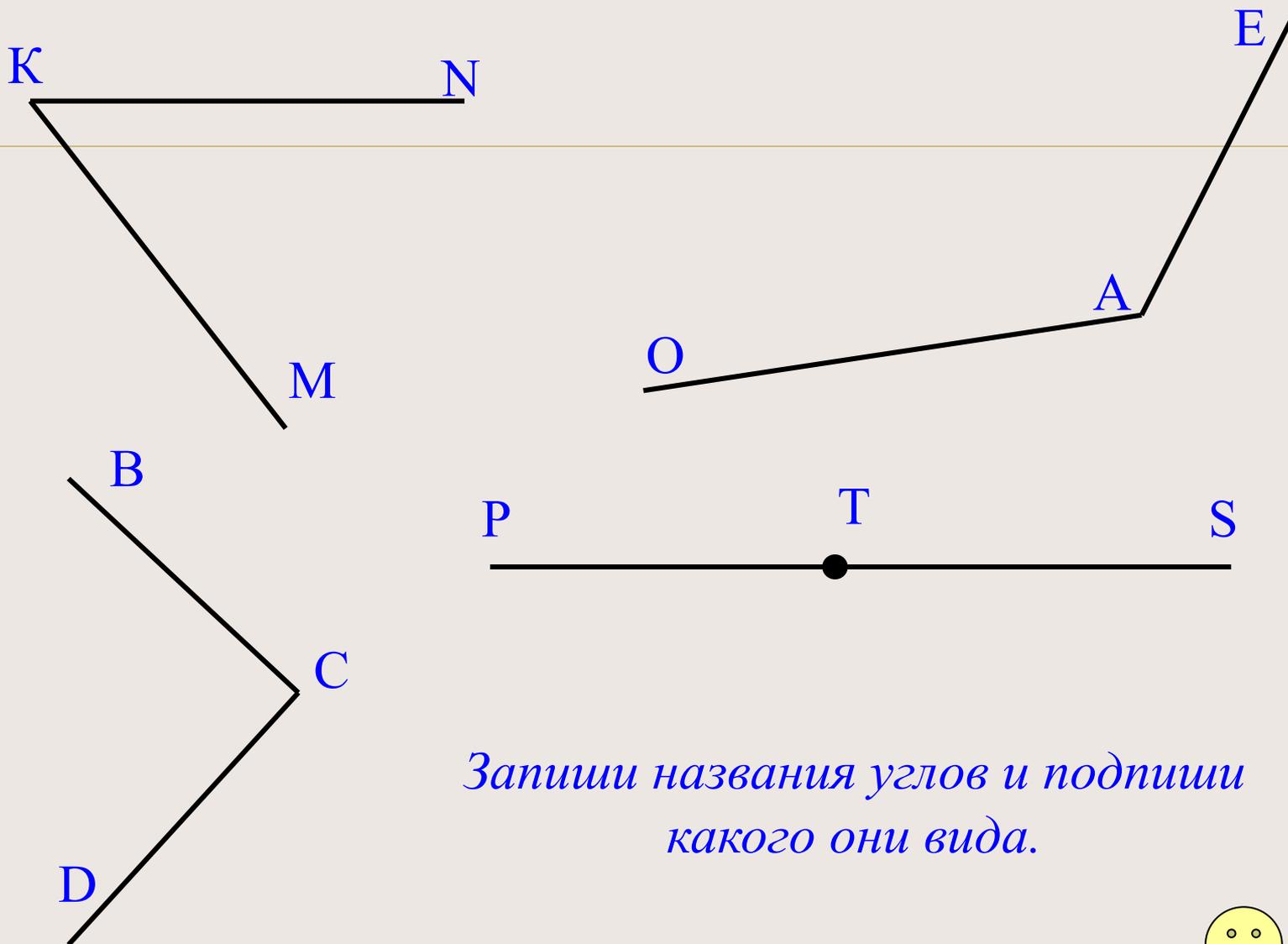
*Тупой угол*



$$90^\circ < \angle E < 180^\circ$$



*Сделай в тетради такой же рисунок:*



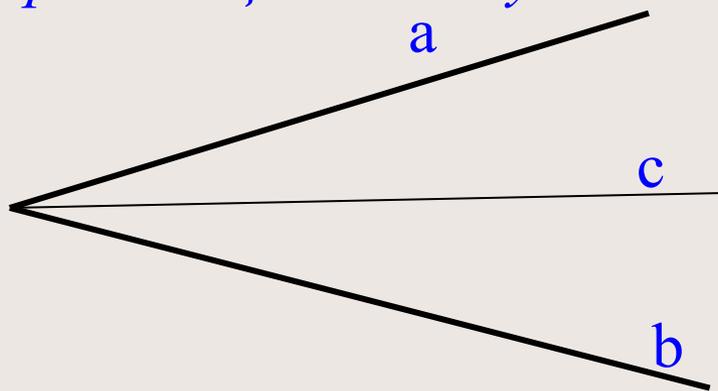
*Запиши названия углов и подпиши  
какого они вида.*



# Основные свойства измерения углов

*Каждый угол имеет определённую градусную меру, большую нуля. Развёрнутый угол равен  $180^\circ$ .*

*Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.*



Луч  $c$  проходит между сторонами угла  $(ab)$ .

$$\angle (ab) = \angle (ac) + \angle (bc).$$



# Теоремы и аксиомы.

*Аксиомой называется утверждение,  
не требующее доказательства.*

*Теоремой называется  
утверждение, которое  
необходимо доказывать.*



## Задача

Между сторонами угла (ab), равного  $80^\circ$ , проходит луч c. Найти углы (ac) и (bc), если угол (ac) в 4 раза больше угла (bc).

Дано:  $\angle(ac) > \angle(bc)$  в 4  
раза.

Найти:  $\angle(ac)$ ,  $\angle(bc)$ .

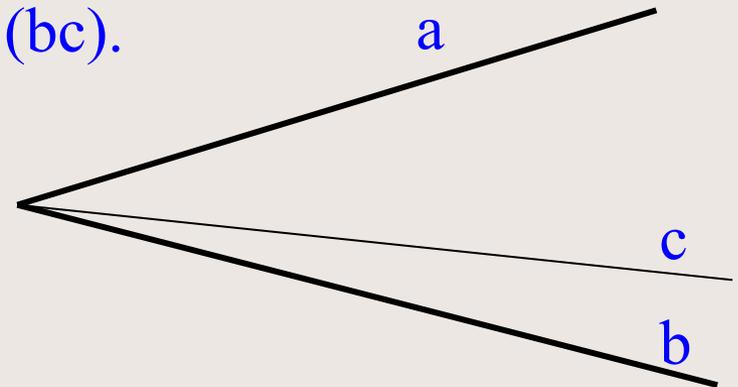
Решение:  $\angle(ac) + \angle(bc) = \angle$   
(ab);

$$\angle(bc) = x, \quad \angle(ac) = 4x;$$

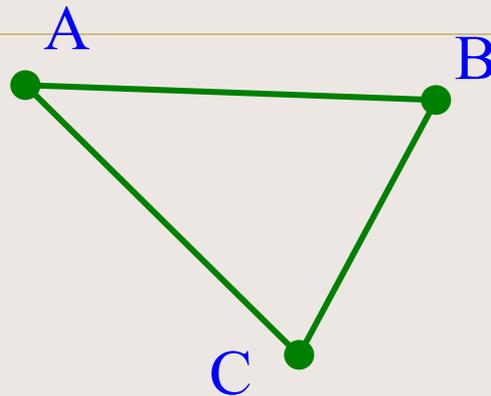
$$x + 4x = 80^\circ \Rightarrow 5x = 80^\circ \Rightarrow x = 80^\circ : 5 = 16^\circ \Rightarrow$$

$$\angle(bc) = 16^\circ; \quad \angle(ac) = 4 \cdot 16^\circ =$$

Ответ:  $16^\circ$  и  $64^\circ$ .



# Треугольники



$\triangle ABC$  :

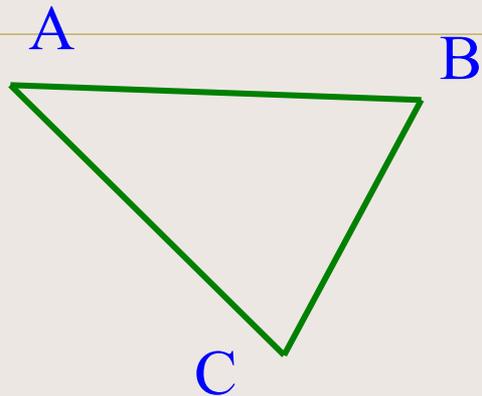
*Точки A, B и C – вершины, а отрезки AB, AC и BC – стороны треугольника.*

*Отметим три точки, не лежащие на одной прямой.*

*Соединим их отрезками.*

*Получим фигуру, которая называется треугольником.*

# Периметр треугольника

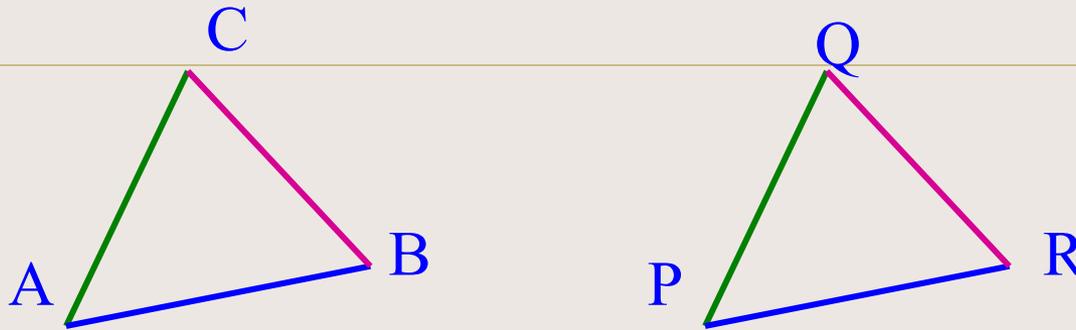


*Сумма длин трех сторон треугольника называется его периметром.*

$$P = AB + AC + BC$$



# Равенство треугольников



*Треугольники называются равными, если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны.*

$$\triangle ABC = \triangle PQR \Rightarrow AB=PR, BC=RQ, AC=PQ; \\ \angle A=\angle P, \angle B=\angle R, \angle C=\angle Q.$$



1.  $\triangle ABC = \triangle NMK$ ,  $AB=3$ ;  $BC=6$ ;  $AC=8$ .

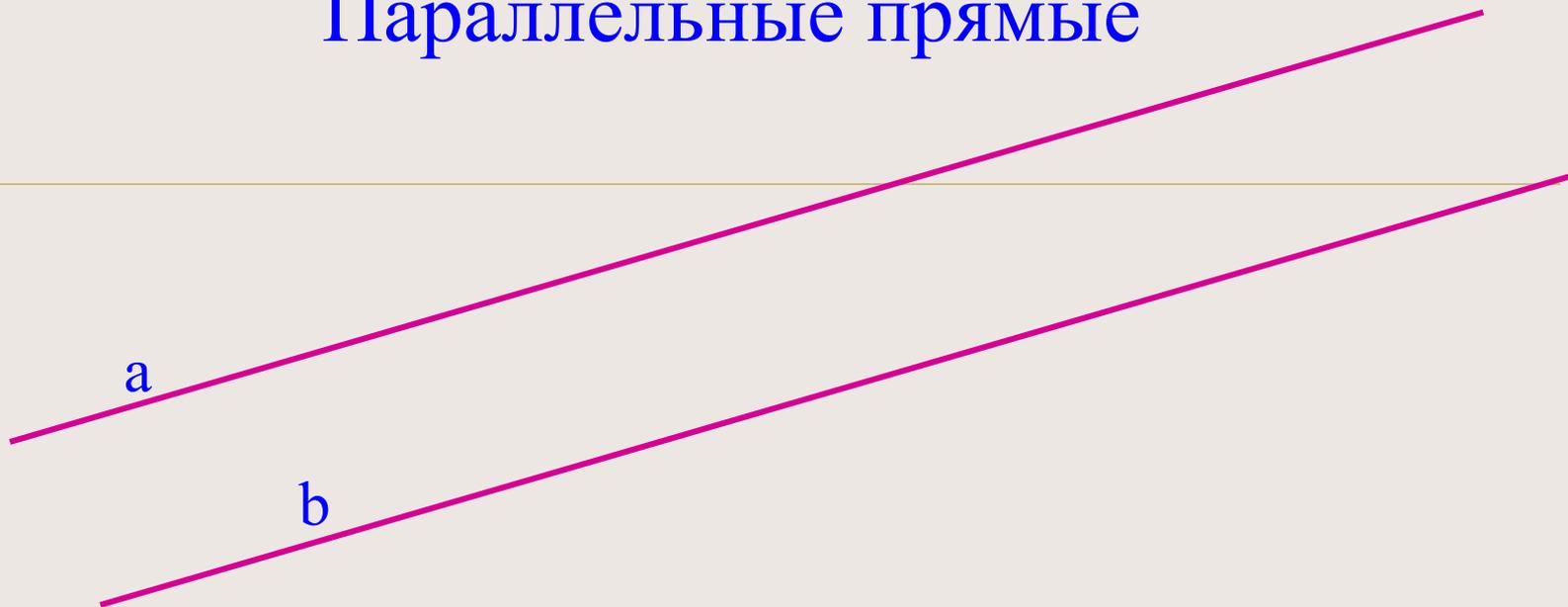
Найдите стороны  $\triangle NMK$ .

2.  $\triangle ABC = \triangle DFE$ ,  $\angle A=30^\circ$ ,  $\angle F=85^\circ$ ,  $\angle C=65^\circ$ .

Найдите остальные углы.

1  $NM=3$ ;  $MK=6$ ;  $NK=8$

# Параллельные прямые

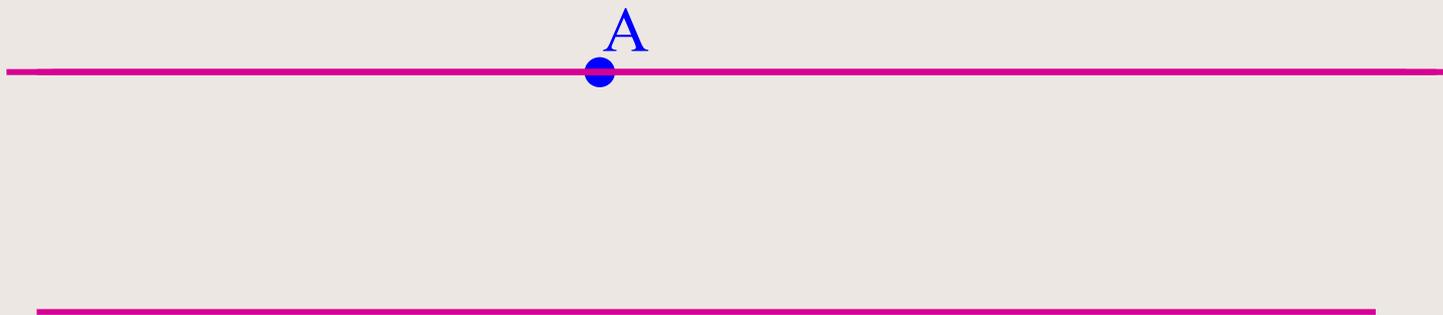


*Две прямые называются **параллельными**,  
если они не пересекаются.*

$$a \parallel b$$



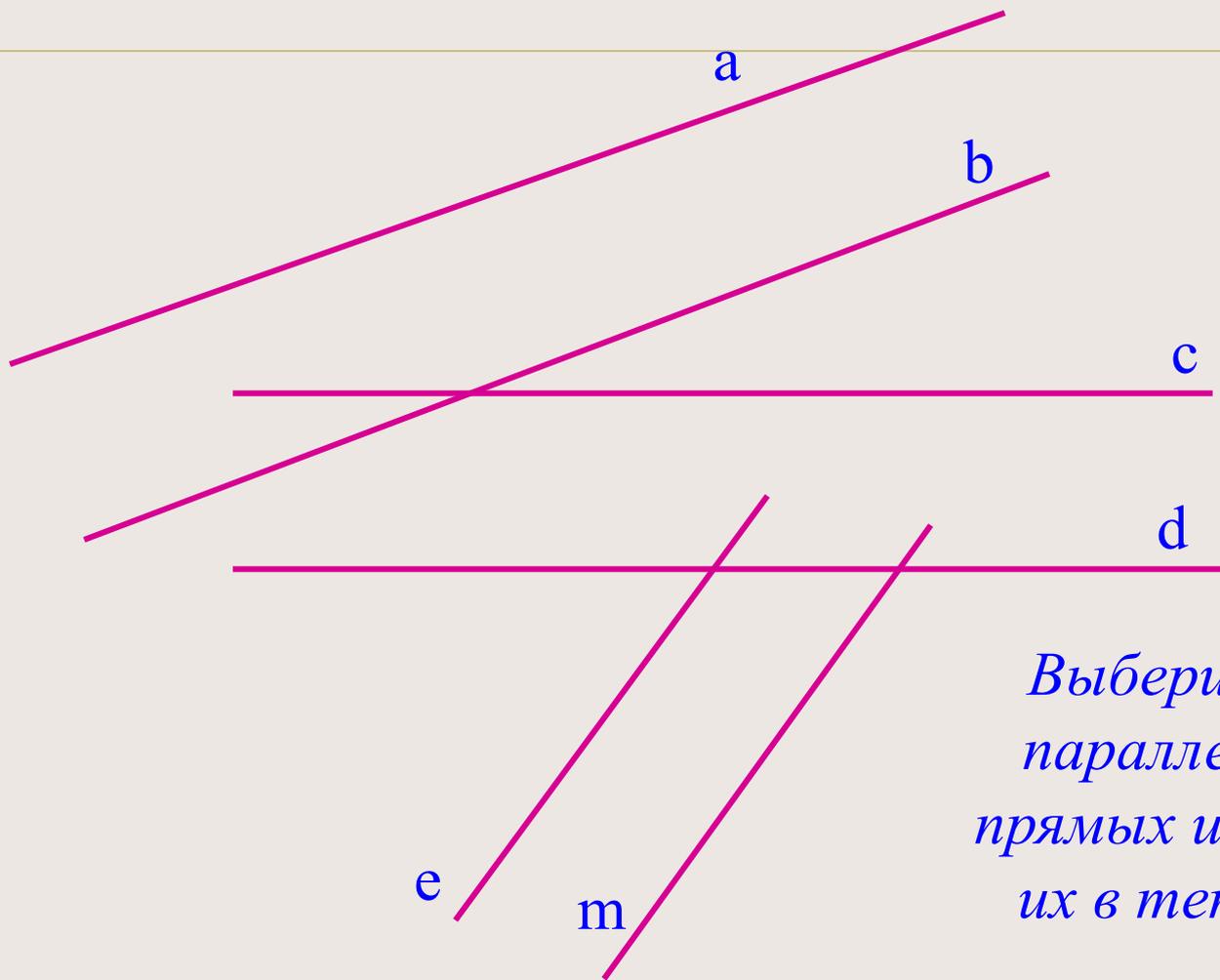
# Аксиома параллельных прямых



*Через точку, не лежащую на данной прямой,  
можно провести не более одной прямой,  
параллельной данной.*



# Задача



*Выбери пары  
параллельных  
прямых и запиши  
их в тетрадь.*



Проверь: правильно ли записаны пары параллельных прямых.

