

Дискретная математика

Лекция 3. Булевы константы и вектора

Булевы константы

- **Булевыми константами** называются символы: 0 и 1.
- Символы 0 и 1 могут интерпретироваться как числа: ноль и единица, знаки: минус и плюс, потенциалы: низкий и высокий, высказывания: ложь и истина, и многое другое.
- **Булевым множеством B** называется множество булевых констант, т.е. $B = \{ 0, 1 \}$.

Булев вектор

- **Булев вектор** — это последовательность конечного числа булевых констант, называемых **компонентами** булева вектора.
- Договоримся обозначать булевы векторы *греческими буквами*, а компоненты вектора — *латинскими* с указанием *номеров компонент*.
- **Примеры.** $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n = 010101$,
 $\beta = b_1 b_2 \dots b_n = 11110000$.
- **Длиной булева вектора** назовем количество его компонент, а **весом вектора** — количество компонент, равных единице.
- **Пример.** Длина булева вектора

Теорема о числе булевых векторов

- **Теорема.** Число различных булевых векторов длины n равно 2^n .
- **Доказательство** (методом математической индукции по длине булева вектора).
- База индукции. При $n = 1$ утверждение выполняется (число различных булевых векторов длины 1 равно двум: это 0 и 1).
- Предположение. Пусть число различных булевых векторов длины n равно 2^n .
- Вывод. К булевым векторам длины n добавим $n+1$ -ю компоненту, присвоив ей сперва значение 0 (получим 2^n векторов длины $n+1$), затем — значение 1 (получим еще 2^n векторов длины $n+1$), т.е. всего $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ различных векторов длины $n+1$. ЧТД.

Представление булевыми векторами подмножеств

- Пусть заданы множество $M = \{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ и подмножество $A \subseteq M$. Построим булев вектор $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$, представляющий подмножество A , по следующему правилу: зафиксируем порядок элементов в множестве M и положим
 - $$a_i = \begin{cases} 1, & \text{если } m_i \in A; \\ 0, & \text{если } m_i \notin A. \end{cases}$$
 - **Примеры.** В множестве $M = \{2, 6, 4, 7, 8\}$ булев вектор $\alpha = 11101$ выделяет подмножество четных чисел, булев вектор $\beta = 10010$ выделяет подмножество простых чисел.

Пара булевых векторов

- Рассмотрим булевы векторы $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ и $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$.
- Говорят, что булевы векторы α и β **ортогональны по i -й компоненте**, если $a_i \neq b_i$.
- **Пример.** Булевы векторы $\alpha = 1010$ и $\beta = 1000$ ортогональны по 3-й компоненте.
- **Расстоянием между булевыми векторами (расстоянием по Хэммингу)** называют число ортогональных компонент в данной паре векторов.
- **Пример.** Расстояние по Хэммингу между булевыми векторами $\alpha = 1010$ и $\beta = 1001$ равно двум.
- Булевы векторы называются **соседними (соседями)**, если они ортогональны по одной и только одной компоненте.
- **Пример.** Булевы векторы $\alpha = 1010$ и $\beta = 1000$ соседние.
- Булевы векторы называются **противоположными (антиподами)**, если они ортогональны по всем компонентам, т.е. расстояние по Хэммингу между булевыми векторами равно их длине.
- **Пример.** Булевы векторы $\alpha = 1010$ и $\beta = 0101$ противоположные.

