Системы счисления

Азарко Денис

Индо-арабская система счисления

- Каждая запись, обозначающая число, представляет собой набор из десяти основных символов 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, называемых цифрами. Поэтому такая система называется десятичной позиционной системой.
- Позиционные системы счисления очень удобны для построения арифметических алгоритмов.
- Любое положительное действительное число в индо-арабской системе счисления представимо, причем единственным образом, в виде

$$a_n \cdot 10^n + a_{n-1} \cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0 + b_1 \cdot 10^{-1} + b_2 \cdot 10^{-2} + \ldots .$$

Эту запись можно сжать, записав в виде последовательности цифр

$$a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0 , b_1 b_2 \ldots$$

Названия чисел

- Способ наименования чисел: число прежде всего делят на группы из трех цифр справа налево. Эти группы называются «периодами». Первый период называется периодом «единиц», второй – периодом «тысяч», третий – периодом «миллионов» и т.д. Каждый период читается так, как если бы он был трехзначным числом. Например,

- За триллионами следуют квадриллионы, квинтиллионы, секстиллионы, септиллионы, октиллионы, ноналлионы, дециллионы. Каждый период имеет значение, в 1000 раз превышающее значение предыдущего.
- Числа, стоящие справа от десятичной запятой, читают по правилу (по порядку слева направо): «десятые», «сотые», «тысячные», «десятитысячные» и т.д. Правильная десятичная дробь читается так, как если бы цифры после десятичной запятой образовывали целое число, после чего добавляется название позиции последней справа цифры.

Сложение

- Рассмотрим задачу: вычислить 279,8 + 5,632 + 27,54

$$
\begin{array}{l}
279{,}8 = 2\cdot 10^2 + 7\cdot 10 + 9 + 8\cdot 10^{-1} \\
5{,}632 = 5 + 6\cdot 10^{-1} + 3\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3} \\
27{,}54 = 2\cdot 10 + 7 + 5\cdot 10^{-1} + 4\cdot 10^{-2} \\
\hline
\text{сумма} = 2\cdot 10^2 + 9\cdot 10 + 21 + 19\cdot 10^{-1} + 7\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3} = \\
= 3\cdot 10^2 + 1\cdot 10 + 2 + 9\cdot 10^{-1} + 7\cdot 10^{-2} + 2\cdot 10^{-3} = \\
= 312{,}972.
\end{array}
$$

- Проделанные вычисления можно представить в иной форме, как пример алгоритма сложения, которому учат в школе. Для этого все три числа выписывают одно под другим, чтобы десятичные запятые оказались на одной вертикали:

$$
\begin{array}{r}
121 \\
279{,}8 \\
5{,}632 \\
27{,}54 \\
\hline
312{,}972
\end{array}
$$

Вычитание

- Вычитание – это действие, обратное сложению.

$$a = c - b$$

- Поскольку мы имеем дело с положительными действительными числами, должно выполняться условие $c > b$.
- Рассмотрим пример: вычислить 453,87 – 82,94

$$453{,}87 = 4\cdot10^2 + 5\cdot10 + 3 + 8\cdot10^{-1} + 7\cdot10^{-2}$$
$$82{,}94 = 8\cdot10 + 2 + 9\cdot10^{-1} + 4\cdot10^{-2},$$

или

$$453{,}87 = 3\cdot10^2 + 15\cdot10 + 2 + 18\cdot10^{-1} + 7\cdot10^{-2}$$
$$82{,}94 = 8\cdot10 + 2 + 9\cdot10^{-1} + 4\cdot10^{-2}$$
$$\text{разность} = 3\cdot10^2 + 7\cdot10 + 0 + 9\cdot10^{-1} + 3\cdot10^{-2} = 370{,}93$$

или как в школе

$$\begin{array}{r} {}^{3}\ {}^{2}\quad\ \ \\ 453{,}87 \\ -82{,}94 \\ \hline 370{,}93 \end{array}.$$