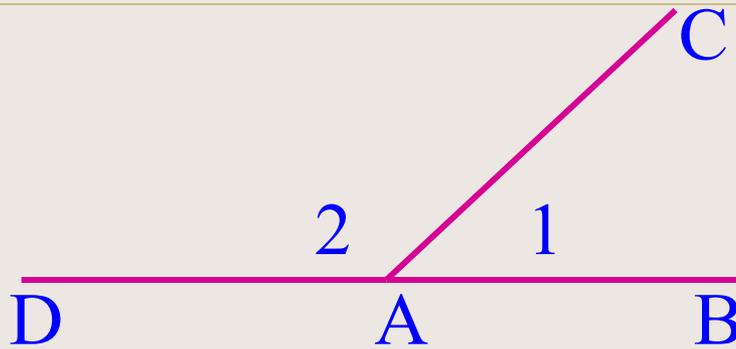
$$a \parallel b ;$$

$$c \parallel d ;$$

$$e \parallel m .$$

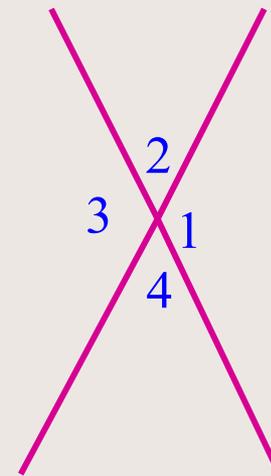


# Смежные и вертикальные углы



*Два угла называются смежными, если у них одна сторона общая, а две другие – дополнительные полупрямые.*

*Углы 1 и 2 – смежные.  
AC – общая сторона,  
AB и AD -  
дополнительные лучи.*

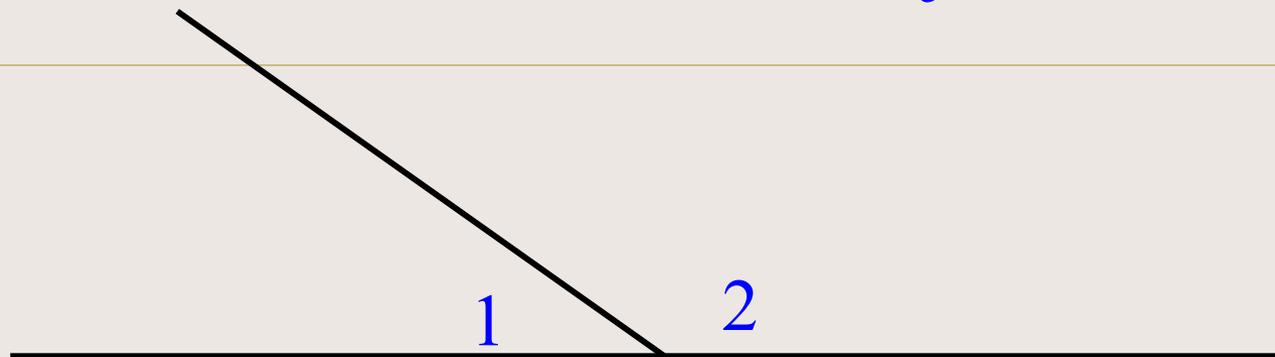


*Два угла называются вертикальными, если их стороны – дополнительные полупрямые.*

*Углы 1 и 3; 2 и 4 -  
вертикальные  
Стороны углов –  
дополнительные лучи*



# Свойство смежных углов



*Сумма смежных углов равна  $180^\circ$ .*

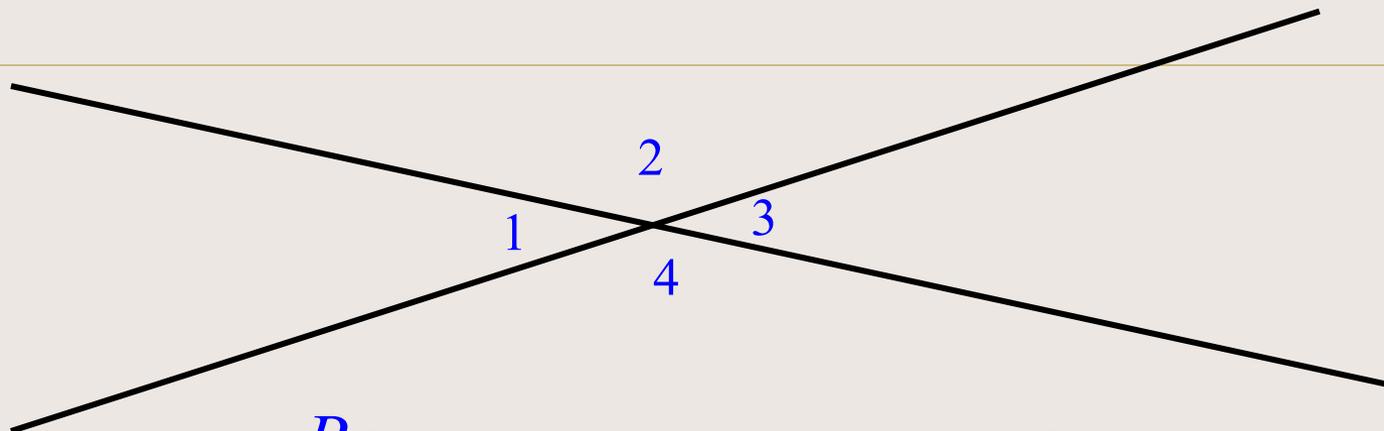
$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ,$$

$$\angle 1 = 180^\circ - \angle 2,$$

$$\angle 2 = 180^\circ - \angle 1.$$



# Свойство вертикальных углов

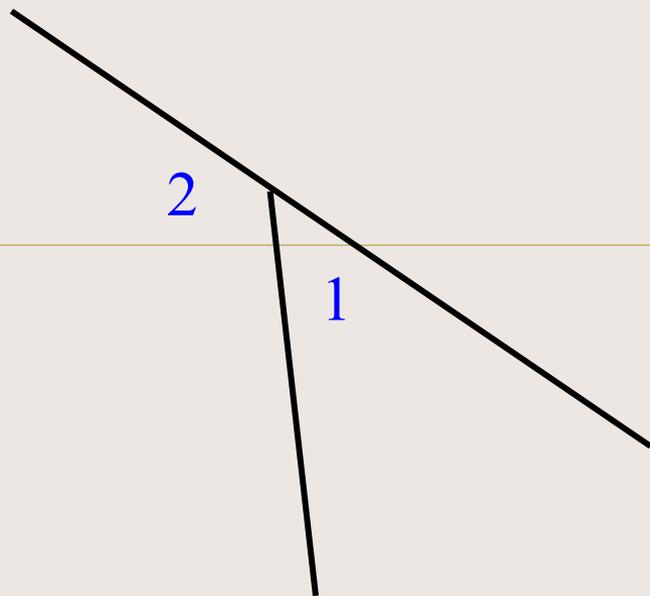


*Вертикальные углы равны*

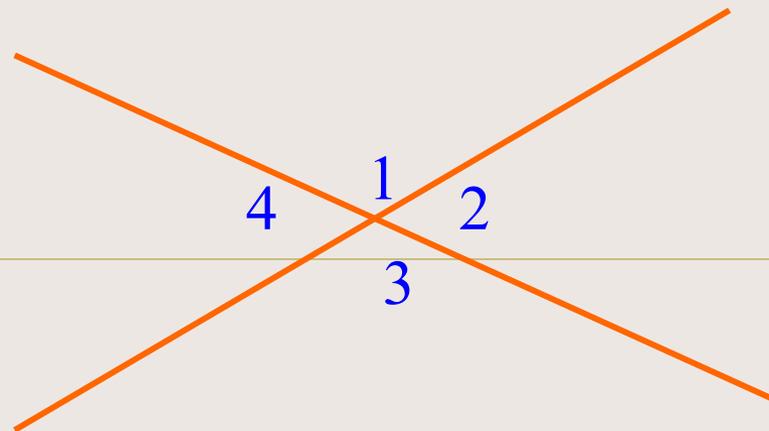
$$\angle 1 = \angle 3$$

$$\angle 2 = \angle 4$$





*Сделай в тетради  
такой же рисунок.  
Запиши как называются  
углы 1 и 2.  
Запиши их свойство*



*Сделай в тетради  
такой же рисунок.  
Запиши как называются  
углы 1 и 3.  
Запиши их свойство*



*Подсказка*

# Задачи

1. Один из смежных углов равен  $58^\circ$ . Найти второй угол.

$58^\circ$  меньше  $90^\circ$ , поэтому на рисунке таким углом может быть угол 1.

Дано:  $\angle 1$ ,  $\angle 2$ -смежные,  $\angle 1 = 58^\circ$

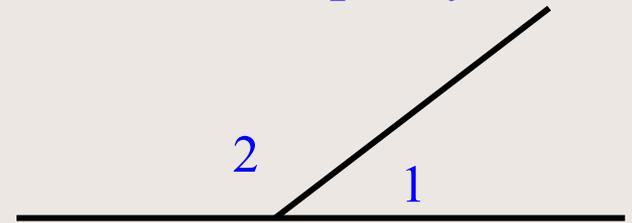
Найти:  $\angle 2$ .

Решение:

$$\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ (\text{смеж. углы}) \Rightarrow \angle 2 = 180^\circ - \angle 1.$$

Значит,  $\angle 2 = 180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$ .

Ответ:  $\angle 2 = 122^\circ$ .



# Задачи

2. Один из смежных углов на  $20^\circ$  больше другого. Найти эти углы.

Дано:  $\angle 1$ ,  $\angle 2$ -

смежные  
 $\angle 2$  на  $20^\circ > \angle 1$ .

Найти:  $\angle 1$ ,  $\angle 2$ .

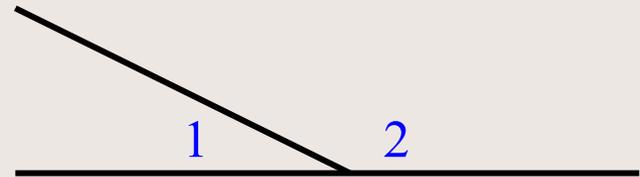
Решение:  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  (смеж. углы).

Пусть  $\angle 1 = x$ , тогда  $\angle 2 = x + 20^\circ$ .

$$x + x + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x + 20^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 180^\circ - 20^\circ \Rightarrow$$

$$2x = 160^\circ \Rightarrow x = 160^\circ : 2 = 80^\circ. \angle 1 = 80^\circ, \angle 2 = 80^\circ + 20^\circ = 100^\circ.$$

Ответ:  $80^\circ$  и  $100^\circ$ .



# Задачи

3. Найти смежные углы, если известно, что они относятся как 2 : 3.

Дано:  $\angle 1$ ,  $\angle 2$ -

смежные.  $2 = 2 : 3$ .

Найти:  $\angle 1$ ,  $\angle 2$ .

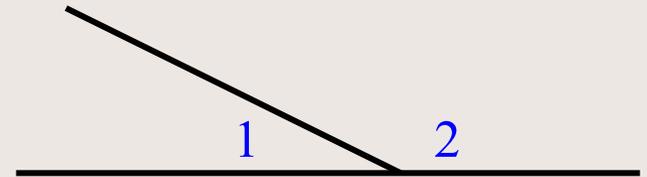
Решение:  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  (смеж. углы).

Пусть  $\angle 1 = 2x$ , тогда  $\angle 2 = 3x$ .

$$2x + 3x = 180^\circ \Rightarrow 5x = 180^\circ \Rightarrow x = 180^\circ : 5 = 36^\circ$$

$$\angle 1 = 2 \cdot 36^\circ = 72^\circ, \angle 2 = 3 \cdot 36^\circ = 108^\circ.$$

Ответ:  $36^\circ$  и  $108^\circ$ .



# Задачи

4. Один из углов, которые получаются при пересечении двух прямых, равен  $125^\circ$ . Найти остальные углы.

Дано:  $\angle 2 = 125^\circ$ .

Найти:  $\angle 1$ ,  $\angle 3$ ,  $\angle 4$

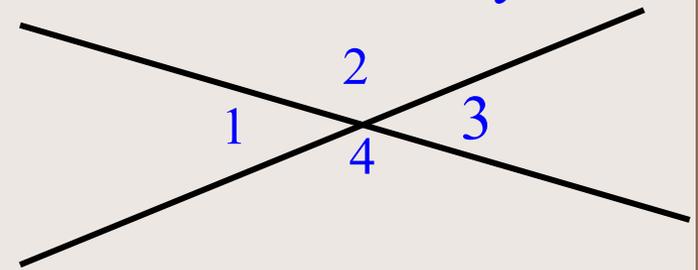
Решение:  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  (смеж. углы).

$$\angle 1 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 125^\circ = 55^\circ.$$

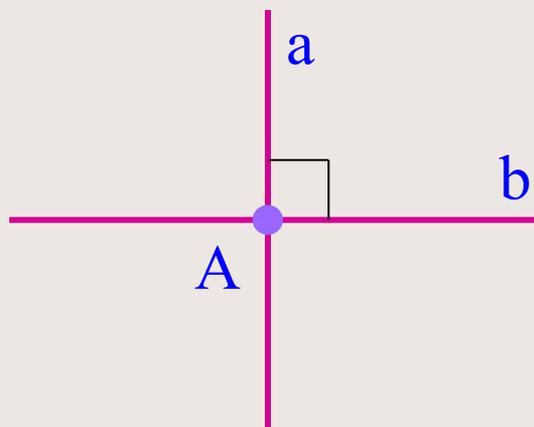
$$\angle 3 = \angle 1, \quad \angle 4 = \angle 2 \text{ (вертикальные)}$$

$$\Rightarrow \angle 3 = 55^\circ, \quad \angle 4 = 125^\circ.$$

Ответ:  $\angle 1 = \angle 3 = 55^\circ$ ,  $\angle 4 = 125^\circ$ .



# Перпендикулярные прямые



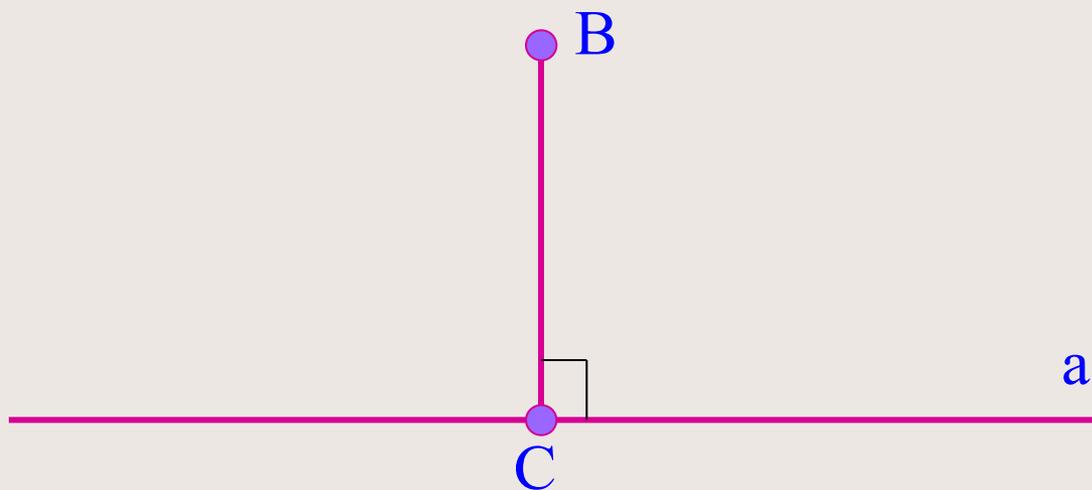
$$\angle A = 90^\circ$$

$$a \perp b$$

*Две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.*



# Перпендикуляр



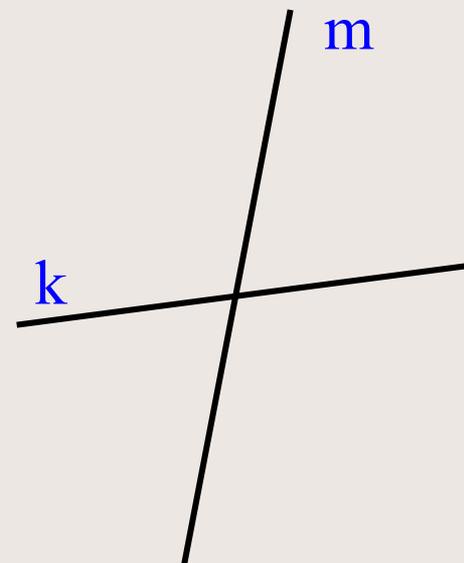
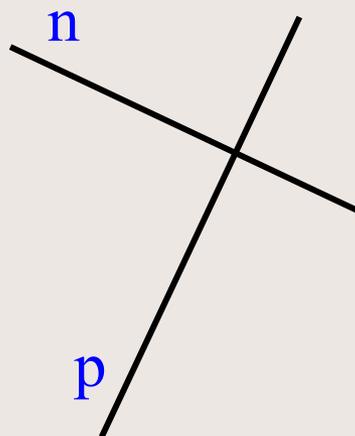
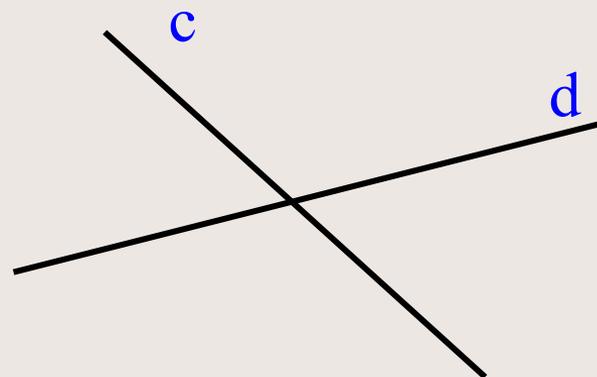
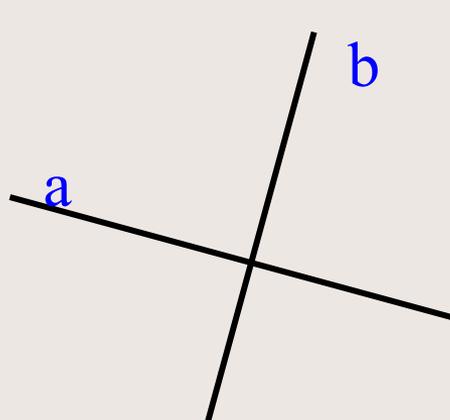
*Перпендикуляром называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, который имеет одним из своих концов точку пересечения прямых.*

*Отрезок  $BC$  – перпендикуляр.*

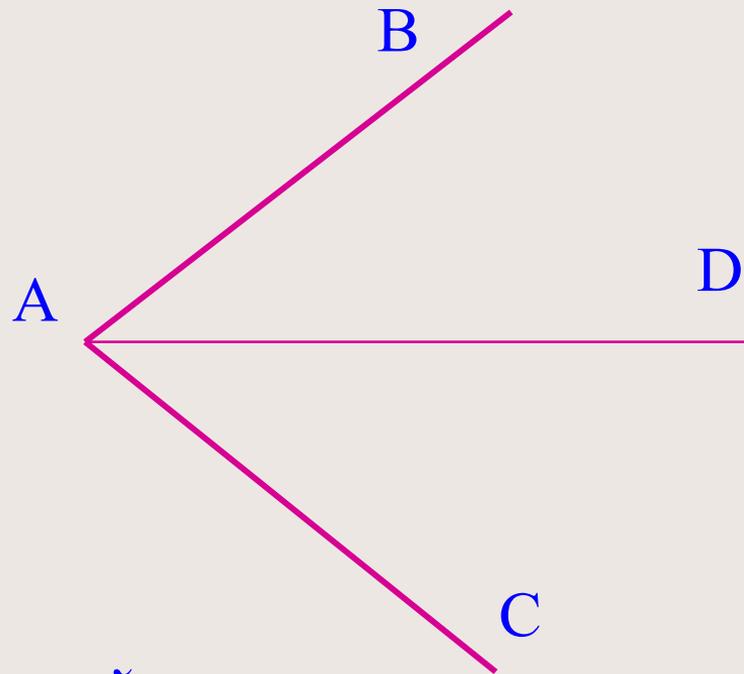
*Точка  $C$  – основание перпендикуляра.*



Найди перпендикулярные прямые  
и запиши их в тетрадь:



# Биссектриса угла



*AD- биссектриса*

$$\angle BAD = \angle CAD$$

$$\angle BAC = 2 \cdot \angle BAD$$

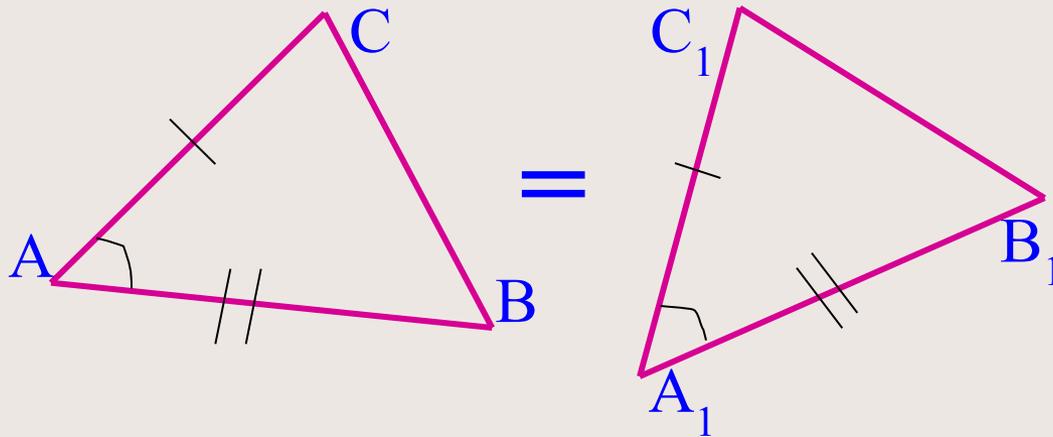
$$\angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC$$

*Биссектрисой* угла называется луч, который исходит из вершины угла, проходит между его сторонами и делит угол пополам.