Пара булевых векторов

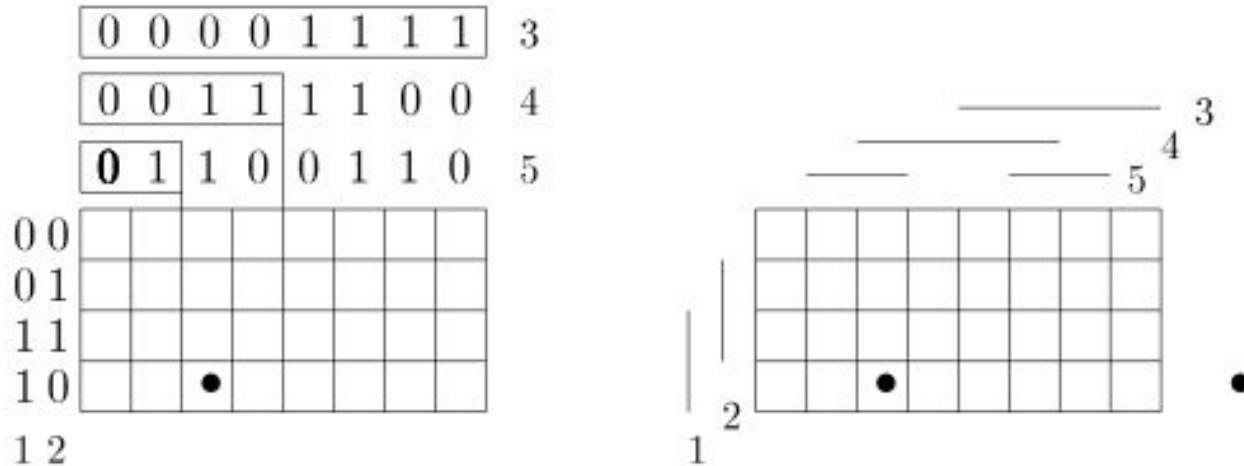
- Говорят, что булев вектор $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ **предшествует** булеву вектору $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$ (и это отношение обозначают $\alpha \preceq \beta$), если для любого $i = 1, 2, \dots, n$ выполняется условие: $a_i \leq b_i$. В этом случае также говорят, что **булев вектор β следует за булевым вектором α** , булев вектор α называют **предшественником**, а β — **последователем**.
- **Пример.** $\alpha = 1010, \beta = 1110: \alpha \preceq \beta$.
- **Определение.** Булевы векторы α и β называются **сравнимыми булевыми векторами**, если $\alpha \preceq \beta$ или $\beta \preceq \alpha$ (в противном случае говорят, что они **несравнимы**).
- **Примеры.** Булевы векторы $\alpha = 1011, \beta = 1010$ — сравнимы, а $\alpha = 1011, \beta = 0111$ — несравнимы.

Булево пространство и способы его представления

- **Булевым пространством B^n размерности n** называется множество всех булевых векторов длины n , расстояние между которыми вычисляется по Хэммингу.
- **Примеры.** $B^1 = \{0,1\} = B$, $B^2 = \{00,01,10,11\}$.
- **Способы представления:**
 - 1) **Явным перечислением векторов.**
 - **Пример.** $B^3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$.
 - 2) **Матрицей в коде Грея.** Булево пространство размерности n представляется матрицей, состоящей из 2^a строк и 2^b столбцов, где a и b — целые числа, такие что $a + b = n$. Строкам матрицы поставлены в соответствие булевы векторы длины a (их называют **кодами строк**), а столбцам — булевы векторы длины b

Пример матрицы Грея

- Пусть $n = 5$. На левой матрице показан процесс построения кодов столбцов. Выделенная клетка задает булев вектор 10011.



- Договоримся изображать коды условно: 1 – черточкой, 0 – ее отсутствием. Такой код более нагляден и быстрее рисуется.
- Код Грея обладает свойством симметрии. Места смены значений компонент называются **осями симметрии** компонент.
- Каждая ось имеет свою **зону симметрии**, т.е. область, на которую распространяется ее действие:
- зоной симметрии осей младших компонент строк и столбцов (в примере: первой и третьей) является вся матрица;
- зонами симметрии осей следующих компонент (в примере: второй и четвертой) являются половины матрицы;
- и так далее (с каждым разом размер зоны уменьшается в два раза).

Интервал в булевом пространстве

- Пусть задана пара векторов: $\alpha = a_1 a_2 \dots a_n$ и $\beta = b_1 b_2 \dots b_n$.
- **Интервалом** $I(\alpha, \beta)$ в булевом пространстве B^n , заданным парой булевых векторов α и β , таких что $\alpha \leq \beta$, называется множество всех булевых векторов γ длины n , удовлетворяющих условию $\alpha \leq \gamma \leq \beta$, т.е.
 $I(\alpha, \beta) = \{\gamma \in B^n / \alpha \leq \gamma \leq \beta\}$.
- **Пример.** $I(000, 011) = \{000, 001, 010, 011\}$.
- Булевы векторы α и β , задающие интервал $I(\alpha, \beta)$, называются **границами интервала**, вектор α — **наименьшим элементом интервала**, а β — **наибольшим**.
- Компоненты, по которым все булевы векторы интервала совпадают, называются **внешними компонентами интервала**, остальные — **внутренними**. Количество внешних компонент называется **рангом интервала** (r), а количество внутренних — его **размерностью** (s).
- **Пример.** $I(000, 011) = \{000, 001, 010, 011\}$, первая компонента — внешняя, вторая и третья — внутренние, ранг $r = 1$, размерность $s = 2$.
- Введем сжатое представление интервала **троичным вектором**, в котором 0 и 1 зададут значения внешних компонент, а черточка отметит внутренние компоненты.
- **Примеры.** $I(000, 101) = -0-$.