Умножение

- Умножим 32,67 на 4 – это «короткое» умножение

$$
\begin{aligned}
32{,}67\cdot 4 &= (3\cdot 10)\cdot 4 + 2\cdot 4 + (6\cdot 10^{-1})\cdot 4 + (7\cdot 10^{-2})\cdot 4 = \\
&= (3\cdot 4)\cdot 10 + 2\cdot 4 + (6\cdot 4)\cdot 10^{-1} + (7\cdot 4)\cdot 10^{-2} = \\
&= 12\cdot 10 + 8 + 24\cdot 10^{-1} + 28\cdot 10^{-2} = \\
&= 120 + 8 + 2{,}4 + 0{,}28 = \\
&= 130{,}68
\end{aligned}
$$

$$
\begin{array}{r}
32{,}67 \\
4 \\
\hline
28 \\
24 \\
8 \\
12 \\
\hline
130{,}68
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
12\ \ 2 \\
32{,}67 \\
4 \\
\hline
130{,}68
\end{array}
$$

- «Длинное» умножение – это просто неоднократно повторенное «короткое» умножение

$$
\begin{array}{r}
32{,}67 \\
72{,}4 \\
\hline
13068 \\
6534 \\
22869 \\
\hline
2365{,}308
\end{array}
$$

- Число знаков после десятичной запятой в произведении равно сумме числа знаков после запятых в множимом и множителе

Деление

- Деление – операция, обратная умножению; деление заменяет неоднократно повторенное вычитание.
- Сколько раз 3 содержится в 14? Повторяя операцию вычитания 3 из 14, мы находим, что 3 «входит» в 14 четыре раза, и еще «остается» число 2.Число 14 называется *делимым*, число 3 – *делителем*, число 4 – *частным* и число 2 – *остатком*.
    - делимое = (делитель × частное) + остаток,

  где 0 ≤ остаток < делитель.
- Пример 817,65÷23,7. Сначала сдвигаем одновременно запятые делимого и делителя вправо на столько, чтобы делитель стал целым числом

```
 8176,5 |237
 711    |34,5
 ----
 1066
  948
 ----
  1185
  1185
  ----
     0
```

Дроби

ВЫЧИСЛЕНИЯ С ДРОБЯМИ

- сложение
- вычитание
- упрощение сложных дробей
- умножение
- деление

- Сложение дробей: 1/16 + 5/16 + 7/16 = (1 + 5 + 7)/16 = 13/16. С различными знаменатели, дроби необходимо привести к общему знаменателю: при сложении 2/3, 1/6 и 3/5 наименьший общий знаменатель равен 30. Суммируя, получаем 20/30 + 5/30 + 18/30 = 43/30.
- Вычитание дробей с одинаковым знаменателем: 10/13 – 2/13 = 8/13; при различных знаменателях: 7/8 – 3/4 = 7/8 – 6/8 = (7 – 6)/8 = 1/8.
- Умножение: 5/6×4/9 = 20/54 = 10/27.
- При делении необходимо умножить первую дробь (делимое) на дробь, обратную второй (делителю): 3/4÷7/8 = 3/4×8/7 = 24/28 = 6/7.
- Сложная дробь имеет дробь либо в числителе, либо в знаменателе, либо в числителе и знаменателе

$$\frac{4-2/3}{3/8+1/4}=\frac{4/1-2/3}{3/8+1/4}=\frac{12/3-2/3}{3/8+2/8}=\frac{10/3}{5/8}=$$

$$=10/3\times 8/5=80/15=16/3.$$

Квадратный корень

- Если n – положительное действительное число, то существует единственное положительное действительное число r, такое, что $r2 = n$. Число r называется *квадратным корнем* из n и обозначается $\sqrt{n}$
- Метод вычисление квадратного корня основан на том, что если $r1$ –приближение к корню $\sqrt{n}$, то $r2 = (1/2)(r1 + n/r1)$ – более точная аппроксимация корня