# 1-ый и 2-ой признаки равенства треугольников

*Первый признак равенства треугольников (По двум сторонам и углу между ними):*



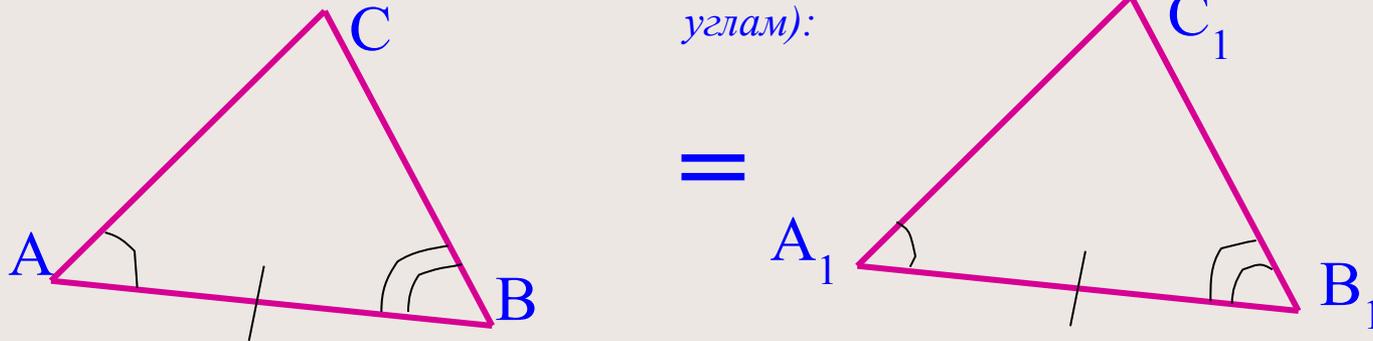
*Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.*

$$AB = A_1B_1, AC = A_1C_1, \angle A = \angle A_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$



# 1-ый и 2-ой признаки равенства треугольников

*Второй признак равенства треугольников (По стороне и двум прилежащим к ней углам):*

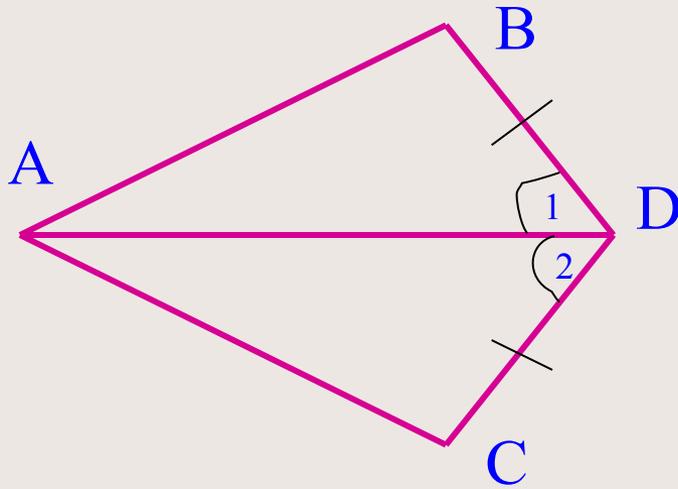


*Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны соответственно стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

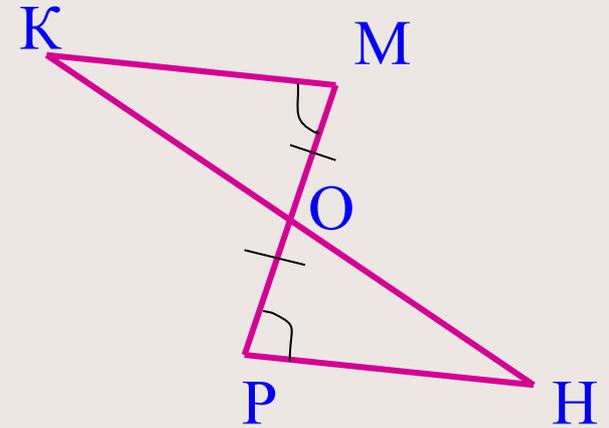
$$AB=A_1B_1, \angle A=\angle A_1, \angle B=\angle B_1 \Rightarrow \triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$$



# Задачи



*Почему равны треугольники  
 $ADB$  и  $ADC$ ?*



*Почему равны треугольники  
 $OMK$  и  $OPH$ ?*

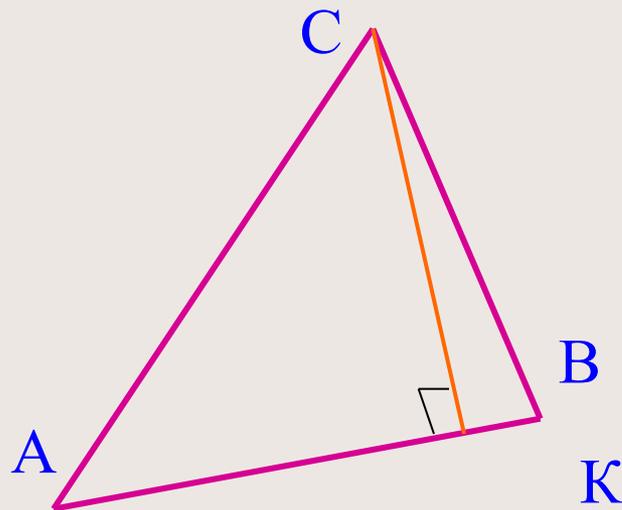
Какой признак равенства треугольников здесь  
используется?

Сделай соответствующие записи в тетрадь.

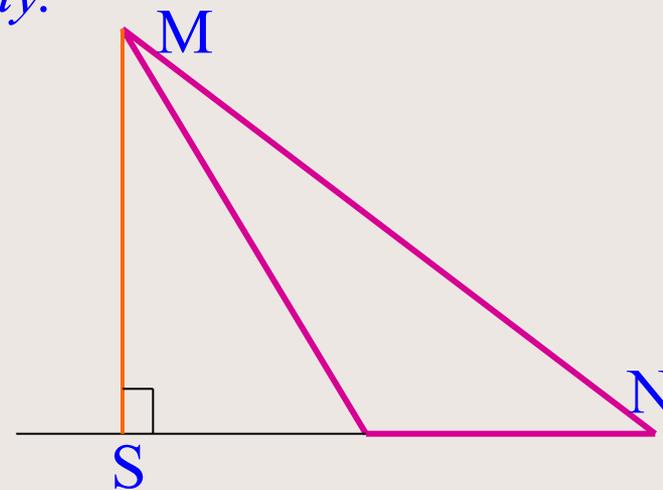


# Высота, медиана и биссектриса треугольника

*Высотой* треугольника, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведённый из данной вершины к прямой, проходящей через противоположную сторону.



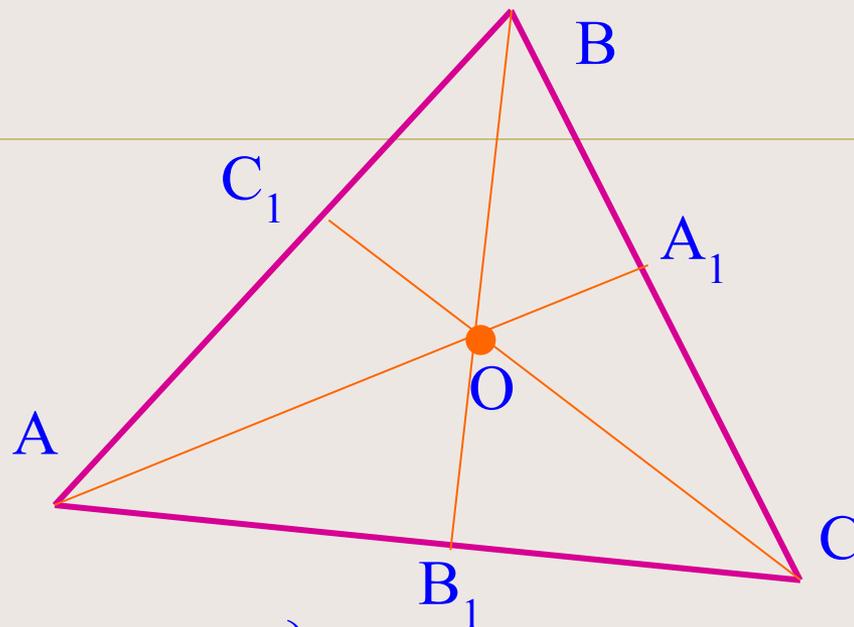
*CK – высота  
треугольника ABC*



*MS – высота  
треугольника PMN*



*У любого треугольника – три высоты:*



*Высоты перпендикулярны прямым, содержащим противоположные стороны.*

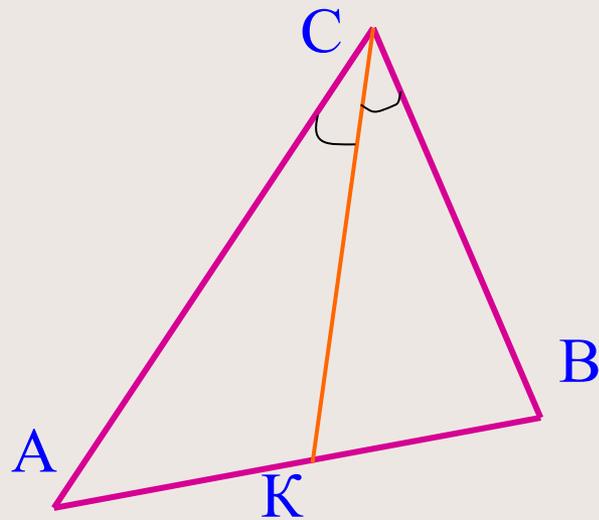
*Три высоты треугольника пересекаются в одной точке – в точке O.*

*Сделай в тетради такой же рисунок, запиши высоты треугольника ABC. Укажи прямые углы.*

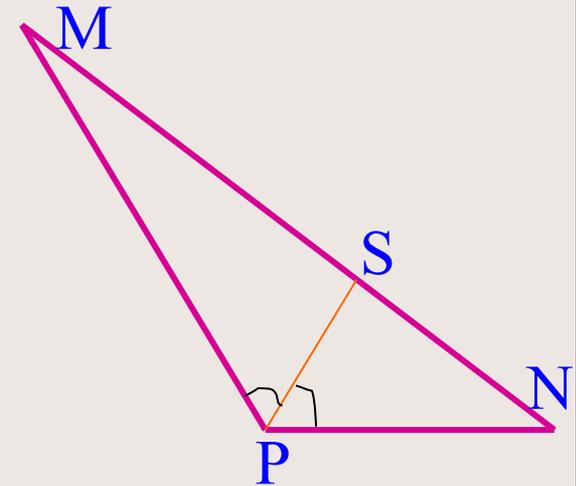


# Высота, медиана и биссектриса треугольника

*Биссектрисой* треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противоположной стороне.



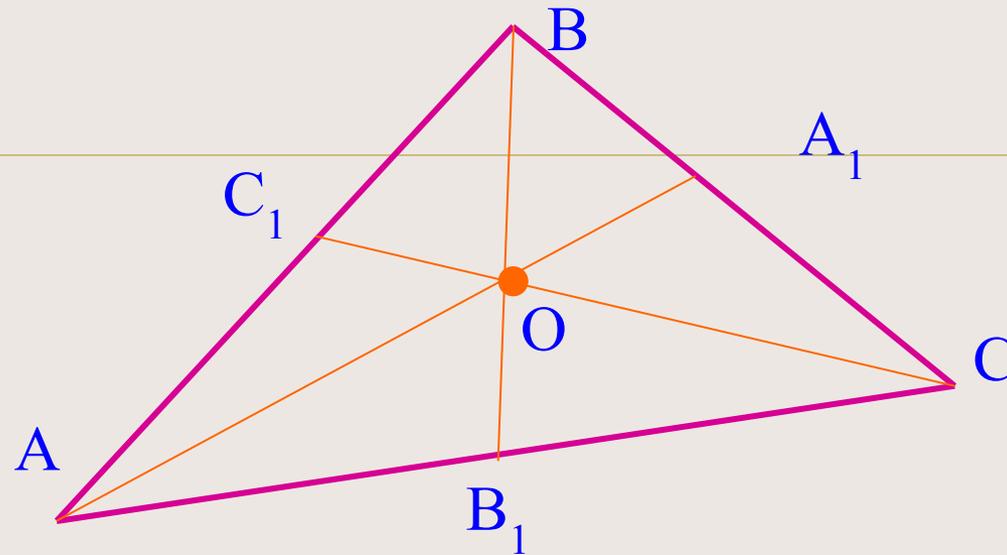
*CK – биссектриса  
треугольника ABC*



*MS – биссектриса  
треугольника PMN*



*У любого треугольника – три биссектрисы:*



***Биссектрисы делят углы треугольника пополам.***

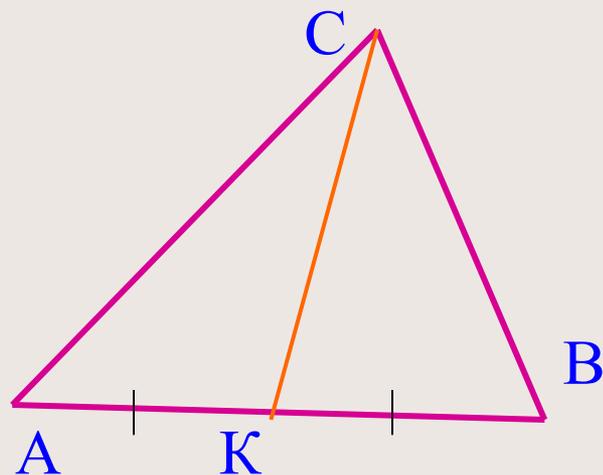
*Три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке – в точке O.*

*Сделай в тетради такой же рисунок, запиши биссектрисы треугольника ABC. Укажи равные углы.*

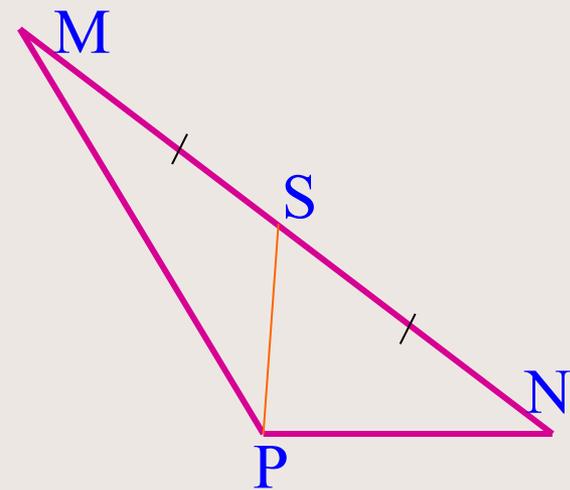


# Высота, медиана и биссектриса треугольника

*Медианой* треугольника, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противоположной стороны.



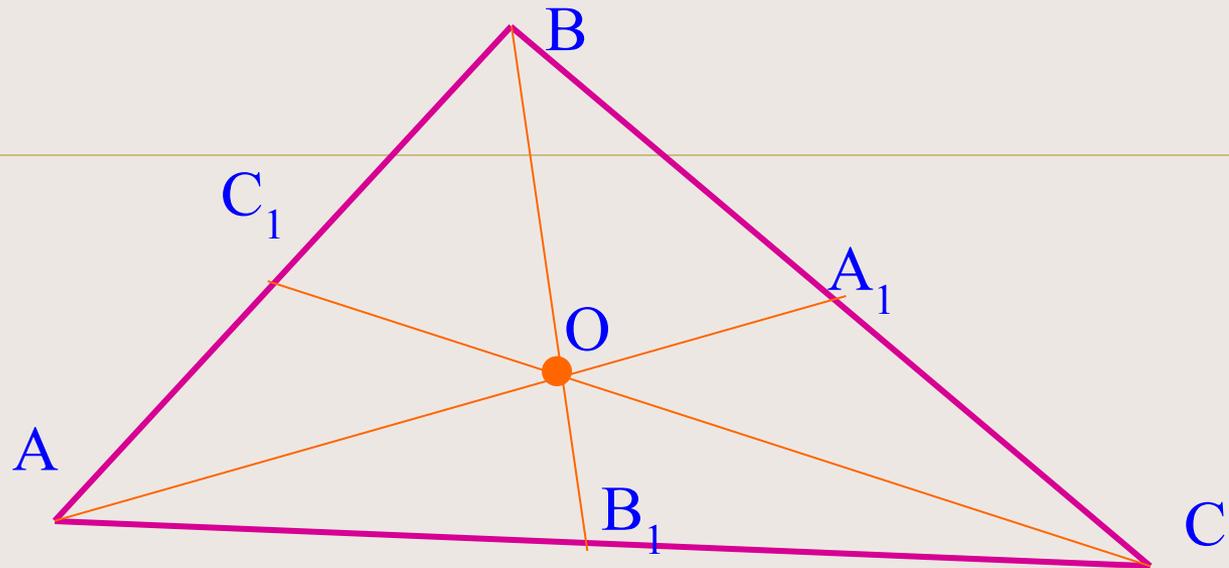
*CK – медиана  
треугольника ABC*



*MS – медиана  
треугольника PMN*



*У любого треугольника – три медианы:*



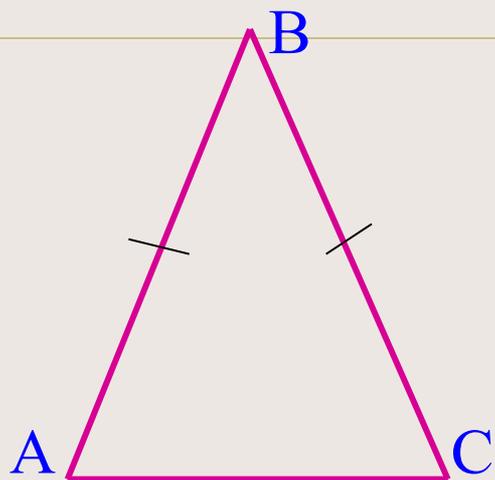
*Медианы делят противоположные стороны  
треугольника **пополам**.*

*Три медианы треугольника пересекаются в одной  
точке – в точке O.*

Сделай в тетради такой же рисунок, запиши медианы  
треугольника ABC. Укажи равные отрезки.



# Равнобедренный треугольник



$$AB=BC$$

*AB и BC – боковые стороны.*

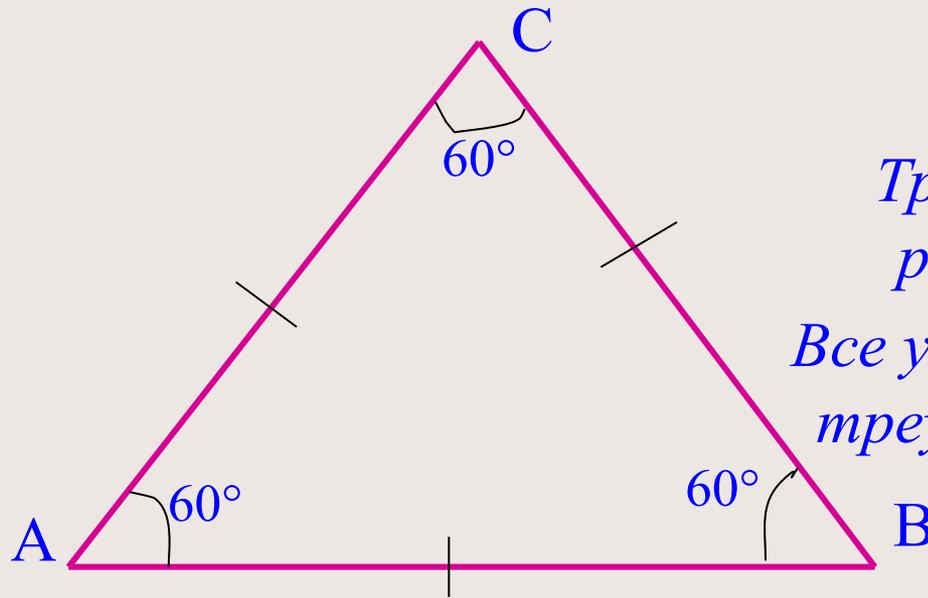
*AC – основание.*

*Треугольник называется **равнобедренным**, если у него две стороны равны.*

*Равные стороны называются **боковыми**, а третья сторона – **основанием**.*



# Равносторонний треугольник



$$AB=BC=AC \Rightarrow$$

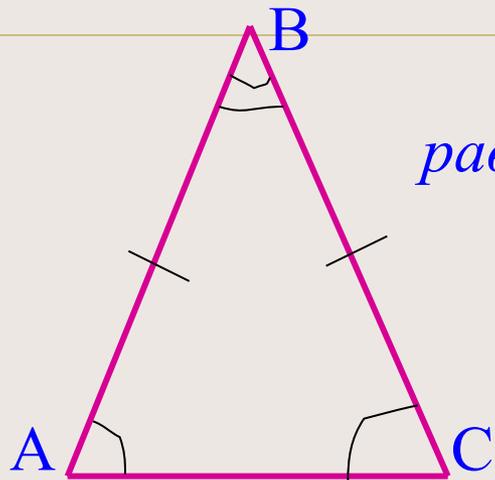
*Треугольник ABC -  
равносторонний*

*Все углы равностороннего  
треугольника равны 60°.*

*Треугольник, у которого все стороны равны,  
называется **равносторонним**.*



# Свойство углов равнобедренного треугольника



*Угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника называется углом при вершине.*

*$\angle B$  - угол при вершине.*

*Углы  $A$  и  $C$  называются углами при основании.*

*Углы при основании равнобедренного треугольника равны:  
 $\triangle ABC$  - равнобедренный  $\Rightarrow \angle A = \angle C$ .*

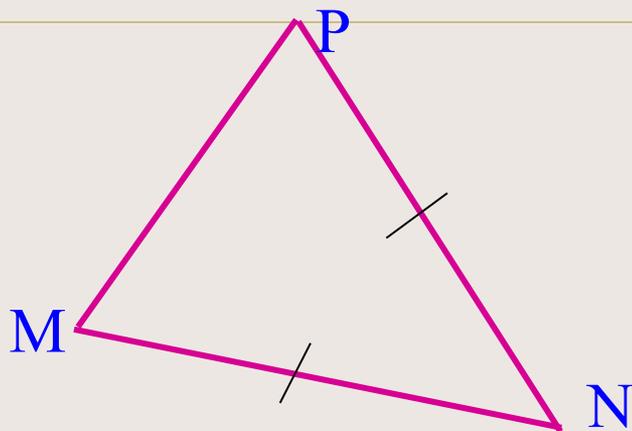
*Обратно: Если в треугольнике два угла равны,  
то такой треугольник равнобедренный.*

*$\angle A = \angle C$   $\triangle ABC$  - равнобедренный.*

*$\Rightarrow$*

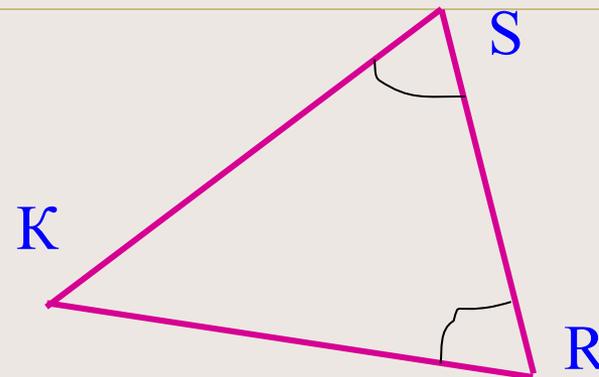


*Сделай в тетради такой же рисунок и ответь письменно на вопросы:*



*Если в  $\triangle MNP$   $MN=NP$ , то что можно сказать про углы M и P?*

*Почему?*

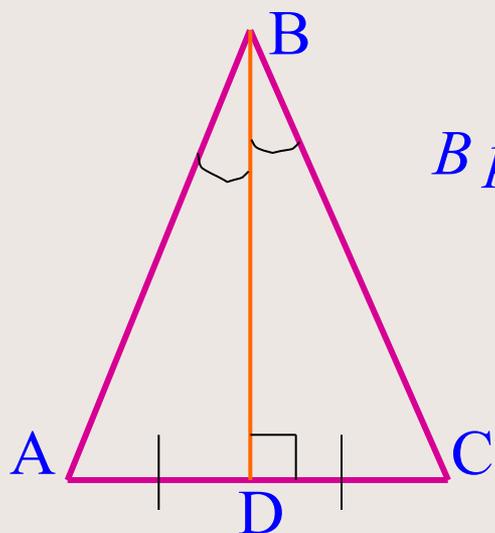


*Если в  $\triangle KRS$   $\angle S = \angle R$ , то что можно сказать про его стороны?*

*Почему?*



# Свойство медианы равнобедренного треугольника



*В равнобедренном треугольнике медиана,  
проведенная к основанию, является  
биссектрисой и высотой.*

$\triangle ABC$  – равнобедренный ( $AB=BC$ ),  $AD = CD$  ( $BD$ - медиана)  $\Rightarrow$   
 $\angle ABD = \angle CBD$ ,  $BD \perp AC$ .