Крайние случаи. Мощность интервала

- **Крайние случаи:**
- $I(010, 010) = 010$, границы интервала совпадают, он состоит из одного булева вектора, ранг $r = 3$, размерность $s = 0$;
- $I(000, 111) = - - -$, интервал — все булево пространство B^3 , ранг $r = 0$, размерность $s = 3$.
- **Утверждение** о мощности интервала. Мощность интервала размерности s равна 2^s .
- **Доказательство.** Так как интервал состоит из булевых векторов со всевозможными комбинациями нулей и единиц во внутренних компонентах, а внутренние компоненты образуют булев вектор длины s , то число таких векторов равно 2^s .
- **Примеры.** Мощность интервала $-0-$ = $\{000, 001, 100, 101\}$ равна $2^2 = 4$, интервала $1-1$ = $\{101, 111\}$ равна $2^1 = 2$, интервала 101 равна $2^0 = 1$.

Алгоритм распознавания интервала

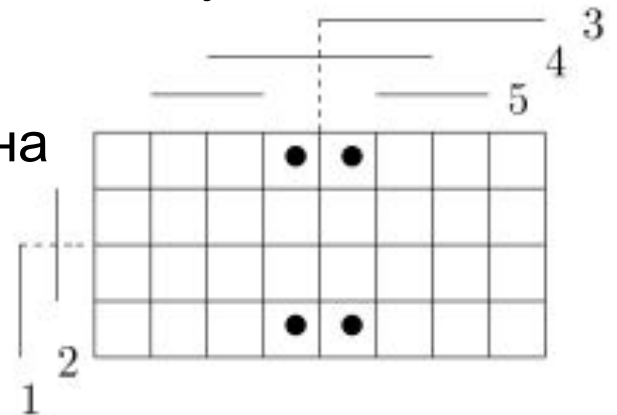
- Задано множество A булевых векторов длины n . Требуется определить, образует ли множество A интервал и, если образует, найти его границы: α, β (алгоритм основан на утверждении о мощности интервала и на теореме о числе векторов).
- **Шаг 1:** если мощность множества A не является целой степенью двойки, т.е. $|A| \neq 2^c$, где c — целое, то A — не интервал, идем на шаг 3.
- **Шаг 2:** считаем число s несовпадающих компонент в векторах множества A , т.е. число компонент, претендующих быть внутренними;
если $s \neq c$,
то A — не интервал, идем на шаг 3;
иначе A — интервал, s — его размерность, $r = n - s$ — ранг;
вектор минимального веса (из всех векторов множества A) является наименьшим элементом интервала (α), а вектор максимального веса — его наибольшим элементом (β), т.е. α и β — границы интервала.
- **Шаг 3:** конец.
- **Примеры.** $A = \{010, 011, 001\}$: множество не образует интервал, так как его мощность, равная 3, целой степенью двойки не является.
- $A = \{010, 011, 001, 100\}$: множество не образует интервал — мощность является целой степенью двойки, но показатель ($c = 2$) не совпадает с количеством компонент, претендующих быть внутренними ($s = 3$).
- $A = \{010, 011, 001, 000\}$: множество образует интервал, так как его мощность является целой степенью двойки ($c = 2$), и эта степень совпадает с количеством компонент, претендующих быть внутренними ($s = 2$), $A = I(000, 011) = 0 - -$.

Соседние интервалы

- Интервалы I_1, I_2 называют **соседними интервалами (соседями)**, если они совпадают по номерам внешних компонент, но различаются по значению одной из внешних компонент. Ее называют **ортогональной компонентой**, а интервалы I_1, I_2 — **соседями по данной компоненте**.
- **Примеры.** Интервалы $I_1 = 11-$ и $I_2 = 01-$ — соседи (по первой компоненте);
интервалы $I_1 = 01-$ и $I_2 = 10-$ — не соседи (различаются по двум внешним компонентам);
интервалы $I_1 = 01-$ и $I_2 = 1-0$ — не соседи (различаются по номерам внешних компонент).
- **Утверждение** о соседних интервалах. Два соседних интервала ранга r (размерности s) не пересекаются, но, объединяясь, образуют интервал ранга $r-1$ (размерности $s+1$).
- Операцию объединения двух интервалов I_1 и I_2 , соседних по i -й компоненте, назовем **склеиванием** интервалов, а результат их склеивания ($I = I_1 \cup I_2$) — **расширением** интервалов I_1 и I_2 по i -й компоненте.
- **Пример.** Соседние интервалы $I_1 = 11-$, $I_2 = 01-$ ранга 2 склеиваются, образуя интервал $I = -1-$ ранга 1 (он является расширением интервалов I_1 и I_2 по первой компоненте).