Кубический корень

- Чтобы найти кубический корень из числа n, сначала мы аппроксимируем корень некоторым числом $r1$. Затем строим более точное приближение $r2 = (1/3)(2r1 + n/r12)$, которое в свою очередь уступает место еще более точному приближению $r3 = (1/3)(2r2 + n/r22)$ и т.д. Данная процедура построения все более точных приближений корня может продолжаться сколь угодно долго

Алгоритм Евклида

- Он был изложен в *Началах* Евклида (ок. 300 до н.э.).
- С его помощью вычисляется НОД двух целых чисел.
- Алгоритм формулируется в виде процедурного правила: «Разделите большее из двух данных чисел на меньшее. Затем разделите делитель на остаток от деления и продолжайте действовать так же, пока последний делитель не разделится нацело на последний остаток. Последний из делителей и будет наибольшим общим делителем двух данных чисел»
- Пример 3132 и 7200. Алгоритм в этом случае сводится к следующим действиям:

$$
\begin{aligned}
7200 &= 2 \times 3132 + 936, \\
3132 &= 3 \times 936 + 324, \\
936 &= 2 \times 324 + 288, \\
324 &= 1 \times 288 + 36, \\
288 &= 8 \times 36.
\end{aligned}
$$

- НОД совпадает с последним делителем – числом 36. Объяснение просто. Из последней строки, что число 36 делит число 288. Из предпоследней строки следует, что число 36 делит 324. Так, двигаясь от строки к строке вверх, мы убеждаемся в том, что число 36 делит 936, 3132 и 7200

Процент

- Процентом называется дробь, у которой знаменатель равен 100

проценты

Обыкновенная дробь 7/100	Десятичная дробь 0,07	Специальное обозначение, % 7%

- Примером самого распространенного типа задач на проценты: «Найти 17% от 82». Чтобы решить эту задачу, нужно вычислить произведение $0{,}17 \times 82 = 13{,}94$. В произведениях такого рода 0,17 называется ставкой, 82 – базой, а 13,94 – долей, выраженной в процентах. Три упомянутые величины связаны между собой соотношением:

$$\text{Ставка} \times \text{база} = \text{доля в процентах}.$$

- Если любые две величины известны, третью можно определить из этого соотношения
- В зависимости от того, что неизвестно, мы получаем три типа задач «на проценты»

Арифметика приближенных чисел

- Существуют различные способы округления чисел.
- Способ 1: состоит в отбрасывании младших разрядов числа. При этом если первая отбрасываемая цифра больше пяти, то последний оставшийся знак надо увеличить на единицу, если меньше, то последний знак оставляемой части сохраняется неизменным.
- Если же первая отбрасываемая цифра в точности равна пяти, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу, если она нечетная, и остается без изменений, если она четная. Например, при округлении до сотых числа 7,235 и 7,325 переходят в числа 7,24 и 7,32.
- Способ 2: связан с понятием значащих цифр и используется при машинной записи числа. Значащими цифрами приближ. числа называются цифры в его десятичной записи по порядку слева направо, начиная с первой отличной от нуля цифры и кончая той цифрой, которая стоит на месте десятичного знака, соответствующего ошибке.
- Иногда числа представляются в виде (число, заключенное в интервале от 1 до 10) ×(степень числа 10), где в первом множителе содержатся только значащие цифры числа.

Логарифмы

- К началу 17 в. сложность прикладных вычислительных задач возросла настолько, что справиться с ними «вручную» не представлялось возможным из-за слишком больших затрат труда и времени. К счастью, вовремя изобретенные Дж. Непером в начале 17 в. логарифмы позволили справиться с возникшей было проблемой
- Логарифм – это показатель степени
- Свойства логарифмов:

$$\log a \cdot b = \log a + \log b,$$
$$\log a / b = \log a - \log b,$$
$$\log a^k = k \log a,$$
$$\log a^{1/k} = (1/k) \log a.$$

- Первое и второе свойства позволяют свести любую задачу на умножение и деление к более простой задаче на сложение и вычитание. Третье и четвертое свойства дают возможность свести возведение в степень и извлечение корня к гораздо более простым действием: умножению и делению

Спасибо за внимание !