## Образец решения задачи

1. Периметр равнобедренного треугольника равен 26 см.  
Найти боковые стороны, если основание равно 6 см.

Дано:  $\triangle ABC$  – равнобедр.,  $AC=BC$ ,  
 $P=26$  см,  $AB=6$  см.

Найти:  $AC$ ,  $BC$ .

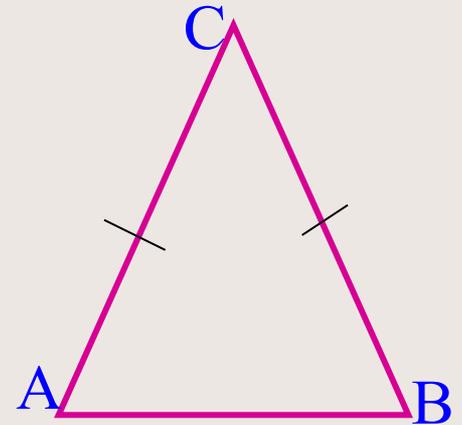
Решение:  $P=AB+AC+BC$ ,

$$AC=BC \Rightarrow$$

$$P=AB+2AC, \Rightarrow 2AC=P-AB=26-6=20, \Rightarrow$$

$$AC=20:2=10.$$

Ответ:  $AC=BC=10$  см.



## Образец решения задачи

2. В равнобедренном треугольнике боковая сторона на 3 см больше основания, а периметр равен 27 см. Найти стороны треугольника.

*Дано:*  $\triangle ABC$  – равнобедр.,  $AC=BC$ ,  
 $P=27$  см,  $AC > AB$  на 3 см.

*Найти:*  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ .

*Решение:*  $P=AB+AC+BC$ ,

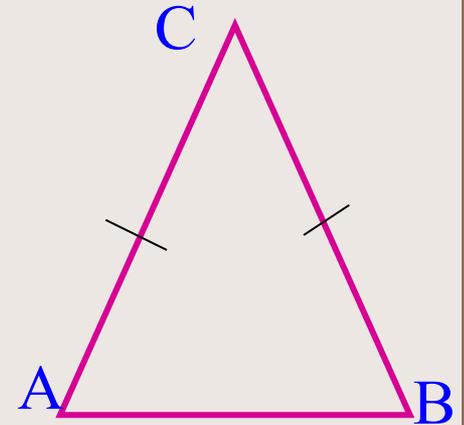
Пусть  $AB=x$ , тогда  $AC=BC=x+3$ .

*Составим уравнение:*

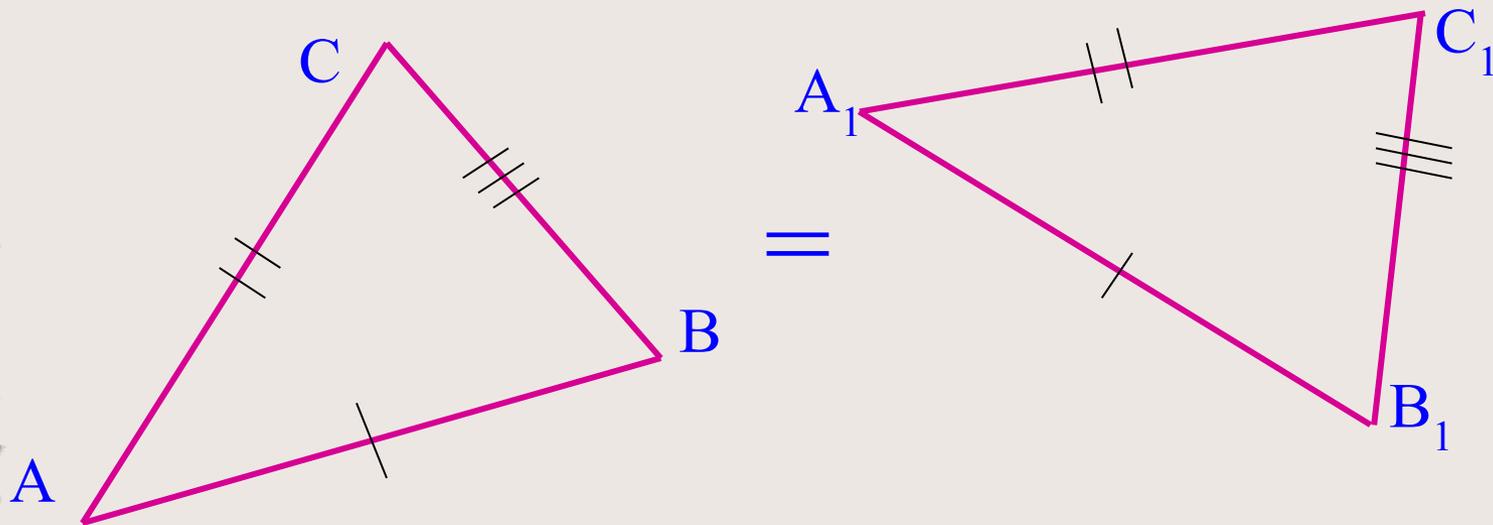
$$x+x+3+x+3=27 \Rightarrow 3x+6=27 \Rightarrow 3x=27-6=21 \Rightarrow$$

$$x=21 : 3 = 7 \Rightarrow AB=7 \text{ см}, AC=BC=7+3=10 \text{ см}.$$

*Ответ:*  $AB=7$  см,  $AC=BC=10$  м.



# 3-ий признак равенства треугольников



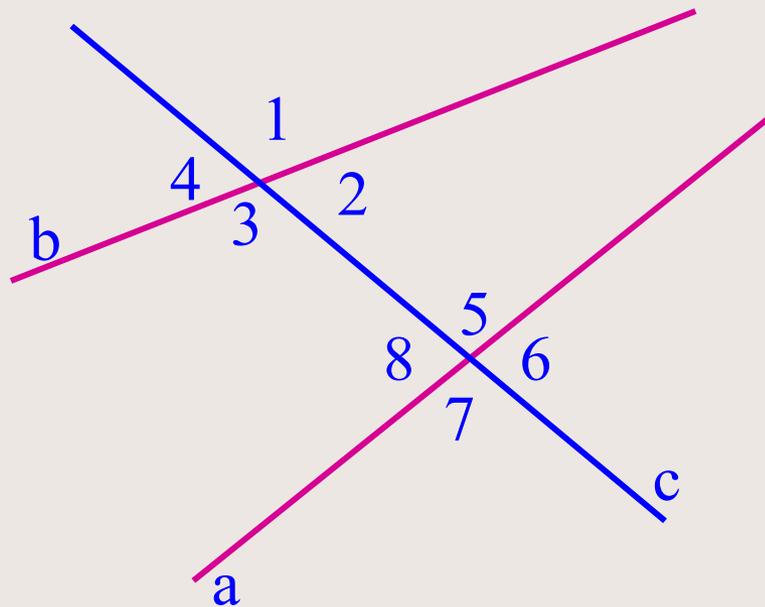
*Если три стороны одного треугольника **равны** соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие **треугольники равны**.*

$$AB=A_1B_1, \quad AC=A_1C_1, \quad BC=B_1C_1 \Rightarrow \triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1.$$



# Признаки параллельности прямых

Углы, образованные при пересечении двух  
прямых секущей.



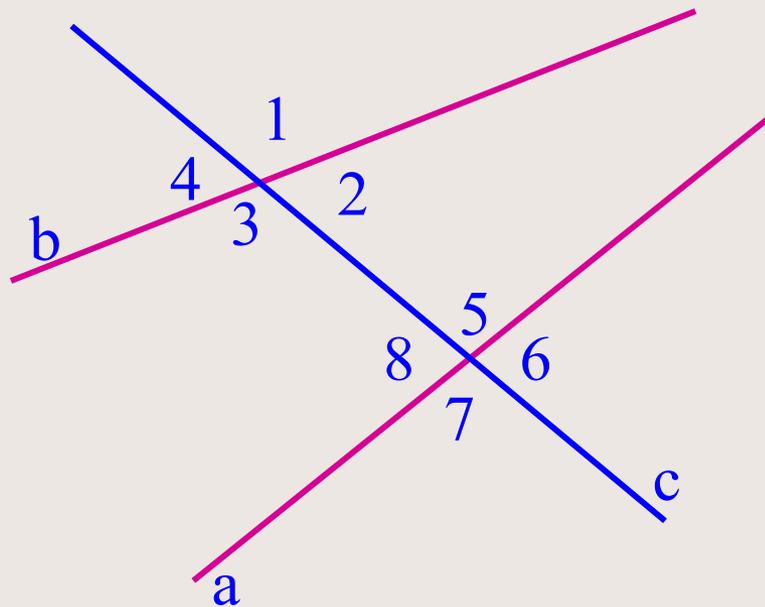
$\angle 2$  и  $\angle 5$  – внутренние  
односторонние.

$\angle 3$  и  $\angle 8$  – внутренние  
односторонние.



# Признаки параллельности прямых

Углы, образованные при пересечении двух  
прямых секущей.



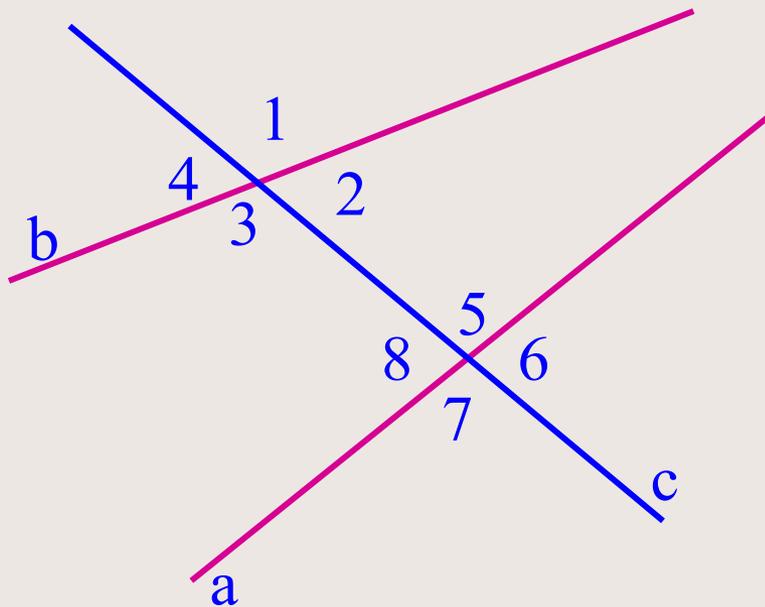
$\angle 2$  и  $\angle 8$  – внутренние  
накрест лежащие.

$\angle 3$  и  $\angle 5$  – внутренние  
накрест лежащие.



# Признаки параллельности прямых

Углы, образованные при пересечении двух  
прямых секущей.



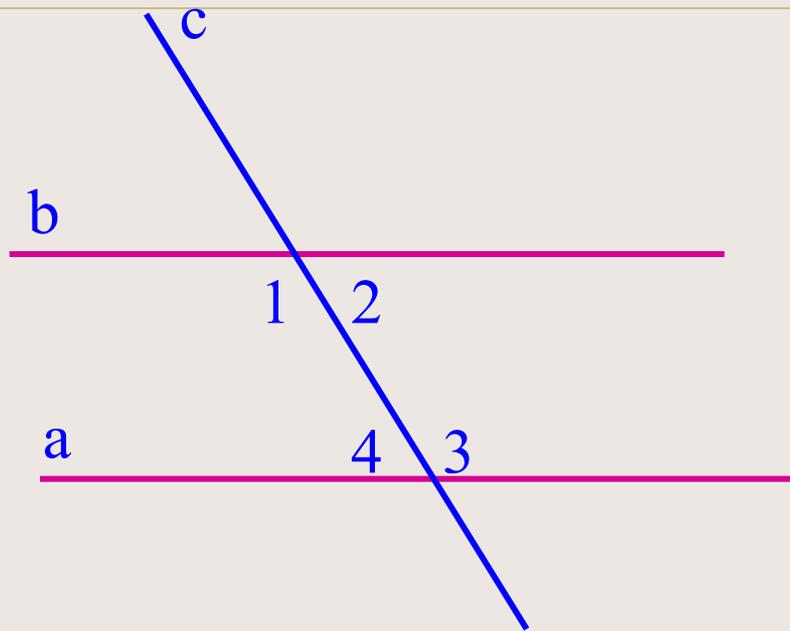
$\angle 1$  и  $\angle 5$  –  
соответственные углы.

$\angle 2$  и  $\angle 6$  –  
соответственные углы.

$\angle 4$  и  $\angle 8$ ,  $\angle 3$  и  $\angle 7$  –  
соответственные углы.



# Признаки параллельности прямых



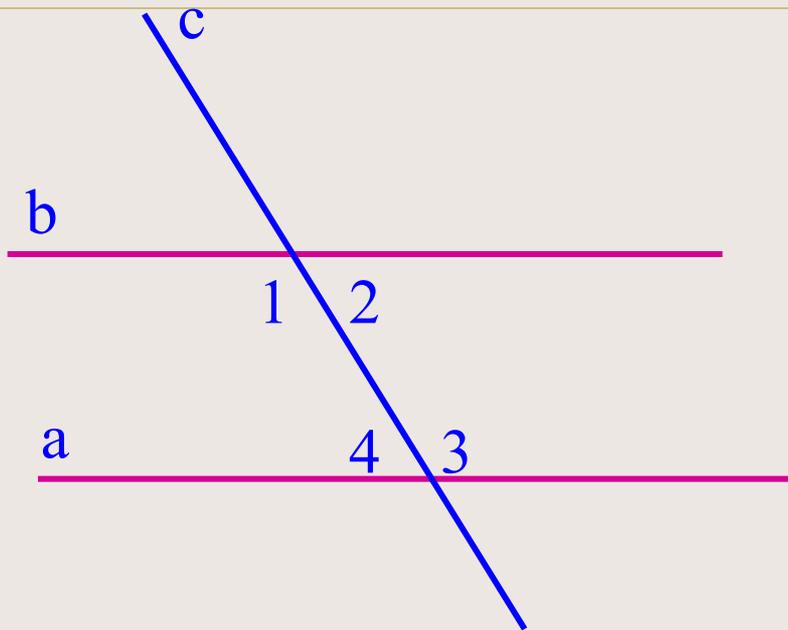
$$\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow a \parallel b$$

$$\angle 2 = \angle 4 \Rightarrow a \parallel b$$

1 признак: Если при пересечении двух прямых секущей внутренние накрест лежащие углы равны, то эти прямые параллельны.



# Признаки параллельности прямых



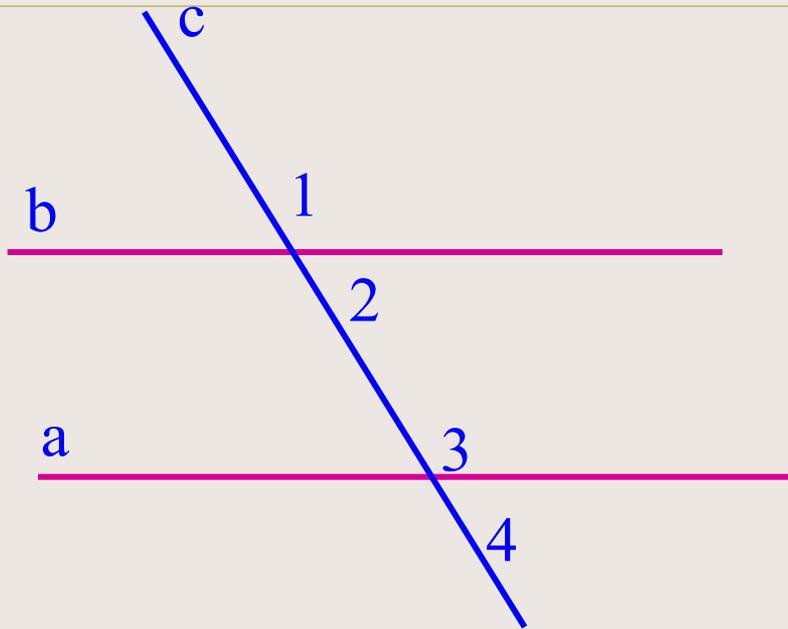
$$\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ \Rightarrow a \parallel b$$

$$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow a \parallel b$$

2 признак: Если при пересечении двух прямых секущей сумма внутренних односторонних углов равна  $180^\circ$ , то эти прямые параллельны.



# Признаки параллельности прямых



$$\angle 1 = \angle 3 \Rightarrow a \parallel b$$

$$\angle 2 = \angle 4 \Rightarrow a \parallel b$$

3 признак: Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то эти прямые параллельны.



# Образец решения задачи

1. Один из углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен  $50^\circ$ . Найти остальные углы.

Дано:  $a \parallel b$ ,  $c$ -секущая,  $\angle 2 = 50^\circ$ .

Найти:  $\angle 1, \angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6, \angle 7,$

Решение:  $\angle 8$ .

$$\angle 4 = \angle 2 \text{ (вн.накр.леж.)} \Rightarrow \angle 4 = 50^\circ.$$

$$\angle 2 + \angle 3 = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\angle 3 = 180^\circ - \angle 2 = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ.$$

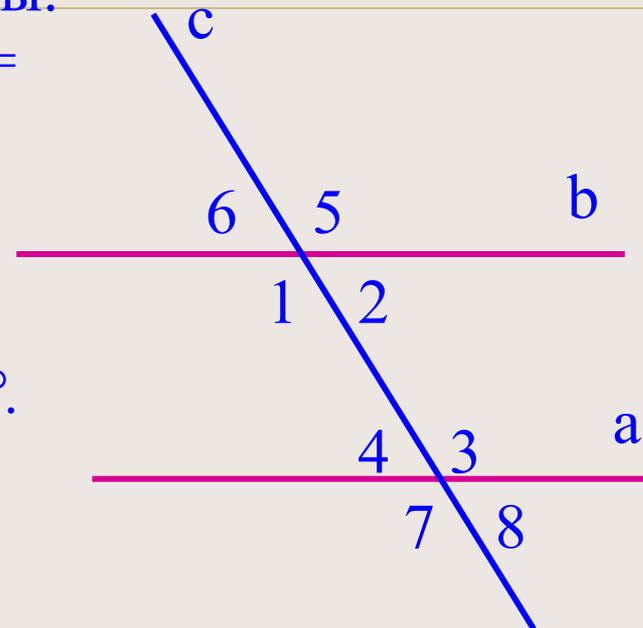
$$\angle 1 = \angle 3 \text{ (вн.накр.леж.)} \Rightarrow \angle 1 = 130^\circ$$

$$\angle 5 = \angle 3, \angle 7 = \angle 1 \text{ (соответств.углы)}$$

$$\angle 8 = \angle 2, \angle 6 = \angle 4 \text{ (соответств.углы)} \Rightarrow \angle 8 = \angle 4 = 50^\circ.$$

$$\text{Ответ: } \angle 1 = \angle 3 = \angle 5 = \angle 7 = 130^\circ,$$

$$\angle 4 = \angle 6 = \angle 8 = 50^\circ.$$



## Образец решения задачи

2. Разность двух внутренних односторонних углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна  $40^\circ$ . Найти эти углы.