Способы представления интервалов

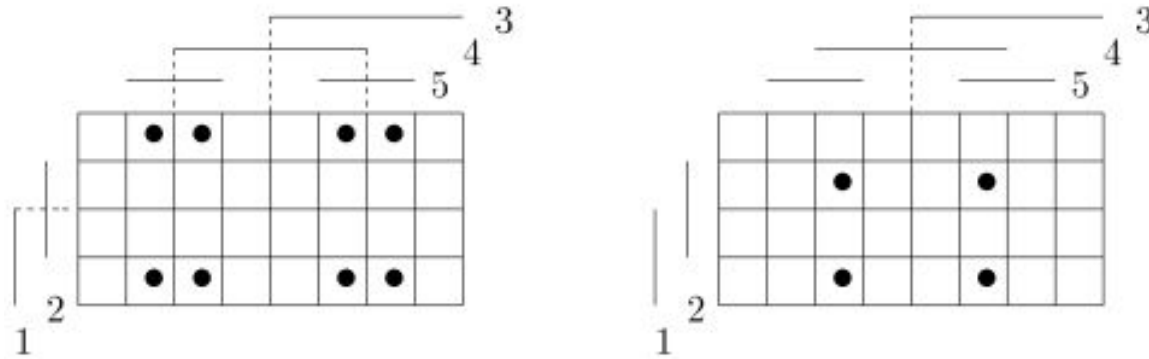
- Мы уже пользовались тремя способами представления интервалов.
- 1) *Границами* интервала.
- 2) *Явным перечислением* всех векторов, образующих интервал.
- 3) *Троичным вектором*.
- 4) *Матрица Грея*.
- Булево пространство представляется матрицей, а все булевы векторы (клетки), образующие интервал, выделяются.
- Чтобы нарисовать интервал, достаточно отметить все строки и все столбцы, коды которых совпадают с заданным интервалом по внешним компонентам — на их пересечении и будет лежать интервал.
- **Пример.** $I = -0-10$: отмечаем строки, в кодах которых вторая компонента равна 0 (верхняя и нижняя строки), и столбцы, в кодах которых четвертая компонента равна 1, а пятая — 0 (два средних столбца), — на их пересечении и лежит заданный интервал.



Алгоритм распознавания интервала на матрице Грея

- **Шаг 1:** если количество клеток заданного множества A не является целой степенью (c) двойки, то A — не интервал, идем на шаг 3.
- **Шаг 2:** если множество клеток (A) лежит симметрично относительно c осей симметрии, т.е. его можно “разрезать” осями симметрии на половины, затем каждую половину на четвертины, затем любую четвертину на осьмушки и так далее до тех пор, пока множество A не “разрежется” на отдельные клетки, то A — интервал, идем на шаг 3. иначе A — не интервал.
- **Шаг 3:** конец.

Примеры



- На левой матрице интервал $I = -0 - - 1$ (8 клеток и 3 оси симметрии) , на правой - не интервал (4 клетки, но одна ось симметрии).
- **Частные случаи**
- Очевидно, что интервалами являются следующие множества:
- каждая отдельная клетка,
- любая пара симметричных клеток, в том числе, рядом лежащих,
- любая строка и любой столбец,
- любая пара симметричных строк или столбцов, в том числе, рядом лежащих,
- любой “квадрат” размером 2×2 ,
- любая половина или четвертина матрицы,
- четверка клеток, лежащих в углах матрицы.

Задачи

1. Перечислить булевы векторы, образующие следующие интервалы: $I_1(0001, 1001)$, $I_2(01010, 11011)$, $I_3(0000, 1100)$, $I_4(000, 111)$. Задать эти интервалы на матрице Грея и вычислить их ранги.