Дано:  $a \parallel b$ ,  $c$ -секущая,

$$\angle 4 = 40^\circ.$$

Найти:  $\angle 1$ ,  $\angle 4$ .

Решение:

$$\angle 1 + \angle 4 = 180^\circ \text{ (вн.накр.леж.)}$$

Пусть  $\angle 4 = x \Rightarrow$

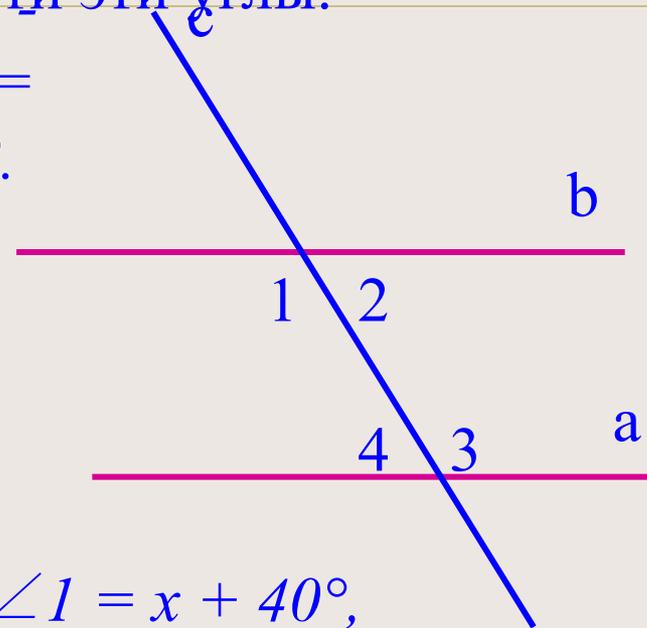
$$\angle 1 - x = 40^\circ \text{ (по условию), тогда } \angle 1 = x + 40^\circ,$$

$$\text{Составим уравнение: } x + 40^\circ + x = 180^\circ,$$

$$2x + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow 2x = 180^\circ - 40^\circ, 2x = 140^\circ,$$

$$x = 140^\circ : 2 = 70^\circ. \angle 4 = 70^\circ, \angle 1 = 70^\circ + 40^\circ = 110^\circ.$$

Ответ:  $\angle 1 = 110^\circ, \angle 4 = 70^\circ$ .



## Образец решения задачи

3. Сумма внутренних накрест лежащих углов, которые получаются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равна  $130^\circ$ . Найти эти углы.

Дано:  $a \parallel b$ ,  $c$ -секущая,  $\angle 2 + \angle 4 = 130^\circ$ .

( $\angle 1$  и  $\angle 3$  - тупые углы, поэтому их сумма не может равняться  $130^\circ$ )

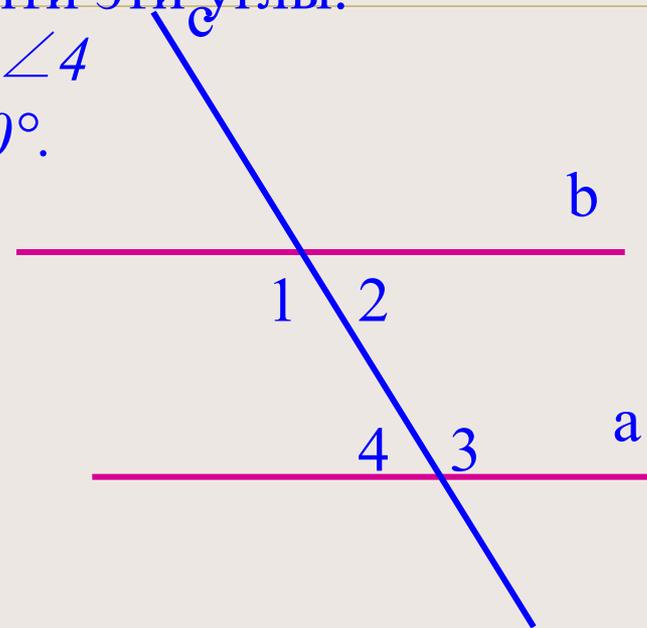
Найти:  $\angle 2, \angle 4$ .

Решение:

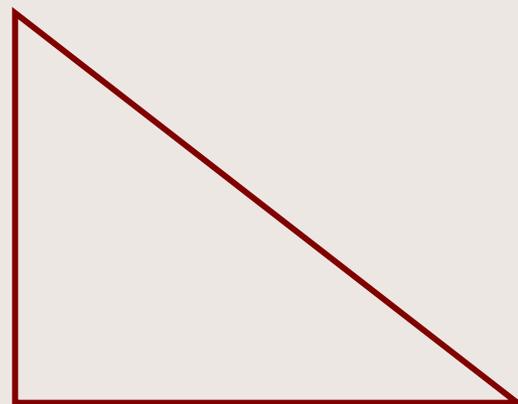
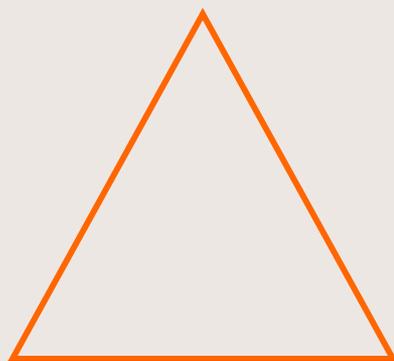
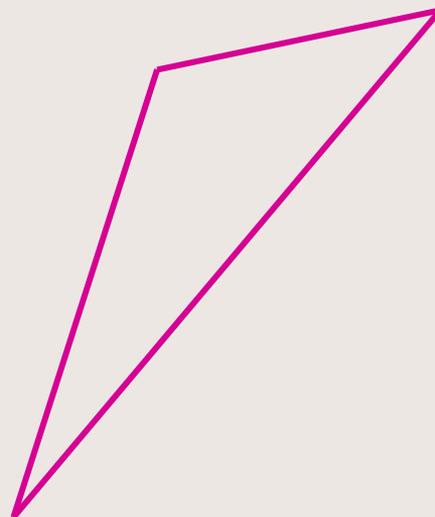
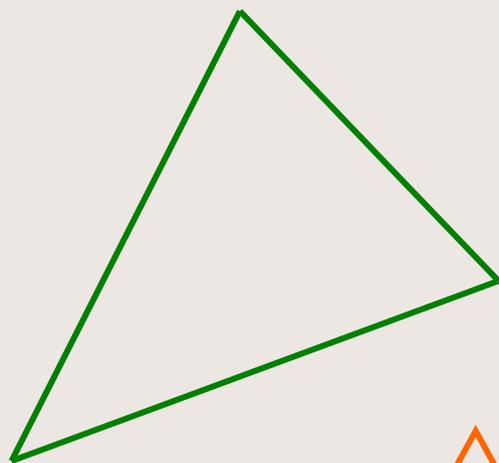
$$\angle 2 = \angle 4 \text{ (вн. накр. леж.)} \Rightarrow \angle 2 + \angle 2 = 130^\circ,$$

$$\angle 2 = 130^\circ : 2 = 65^\circ.$$

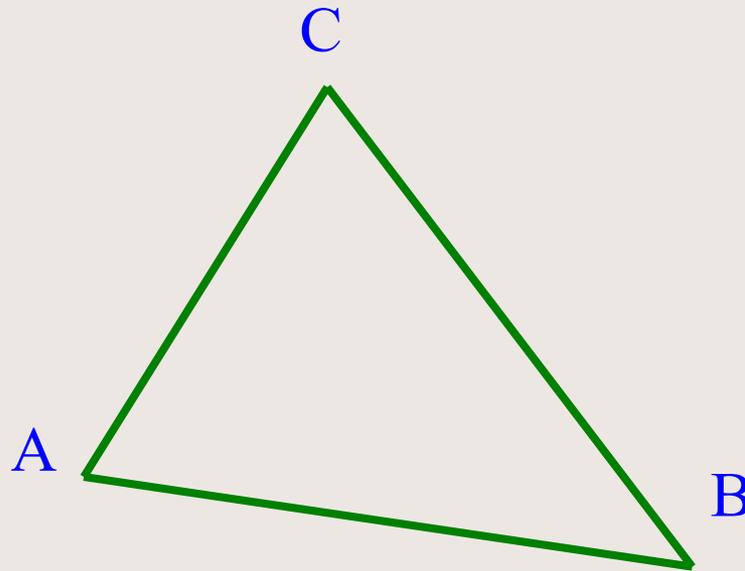
Ответ:  $\angle 2 = \angle 4 = 65^\circ$ .



# Сумма углов треугольника



# Сумма углов треугольника



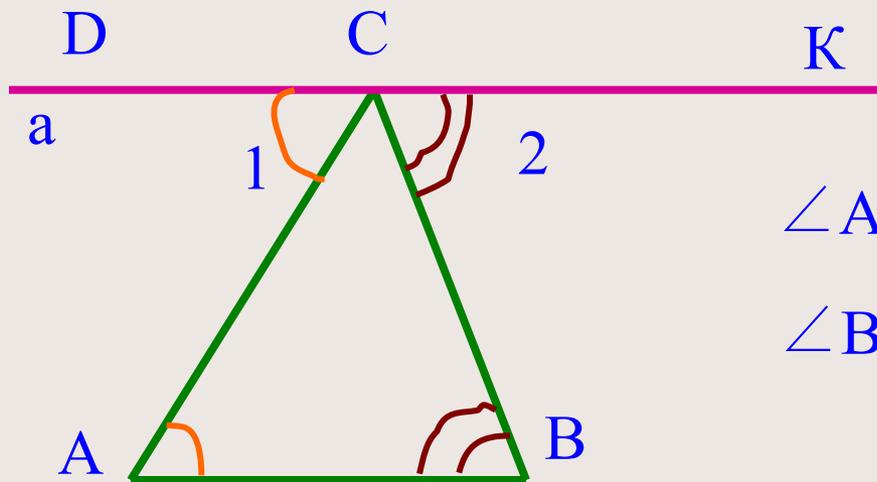
$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

Сумма внутренних углов треугольника равна  $180^\circ$ .



# Сумма углов треугольника = $180^\circ$ .

Через точку С проведем прямую  $a \parallel AB$



$\angle A = \angle 1$  (внутр.накрест леж)

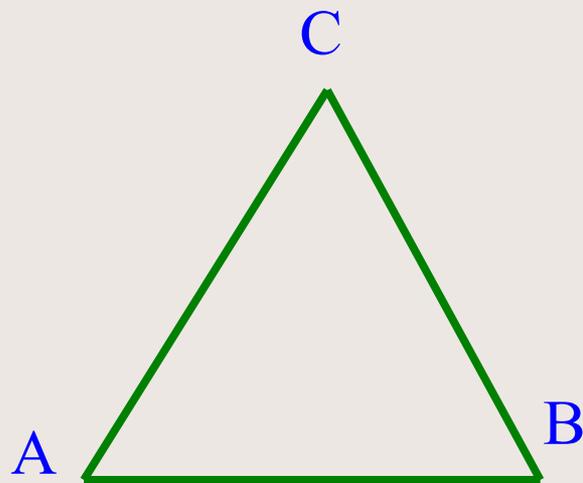
$\angle B = \angle 2$  (внутр.накрест леж)

$$\angle A + \angle B + \angle C = \angle 1 + \angle 2 + \angle C = \angle DCK = 180^\circ \text{ (развёрнутый)}$$

=



У равностороннего треугольника все углы равны  $60^\circ$ .



$\triangle ABC$ - равносторонний

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

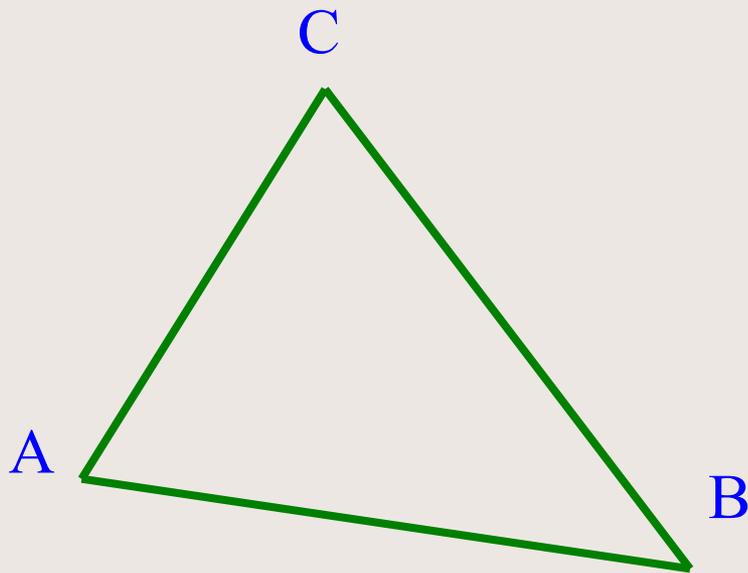
$$\angle A = \angle B = \angle C \Rightarrow$$

$$\angle A = \angle B = \angle C = 180^\circ : 3 = 60^\circ$$



# Задачи для устного решения:

1. В треугольнике ABC один угол равен  $50^\circ$ , второй  $70^\circ$ . Найти третий угол.



Подсказка

# Задачи для устного решения:

---

2. Существует ли треугольник, у которого углы равны  $80^\circ$ ,  $30^\circ$  и  $60^\circ$ ?



Подсказка

# Задачи для устного решения:

---

3. Существует ли треугольник, у которого два угла тупые?



Подсказка

# Задачи для устного решения:

---

4. Может ли угол при основании равнобедренного треугольника быть тупым?



Подсказка

# Опорные задачи

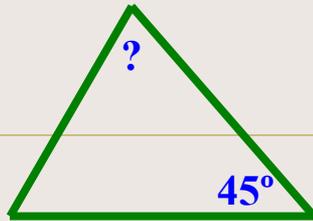
1. Найти углы треугольника, если известно, что второй угол больше первого на  $20^\circ$ , а третий угол больше первого на  $40^\circ$ .
2. Найти углы при основании равнобедренного треугольника, если угол при вершине равен  $30^\circ$ .
3. Найти угол при вершине равнобедренного треугольника, если угол при основании равен  $70^\circ$ .



# Найди неизвестные углы:

1 вариант

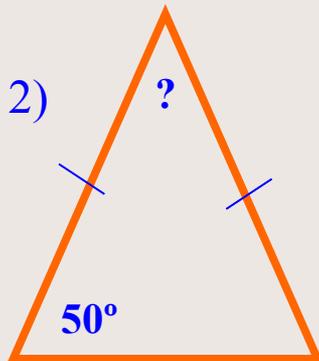
1)



$65^\circ$

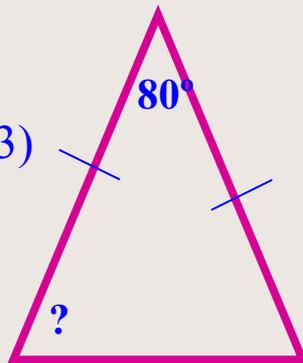
$45^\circ$

2)



$50^\circ$

3)

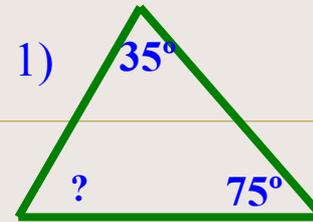


$80^\circ$

$?$

2 вариант

1)

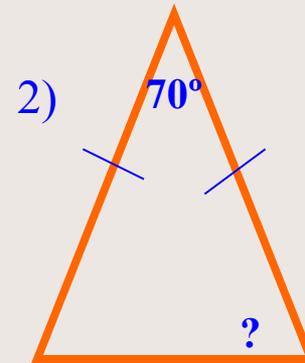


$35^\circ$

$?$

$75^\circ$

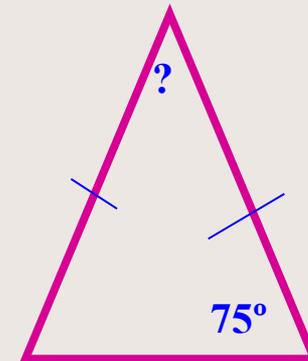
2)



$70^\circ$

$?$

3)

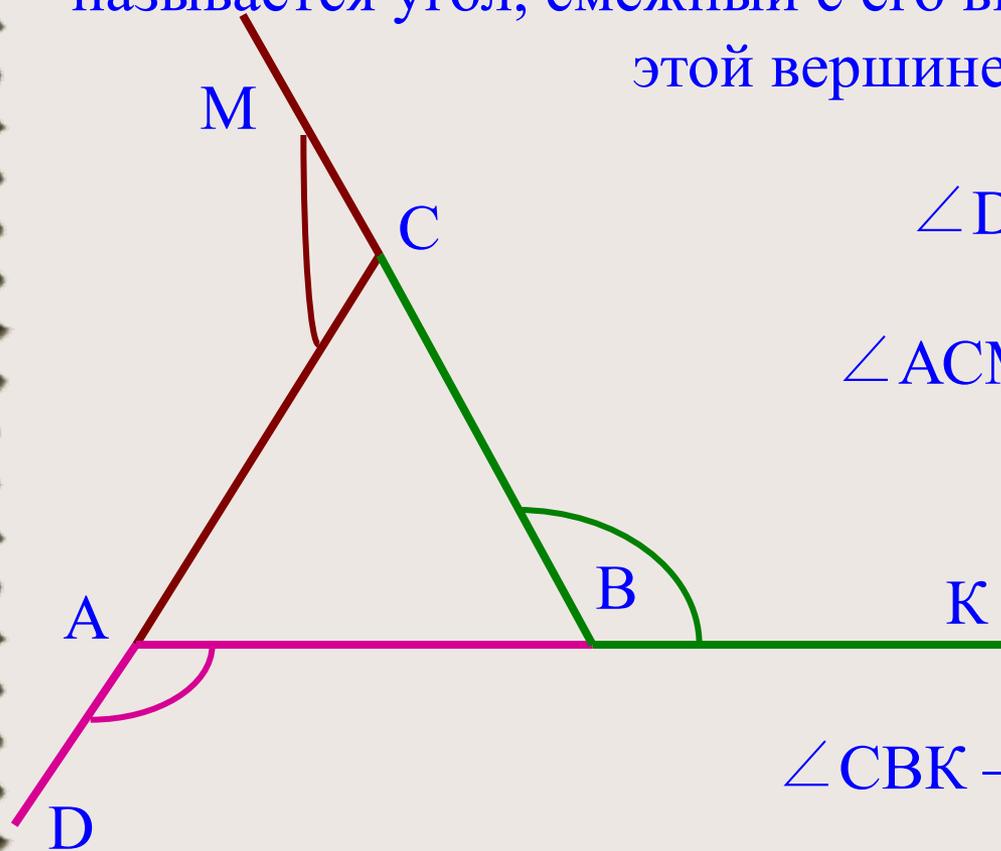


$?$

$75^\circ$

# Внешний угол треугольника.

Внешним углом треугольника при данной вершине называется угол, смежный с его внутренним углом при этой вершине.



$\angle DAB$  – внешний  
угол

$\angle ACM$  - внешний угол

$\angle CBK$  – внешний угол



Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов треугольника, не смежных с ним.

$$\angle DAB = \angle B + \angle C$$

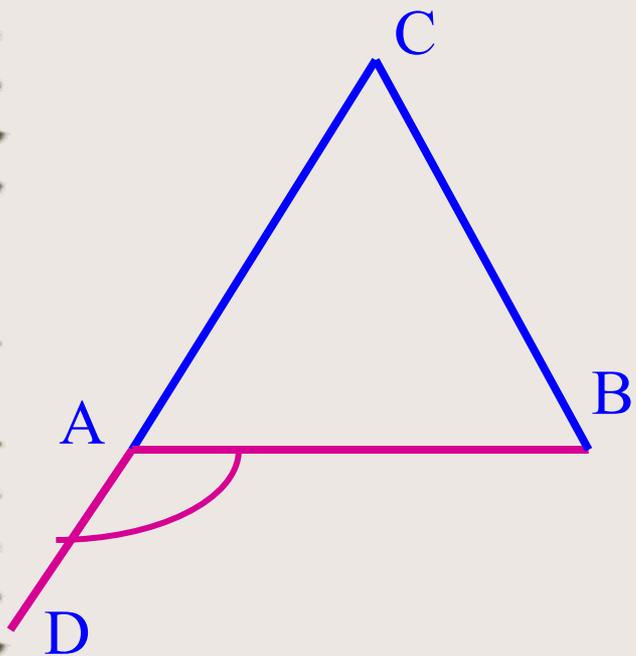
$$\angle DAB + \angle A = 180^\circ (\text{смежные углы}) \Rightarrow$$

$$\angle DAB = 180^\circ - \angle A$$

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow$$

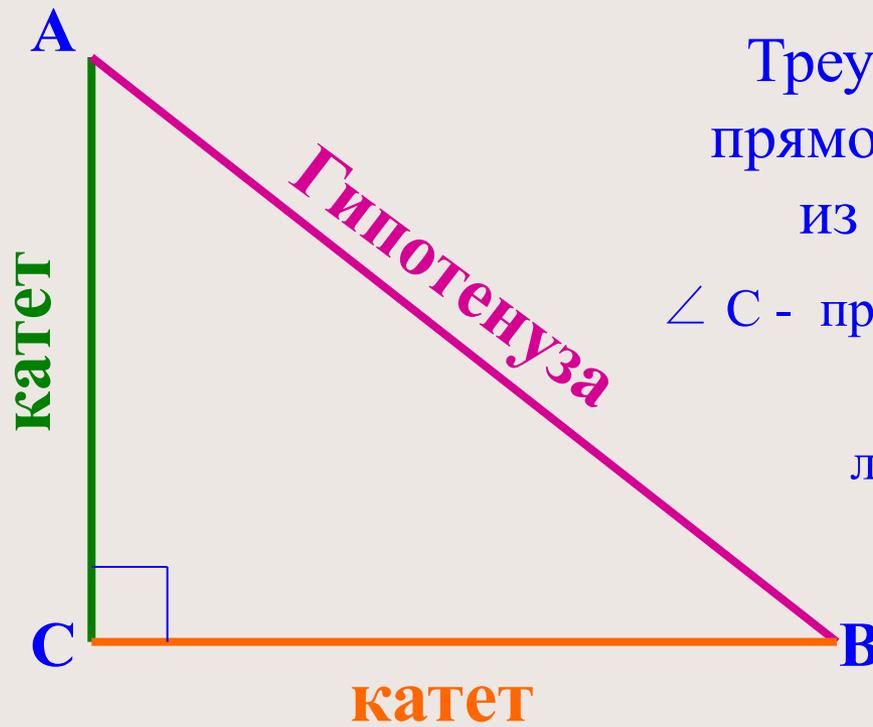
$$\angle B + \angle C = 180^\circ - \angle A \Rightarrow$$

$$\angle DAB = \angle B + \angle C$$



# Признаки равенства прямоугольных треугольников

Определение прямоугольного треугольника



Треугольник называется  
прямоугольным, если один  
из его углов прямой.

$\angle C$  - прямой,  $\triangle ABC$  - прямоугольный

Сторона треугольника,  
лежащая напротив прямого  
угла - гипотенуза

Две другие стороны -  
катеты

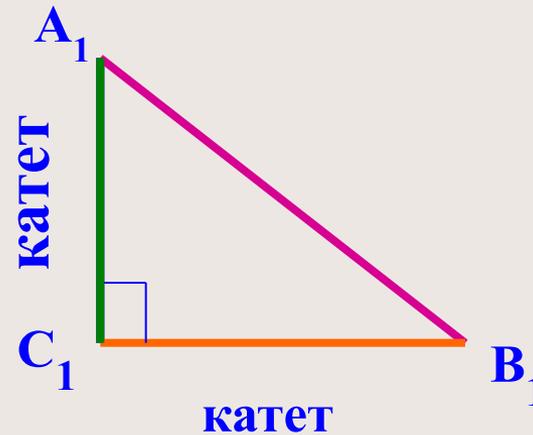
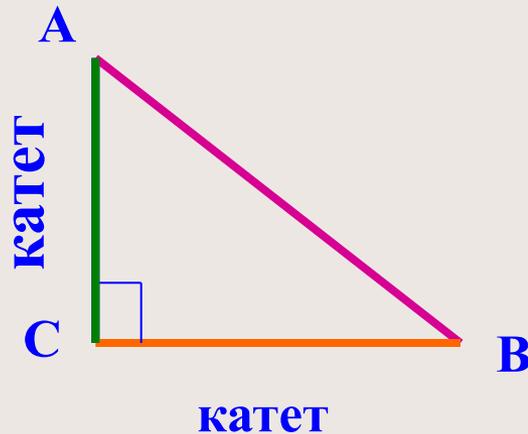


# Признаки равенства прямоугольных треугольников

## Первый признак

Если катеты одного треугольника  
соответственно равны катетам  
другого, то такие прямоугольные  
треугольники равны.

$$\left. \begin{array}{l} AC = A_1C_1 \\ BC = B_1C_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

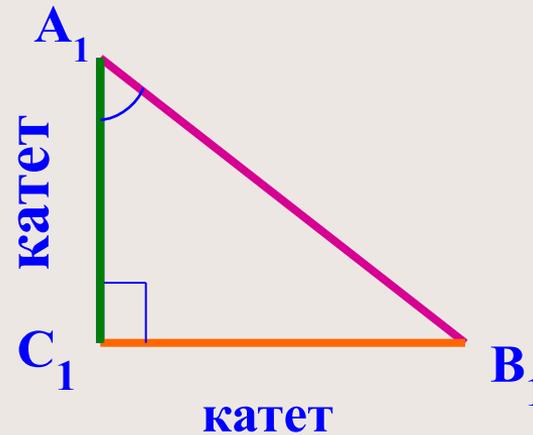
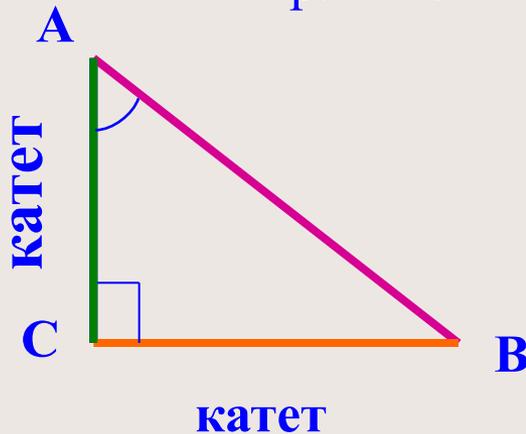


# Признаки равенства прямоугольных треугольников

## Второй признак

Если катет и прилежащий острый  
угол одного треугольника  
соответственно равны катету и  
острому углу другого, то такие  
прямоугольные треугольники  
равны.

$$\left. \begin{array}{l} AC = A_1C_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

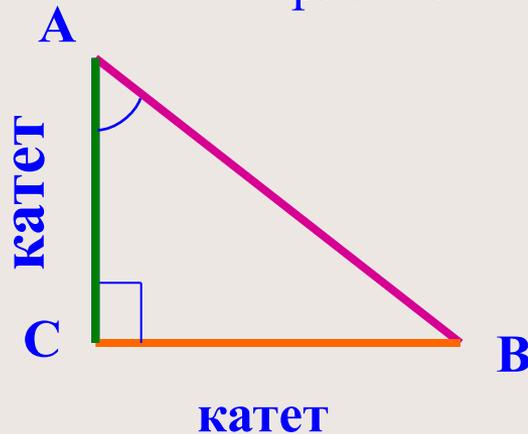


# Признаки равенства прямоугольных треугольников

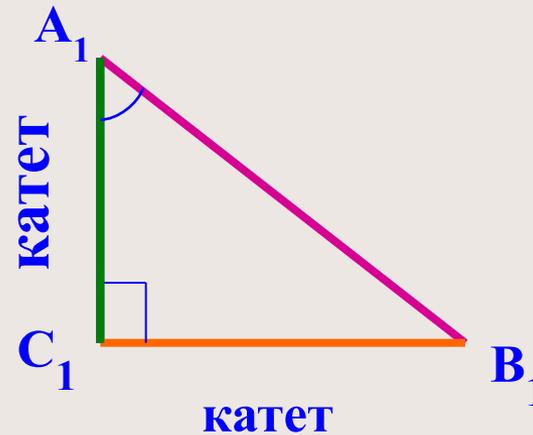
## Третий признак

Если гипотенуза и прилежащий острый угол одного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого, то такие прямоугольные треугольники

равны.



$$\left. \begin{array}{l} AB = A_1B_1 \\ \angle A = \angle A_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$

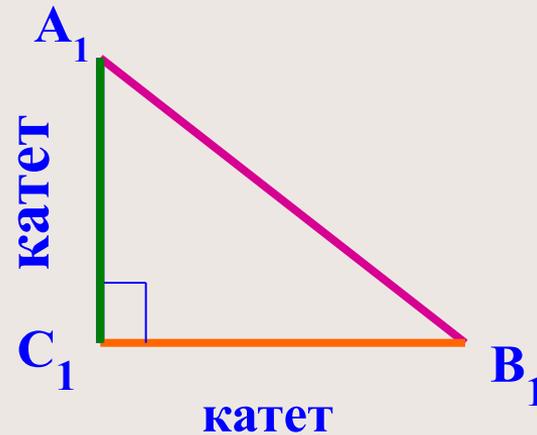
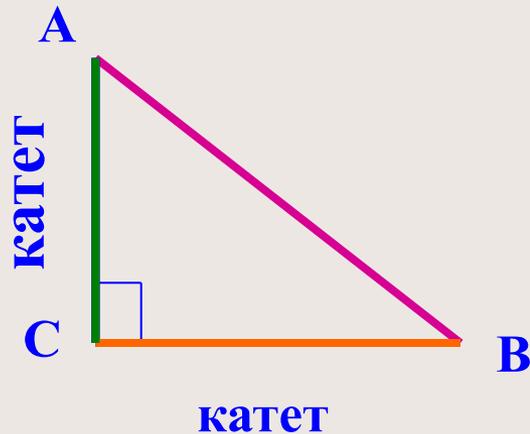


# Признаки равенства прямоугольных треугольников

## Четвертый признак

Если катет и гипотенуза одного  
треугольника соответственно  
равны катету и гипотенузе  
другого, то такие прямоугольные  
треугольники равны.

$$\left. \begin{array}{l} AC = A_1C_1 \\ AB = A_1B_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$$



# Расстояние от точки до прямой

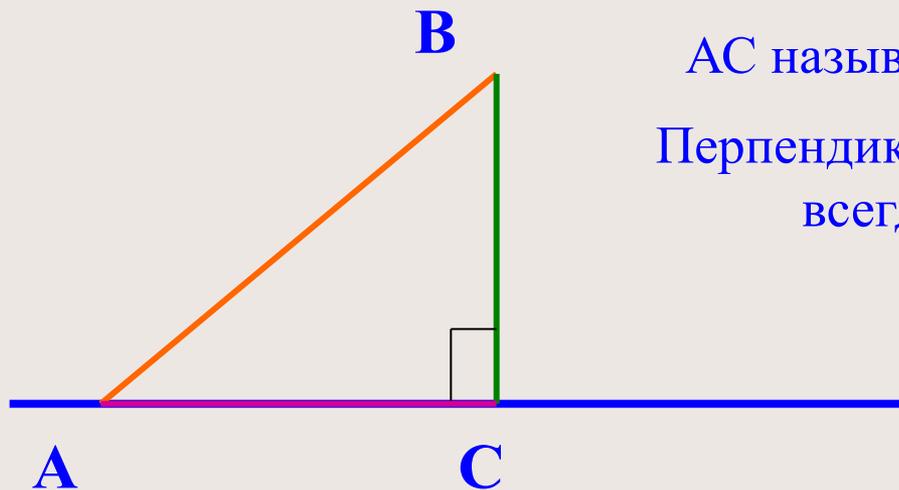
BC называется перпендикуляром

AB называется наклонной

AC называется проекцией наклонной

Перпендикуляр и проекция наклонной  
всегда меньше наклонной

$$AC < AB, \quad BC < AB$$



Расстоянием от точки до прямой называют длину перпендикуляра,  
опущенного из этой точки на прямую

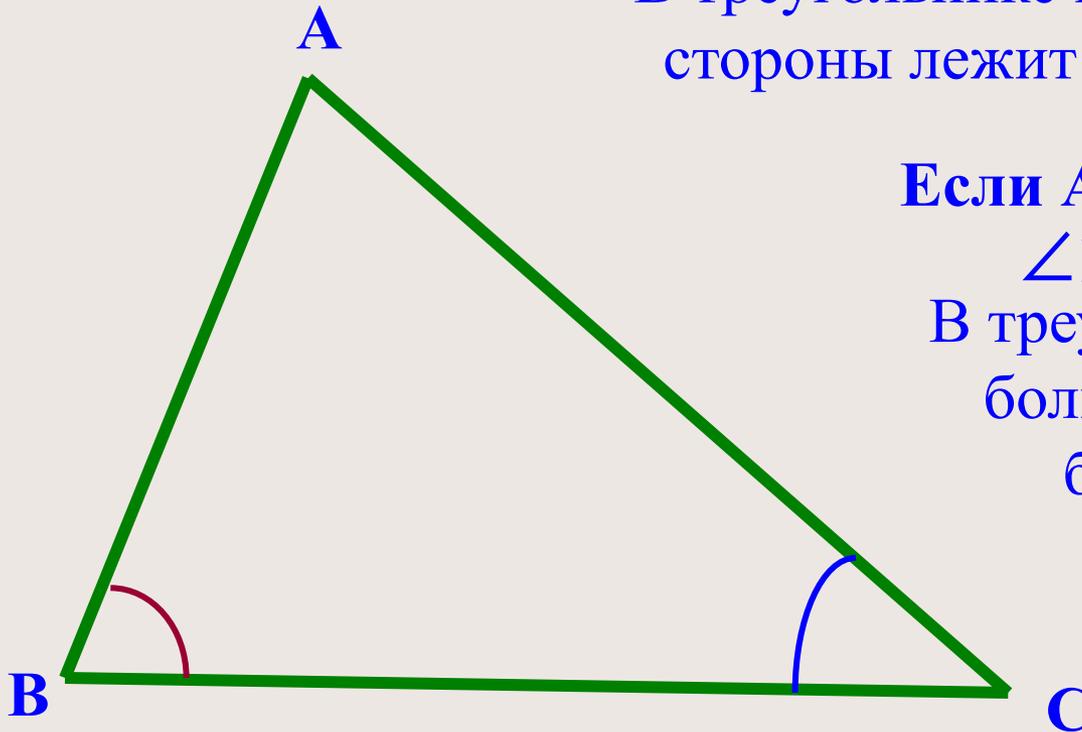


# Соотношения между сторонами и углами треугольника

В треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Если  $AC > AB$ , то  
 $\angle B > \angle C$ .

В треугольнике против  
большего угла лежит  
большая сторона.

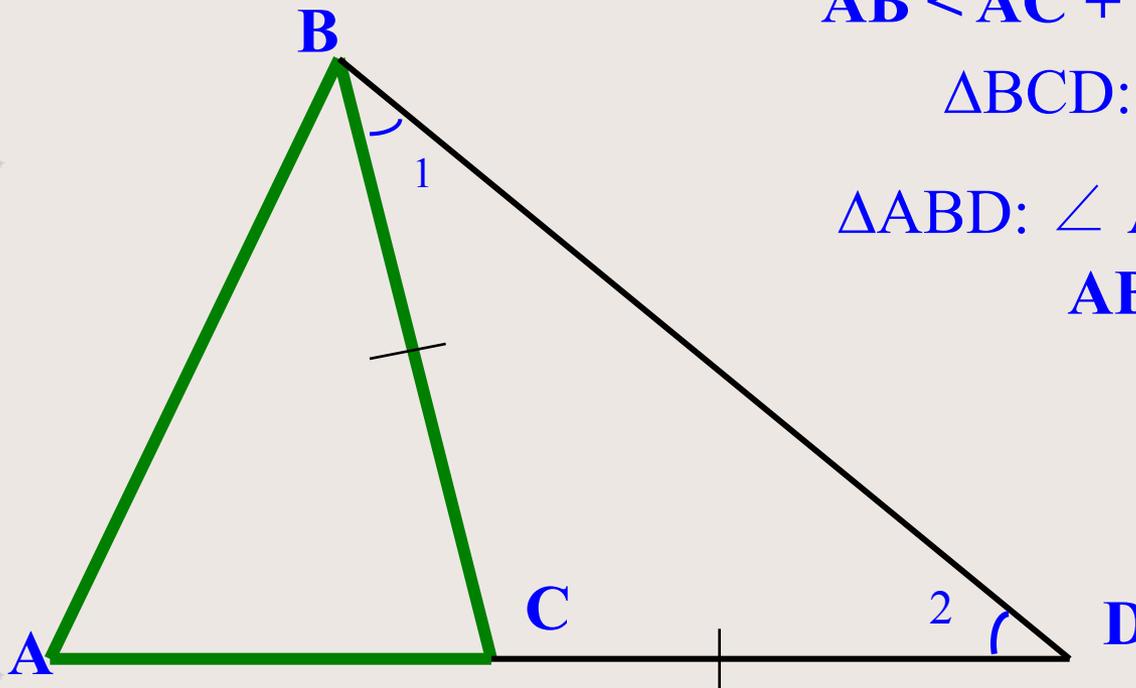


Если  $\angle B > \angle C$ , то  $AC > AB$ .



# Неравенство треугольника

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.



$$AB < AC + BC$$

$$\triangle BCD: \angle 1 = \angle 2$$

$$\triangle ABD: \angle ABD > \angle 1 = \angle 2$$

$$AB \Rightarrow AD = AC +$$

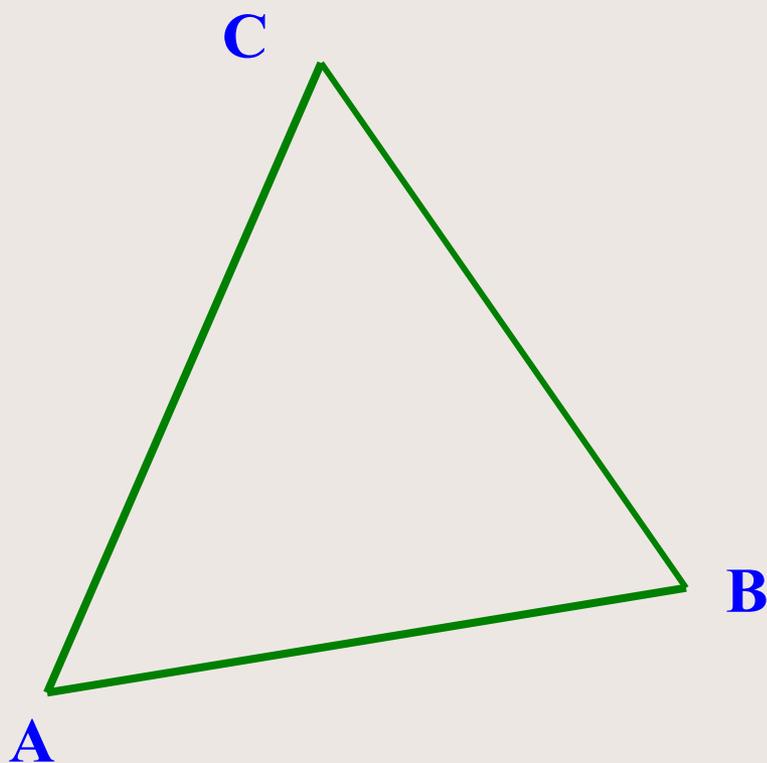
$$CD = BC$$

$\Rightarrow$

$$AB < AC + BC$$



# Неравенство треугольника



$$AB < AC + BC$$

$$AC < AB + BC$$

$$BC < AB + AC$$



Задача: Существует ли треугольник с  
данными сторонами и почему?

8 см, 10 см, 17 см

5 см, 7 см, 13 см



## Задачи для устного решения:

---

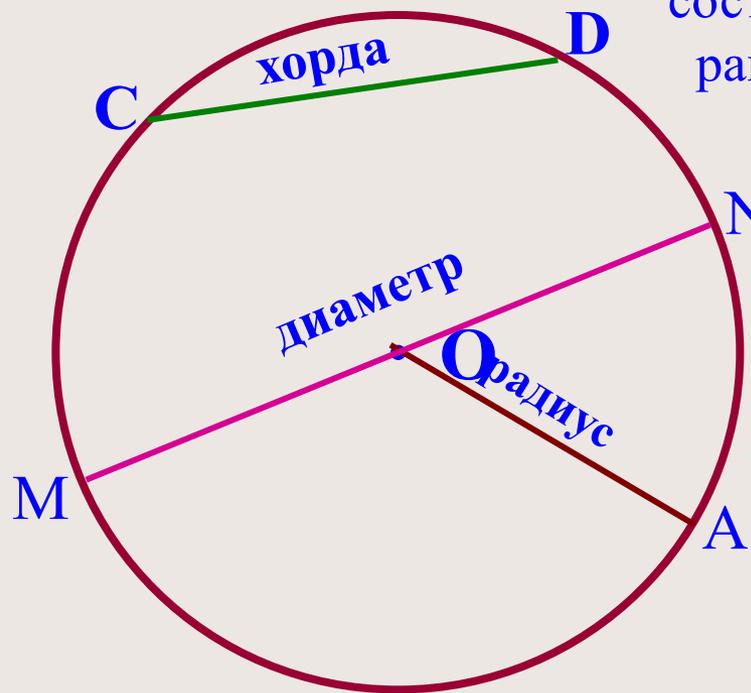
1. Могут ли стороны треугольника относиться как  $5:2:4$ ?
2. Могут ли стороны треугольника относиться как  $6:9:16$ ?
3. Могут ли стороны треугольника относиться как  $5:11:6$ ?