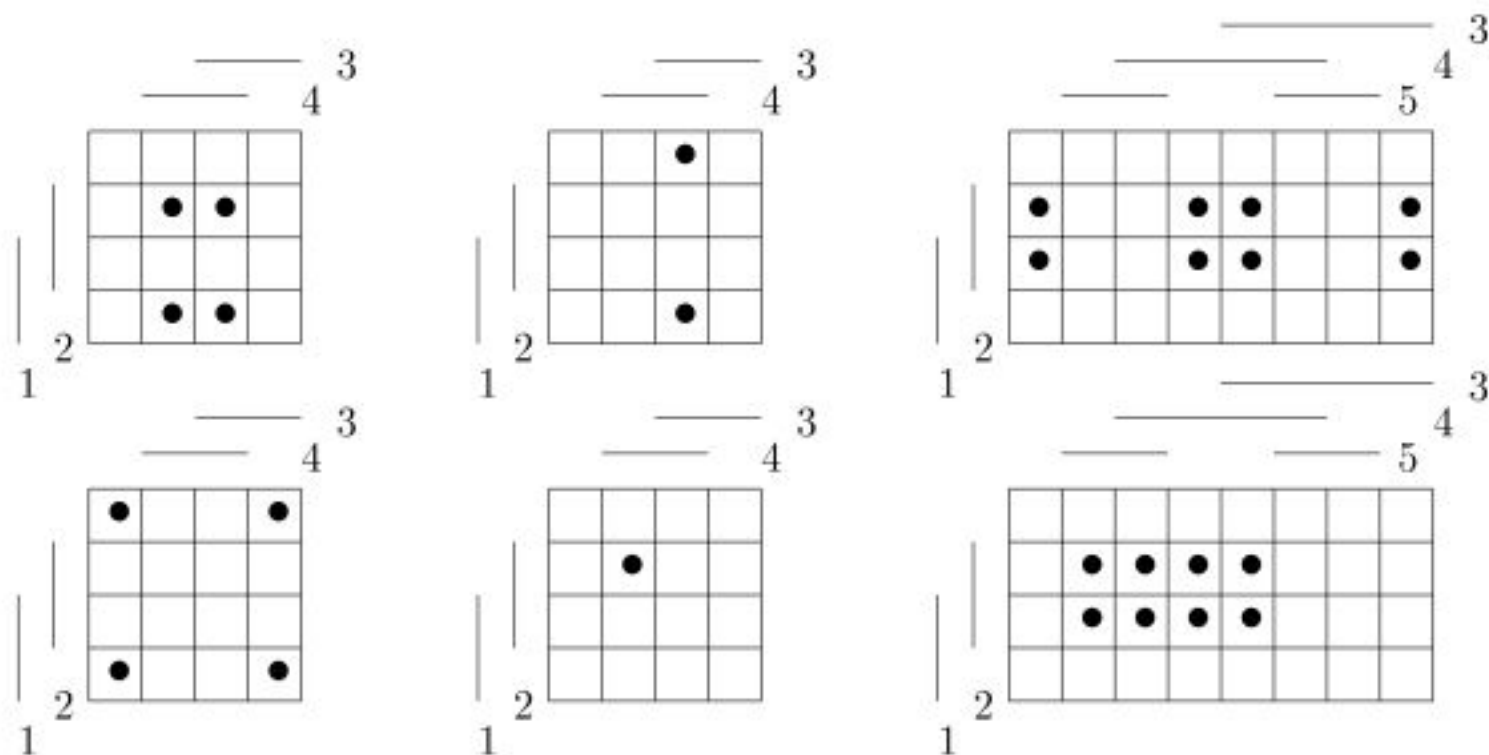
2. Перечислить все интервалы ранга 1 в булевом пространстве \mathcal{B}^3 , представив их троичными векторами.

3. Перечислить все интервалы в пространстве \mathcal{B}^5 , первая и четвертая компоненты которых являются внешними, а все остальные – внутренними. Представить интервалы на матрице Грея.

4. Являются ли следующие множества булевых векторов интервалами? Если да, то задать их троичными векторами.

$$\begin{array}{l} A_1 = 00000 \quad A_2 = 01100 \quad A_3 = 0101 \quad A_4 = 0001 \quad A_5 = 10011 \\ \quad 00001 \quad \quad 01101 \quad \quad 1011 \quad \quad 0101 \\ \quad 01000 \quad \quad 00100 \quad \quad 1101 \\ \quad \quad \quad 00101 \quad \quad 0001 \\ \quad \quad \quad 10101 \\ \quad \quad \quad 10100 \\ \quad \quad \quad 11100 \\ \quad \quad \quad 11101 \end{array}$$

5. Образуют ли интервал векторы, выделенные на матрице Грея? Если да, то представить интервал троичным вектором и найти его границы.



6. Найти на матрице Грея все интервалы, соседние для интервала $I = 10 - 0 -$.