Ответ



# Окружность.

Окружностью называется фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудалённых от данной точки



Точка  $O$ - центр окружности

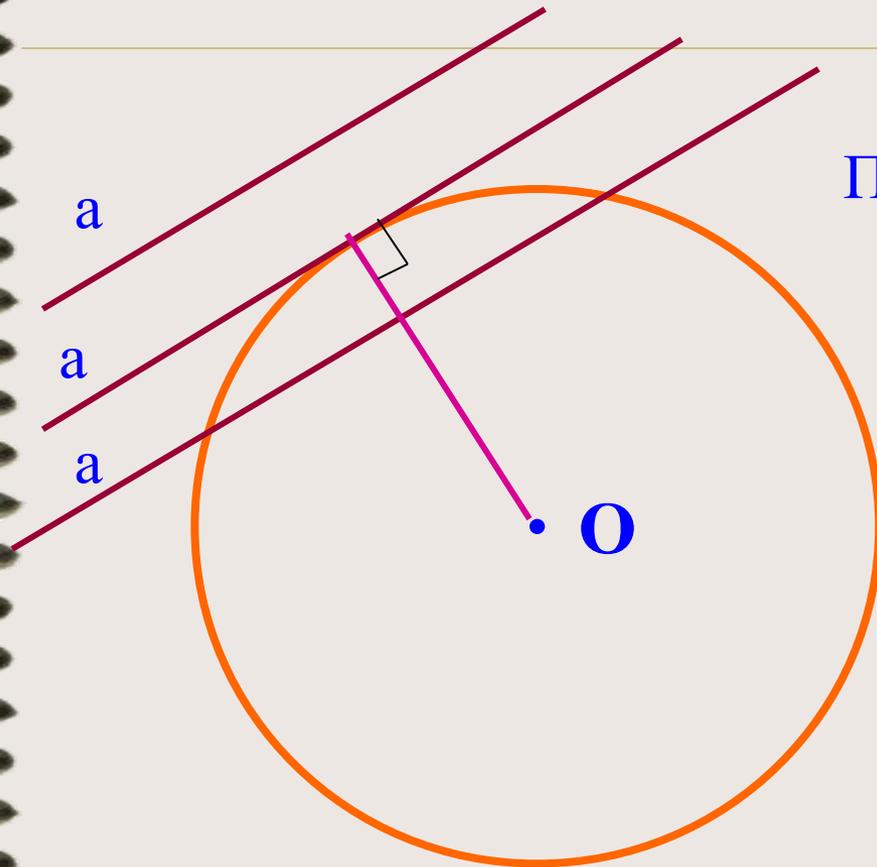
$OA$ - радиус окружности

$CD$ - хорда окружности

$MN$ - диаметр окружности



# Касательная к окружности



Прямая может не пересекать  
окружность

Прямая может пересекать  
окружность в двух точках

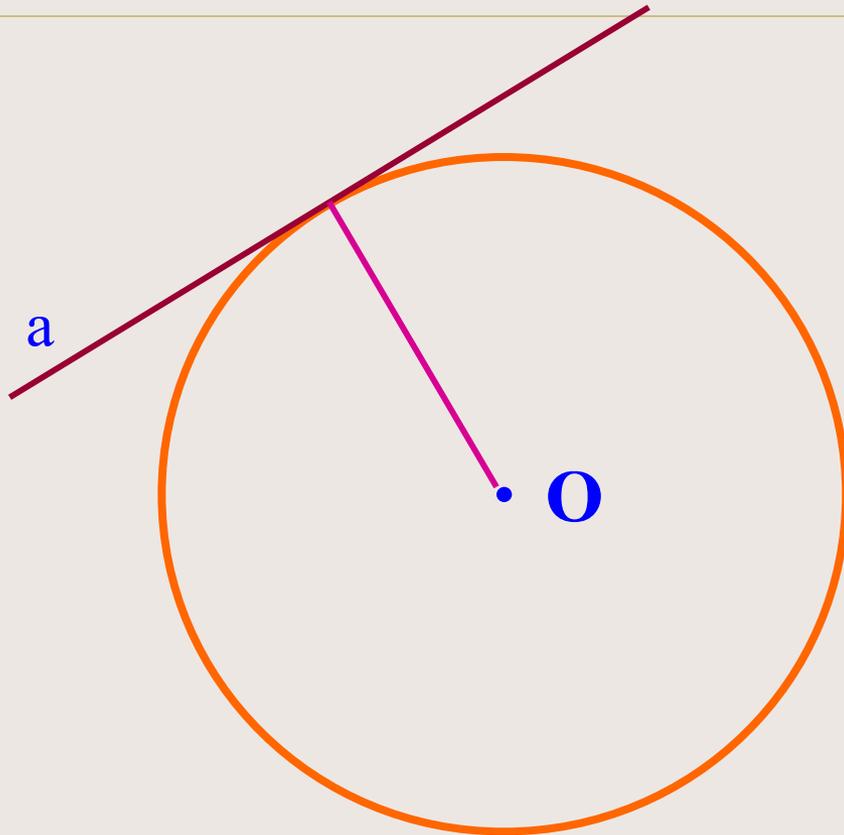
Прямая может иметь с  
окружностью одну общую  
точку

Прямая  $a$  – *касательная* к окружности

*Касательная перпендикулярна радиусу*



# Построение касательной

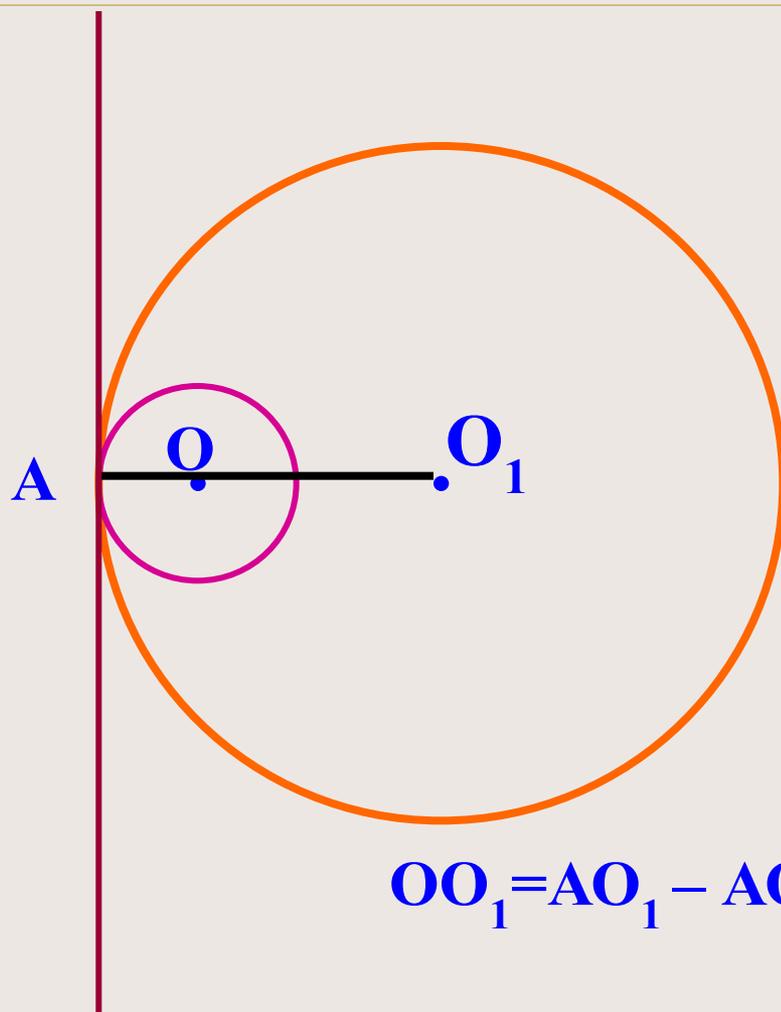


1. В точку касания проводим радиус

2. Через точку касания проводим прямую перпендикулярную радиусу



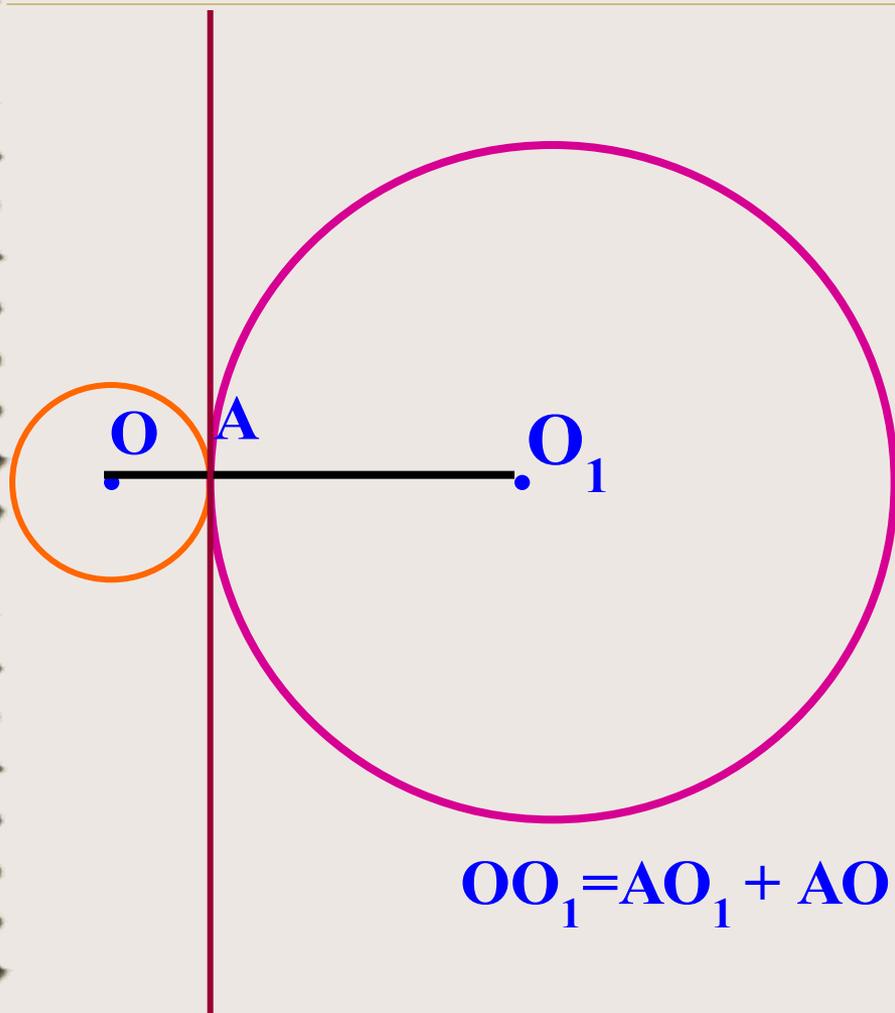
# Касание двух окружностей (внутреннее)



Если две окружности имеют общую касательную и центры окружностей лежат по одну сторону от касательной, то касание окружностей-внутреннее



# Касание двух окружностей (внешнее)



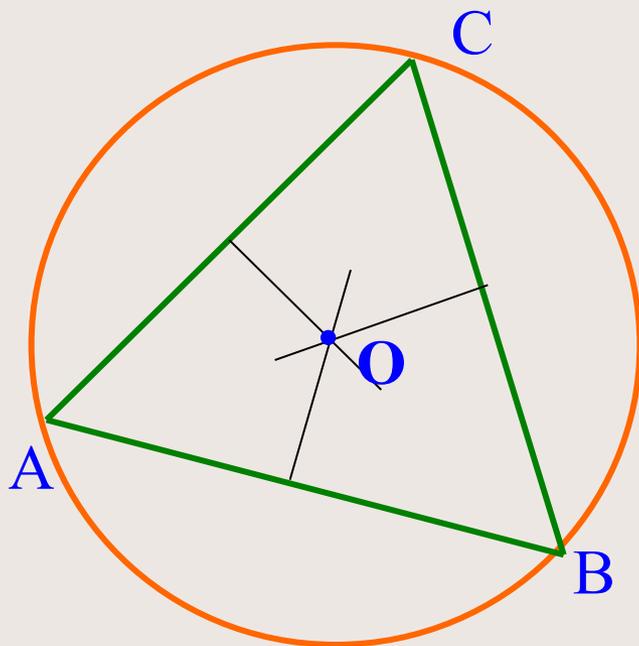
Если две окружности имеют общую касательную и центры окружностей лежат по разные стороны от касательной, то касание окружностей-внешнее

$$OO_1 = AO_1 + AO = R + r$$



# Окружность, описанная около треугольника

Центр окружности, описанной около треугольника лежит  
в точке пересечения серединных перпендикуляров к  
сторонам треугольника

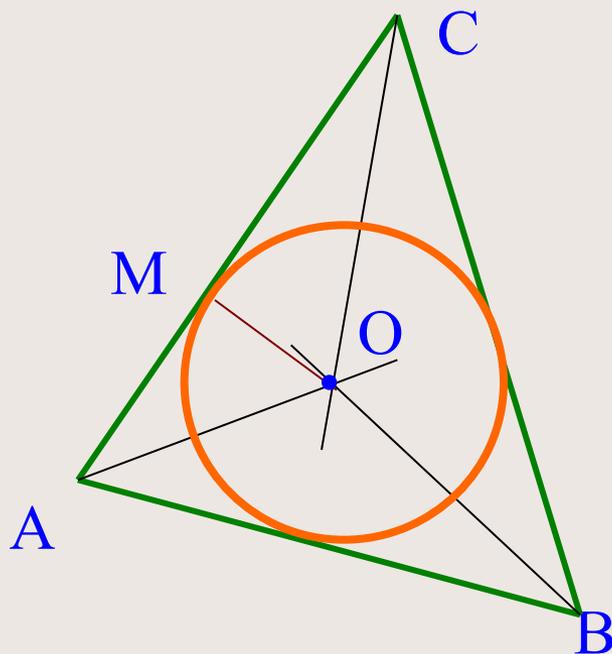


1. Через середины сторон проводим перпендикуляры
2. Точка пересечения серединных перпендикуляров (точка O) - центр окружности
3. Проводим окружность с центром в точке O и радиусом OA



# Окружность, вписанная в треугольник

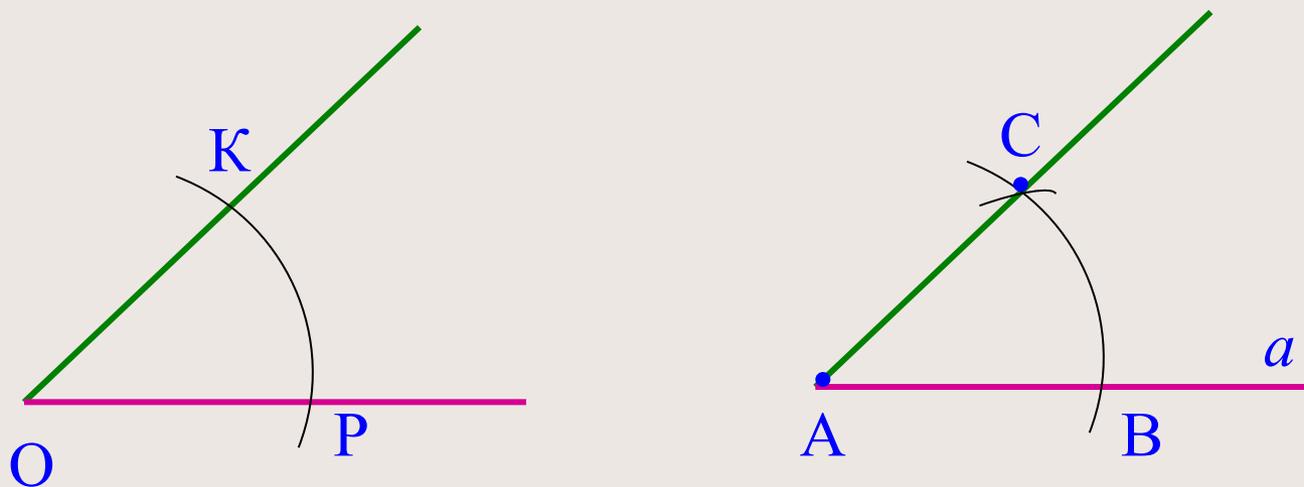
Центр окружности, вписанной в треугольник лежит в  
точке пересечения его биссектрис



1. Проводим биссектрисы углов
2. Точка пересечения биссектрис (точка O) - центр окружности
3. Опускаем перпендикуляр OM на сторону треугольника
4. Проводим окружность с центром в точке O и радиусом OM



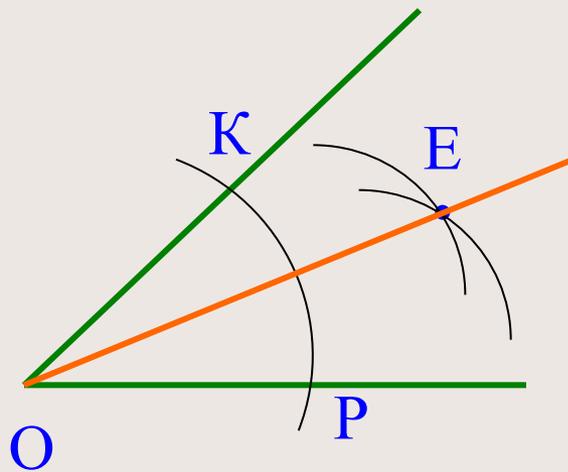
# Построение угла, равного данному



1. Проводим окружность с центром в т.  $O$  произвольным радиусом
2. Точки пересечения окружности со сторонами угла-  $R, K$
3. Проводим произвольный луч  $a$  с началом в точке  $A$
4. Проводим окружность радиусом  $OR$  и с центром в точке  $A$ , получим точку  $B$ .
4. Проводим окружность радиусом  $RK$  и с центром в точке  $B$ , получим точку  $C$ .
5. Проводим луч  $OC$ , получим угол  $CAB$ , равный данному углу.



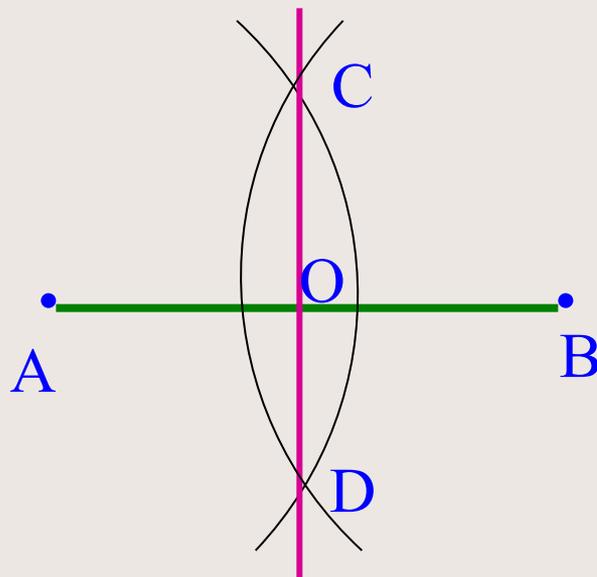
# Построение биссектрисы угла



1. Проводим окружность с центром в т.О произвольным радиусом
2. Точки пересечения окружности со сторонами угла- P, K
3. Проводим две окружности с центрами в точках P и K одинаковым радиусом PK, получим точку E
4. Проводим луч OE- биссектрису угла



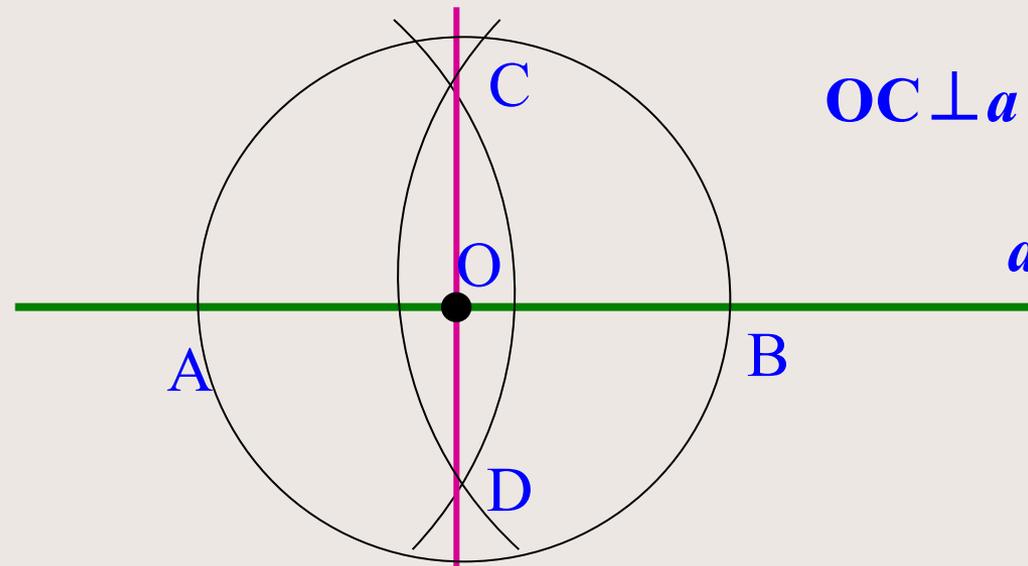
# Деление отрезка пополам



1. Проводим окружность с центром в т.А и радиусом  $>$  половины АВ
2. Проводим окружность с центром в т.В таким же радиусом
3. Получим точки С и D
4. Проводим прямую CD, получим точку O – середину АВ



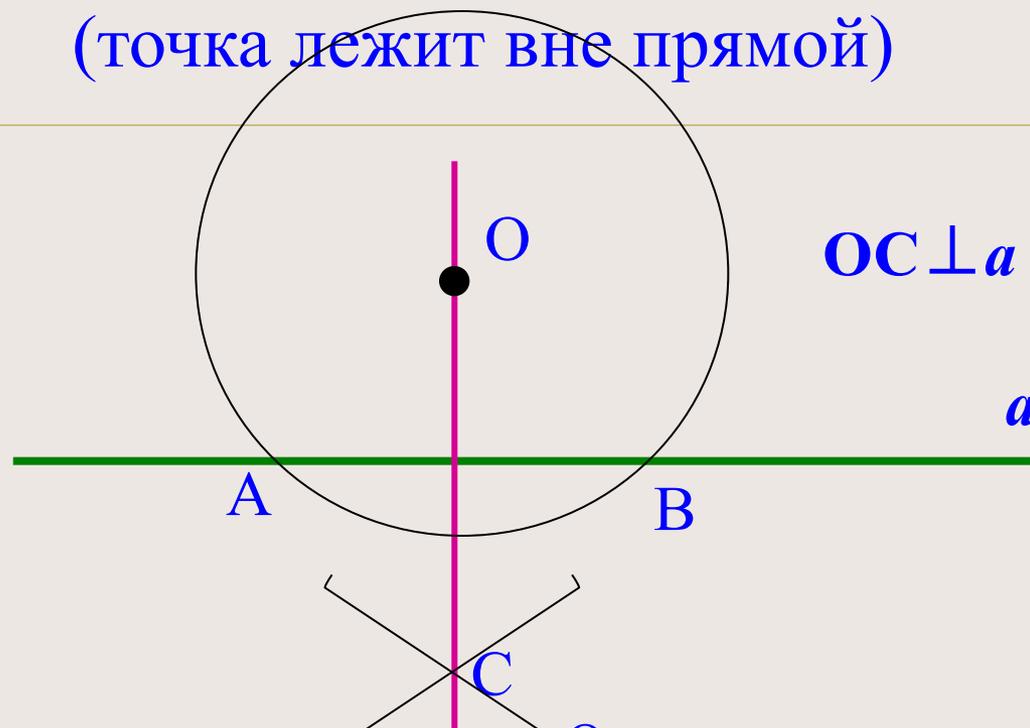
## Построение прямой перпендикулярной данной (точка лежит на прямой)



1. Проводим окружность с центром в т.О, получим две точки: А и В
2. Проводим две окружности с центрами в точках А и В, одинаковыми радиусами большими АО
3. Получим точки С и D
4. Проводим прямую ОС.



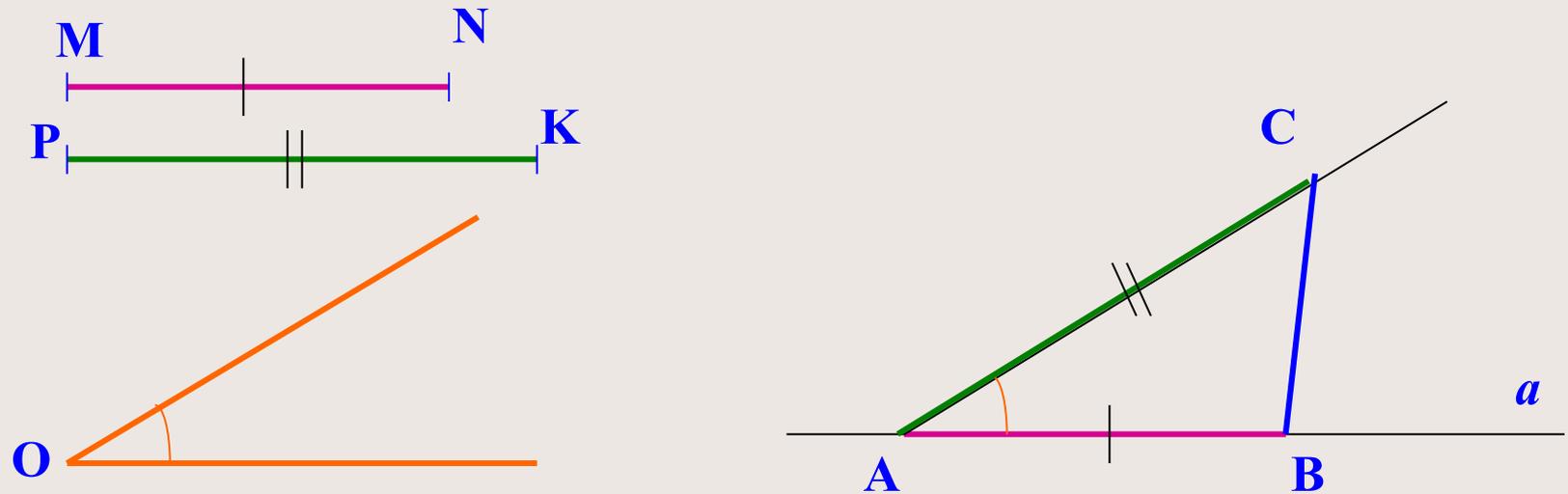
# Построение прямой перпендикулярной данной (точка лежит вне прямой)



1. Проводим окружность с центром в т.  $O$ , получим две точки:  $A$  и  $B$
2. Проводим две окружности с центрами в точках  $A$  и  $B$ , одинаковыми радиусами большими половины  $AB$
3. Получим точку  $C$
4. Проводим прямую  $OC$ .



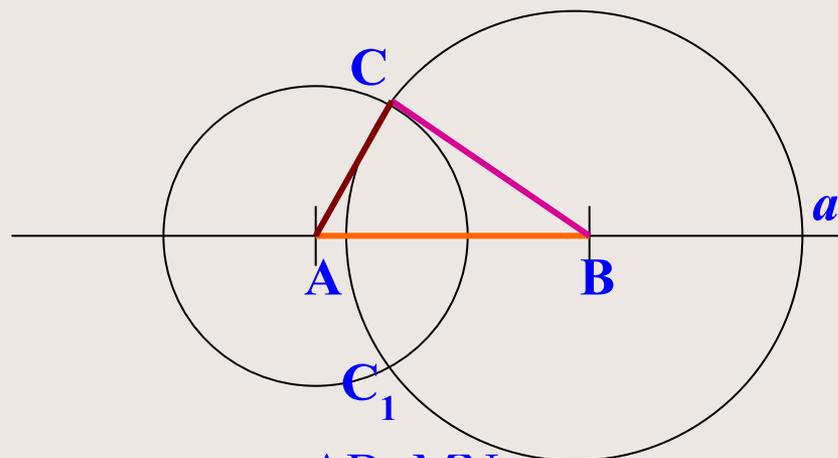
# Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними



1. Проводим прямую  $a$
2. На прямой  $a$  циркулем откладываем отрезок  $AB=MN$
3. Строим угол  $\angle CAB = \angle O$
4. На луче  $AC$  циркулем откладываем отрезок  $AC=PK$ .
5. Соединяем точки  $B$  и  $C$ .



# Построение треугольника по трём сторонам



1. Проводим прямую  $a$

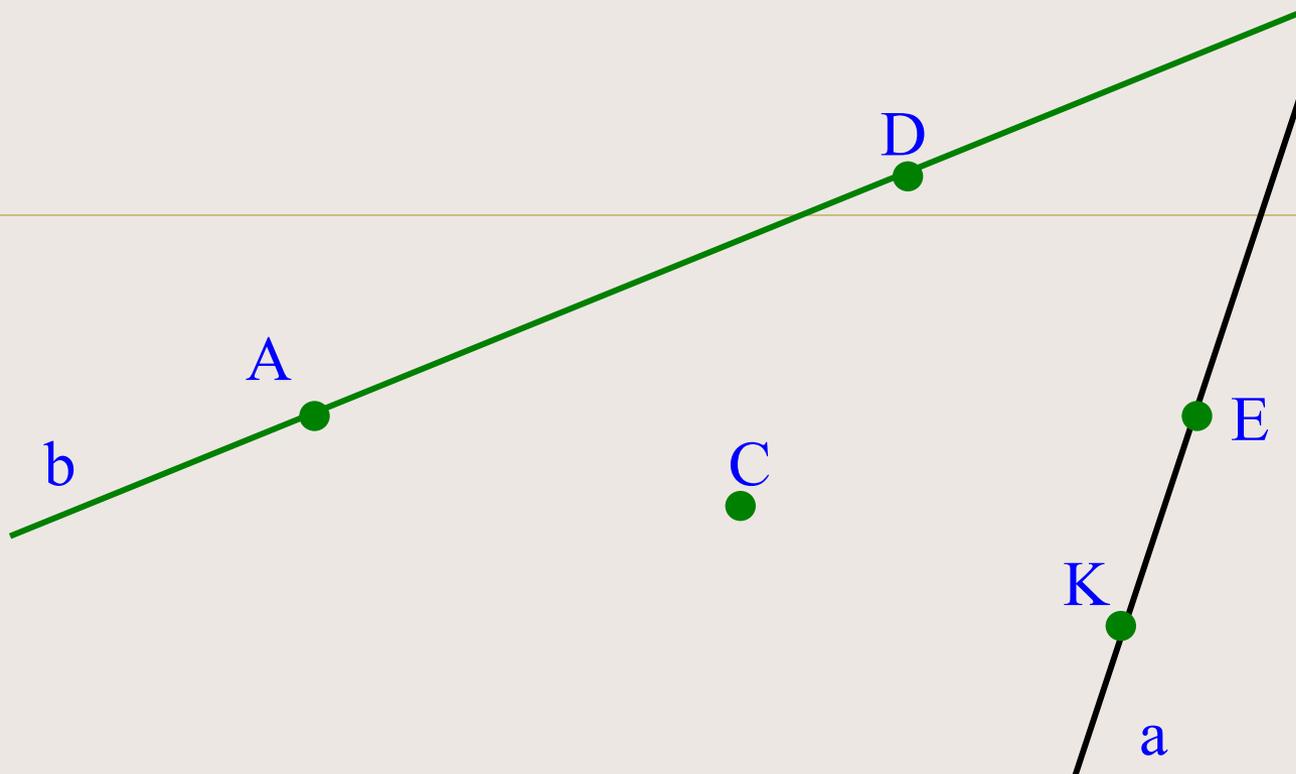
2. На прямой  $a$  циркулем откладываем отрезок  $AB=MN$

3. Строим окружность с центром в точке B и радиусом = PK

4. Строим окружность с ц. в т. A и радиусом = ED. Получим точки C и  $C_1$

5. Соединяем точки A и C, B и C.

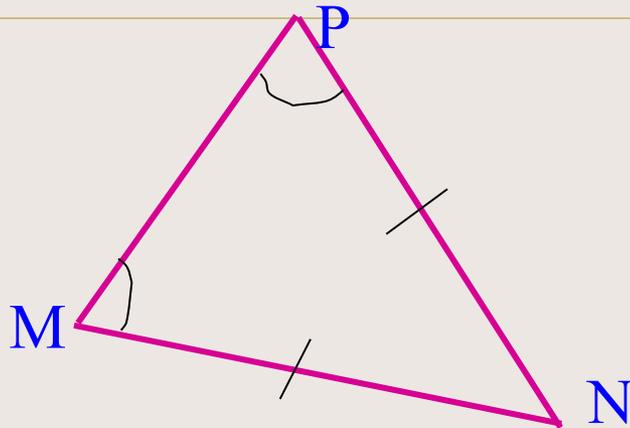




1.  $K \in a, E \in a.$
2.  $K \notin b, E \notin b, C \notin b.$
3.  $A \notin a, D \notin a, C \notin b.$
4.  $A \in b, D \in b.$



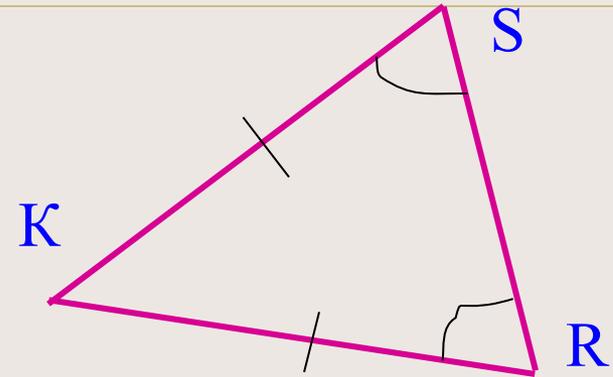
## Ответы:



Если в  $\triangle MNP$   $MN=NP$ , то

$$\angle M = \angle P,$$

как углы при основании  
равнобедренного  $\triangle MNP$ .

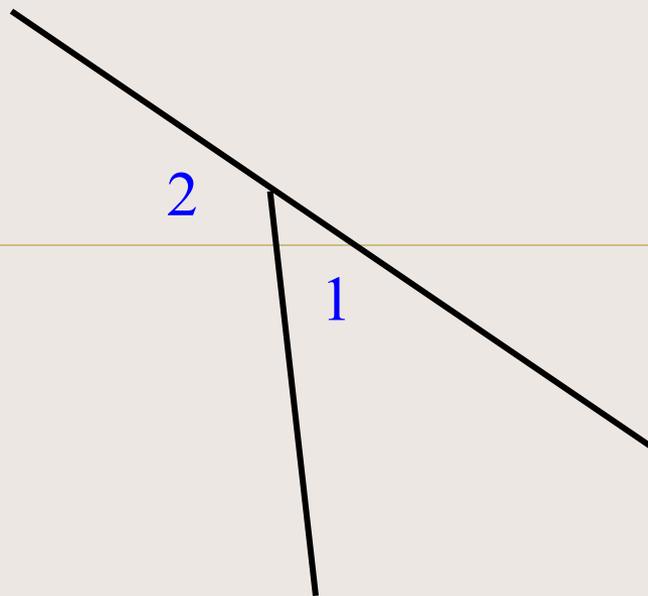


Если в  $\triangle KRS$   $\angle S = \angle R$ , то

$$KS = KR,$$

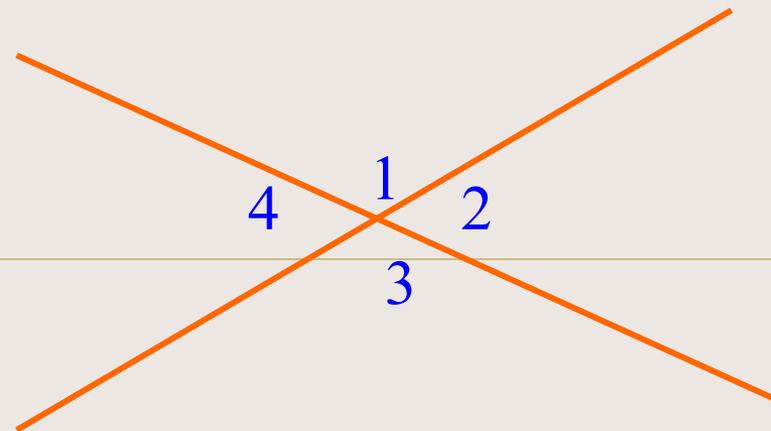
как боковые стороны  
равнобедренного  $\triangle MNP$ .





Углы 1 и 2 называются смежными.

Их свойство:  
 $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$ .

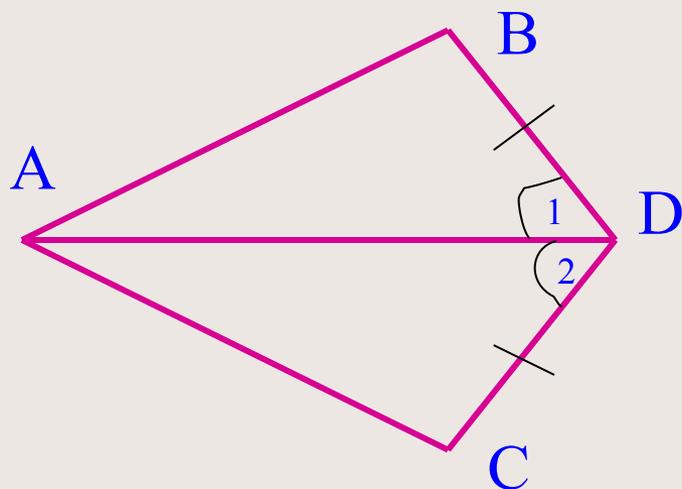


Углы 1 и 3 называются вертикальными.

Их свойство:  
 $\angle 1 = \angle 3$ .

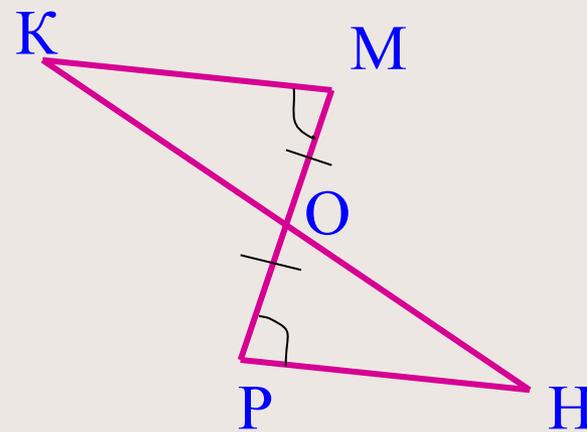


# Шпаргалка для решения задач на равенство треугольников



Почему равны треугольники  $DBA$  и  $DCA$ ?

$DB=DC$  (по условию),  $AD$ - общая сторона,  $\angle 1 = \angle 2$  (по условию)  
 $\Rightarrow$  (по 1-му признаку)  
 $\triangle DBA = \triangle DCA$ .

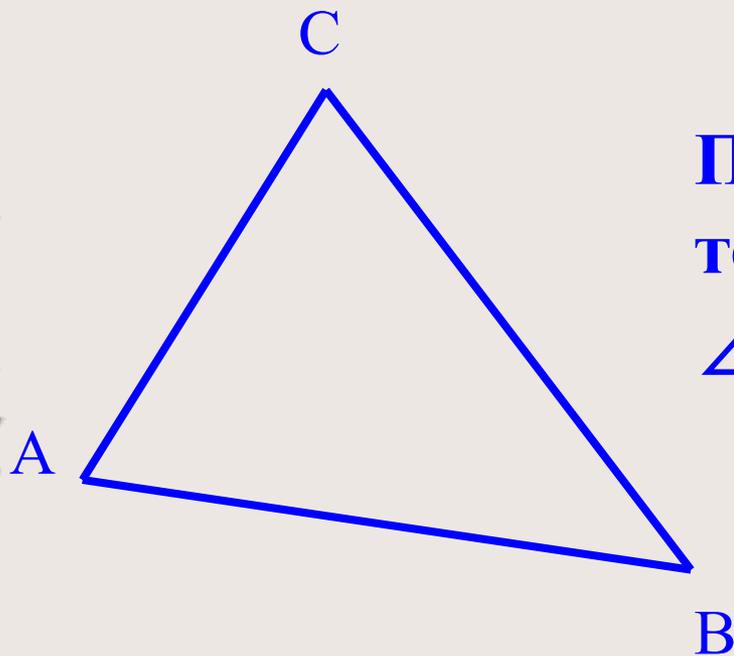


Почему равны треугольники  $OMK$  и  $OPH$ ?

$OM=OP$  (по условию),  $\angle M = \angle P$  (по условию),  
 $\angle 1 = \angle 2$  (вертикальные)  $\Rightarrow$  (по 2-му признаку)  $\triangle OMK = \triangle OPH$ .



1. В треугольнике ABC один угол равен  $50^\circ$ , второй  $70^\circ$ . Найти третий угол.



Пусть  $\angle B=50^\circ$ ,  $\angle A=70^\circ$ ,  
тогда

$$\angle C=180^\circ-(50^\circ+70^\circ)=60^\circ$$

**Ответ:  $60^\circ$ .**

Назад

**Не существует!**

**Так как величина тупого угла  
больше  $90^\circ$ , а сумма двух таких  
углов будет больше  $180^\circ$ .**



**Назад**

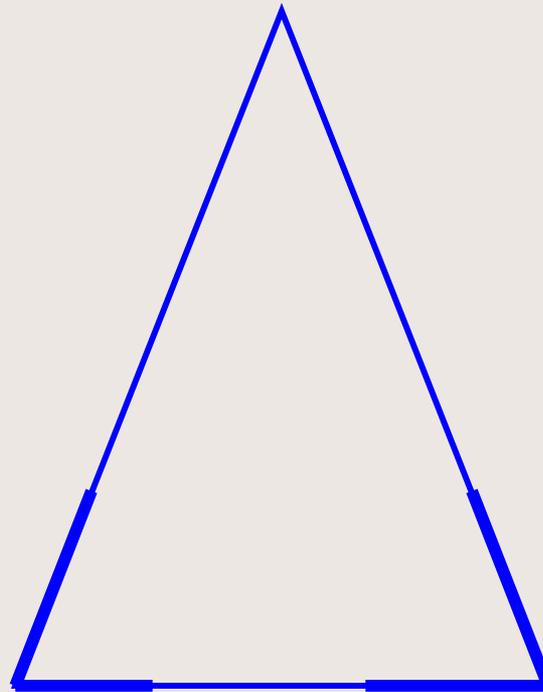
**Не существует!**

**Так как  $80^{\circ}+30^{\circ}+60^{\circ}=170^{\circ}\neq 180^{\circ}$**

**Назад**

**Два тупых угла в треугольнике!?**

**Как такое может быть?**



**Мы не можем быть тупыми  
одновременно!**

Назад

Задача: Существует ли треугольник с  
данными сторонами и почему?

8 см, 10 см, 17см

Ответ: Да, существует,  
так как

$$17 < 8 + 10$$

5 см, 7 см, 13см

Ответ: Нет, не существует,  
так как

$$13 > 5 + 7$$

Назад

## Задачи для устного решения:

1. Могут ли стороны треугольника относиться как 5:2:4?
2. Могут ли стороны треугольника относиться как 6:9:16?
3. Могут ли стороны треугольника относиться как 5:11:6?

Ответ: 1. Да    2. Нет    3. Нет    Почему?

$$5 < 2 + 4$$

$$16 > 6 + 9$$

$$11 = 5 + 6$$

Назад





Данная программа представляет собой пособие для учителя и предназначена для использования учителем при объяснении нового материала с использованием демонстрационного экрана или интерактивной доски. Может использоваться учащимися для самостоятельной подготовки к промежуточной аттестации по курсу Геометрии 7 класса на домашнем ПК.

