ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

Лекция

Матрицы и определители

Учебные цели:

1. Ознакомить обучающихся со структурой дисциплины «Высшая математика», ее целями, а также задачами, ставящимися при ее изучении.

2. Сформировать представление о матрице как математическом объекте, о видах матриц и их применении для решения различных задач.

3. Изложить особенности выполнения основных операций над матрицами и их характерные свойства.

Учебные вопросы:

1. Матрица.

2. Виды матриц. Операции над матрицами.

3. Понятие определителя. Свойства определителей.

ПЕРВЫЙ УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

МАТРИЦА

Одной из характерных особенностей развития современного общества является широкое применение математических методов и компьютерной техники в самых различных областях человеческой деятельности.

Наиболее активно процесс внедрения математики в науку, технику, производство начался в середине XX века после появления и быстрого совершенствования ЭВМ.

Обратимся к сущности понятия «*математика*». Слово «математика» происходит от греческого «матема», означающего: «знание, наука».

Многие крупнейшие ученые (среди них Жозеф Фурье и Анри Пуанкаре) видели главную задачу математики в содействии объяснению законов природы. Галилею принадлежат замечательные слова: «великая книга природы написана языком математики».

Математика оказывает существенную помощь в изучении явлений и процессов, встречающихся как в различных учениях о природе, так и в различных науках об обществе. Везде, где есть необходимость рассматривать эти явления и процессы с количественной стороны.

Особенностью математики является ее *абстрактность*, т.е. объекты исследования математики не встречаются в действительном мире (безразмерная точка, линия, не имеющая толщины и ширины и т.д.). Абстрактность в математике необходима: она порождается не тем, что математика мало связана с практической деятельностью, а, наоборот, тем, что она приспособлена к самым разнообразным видам этой деятельности. Так, выяснив в геометрии, чему равен объем «абстрактного» цилиндра, мы можем легко найти объем любого конкретного цилиндра, является ли он поршнем двигателя, или деталью другой машины, колонной или частью пространства, занятого электрическим полем.

Мы начинаем курс высшей математики с изучения одного из его основных разделов – линейной алгебры. Далее изучим основы векторной алгебры, аналитической геометрии, дискретной математики, основных разделов математического анализа, теории вероятностей и математической статистики.

На сегодняшней лекции мы ознакомимся с основными положениями теории матриц. Для этого нам необходимо:

- рассмотреть понятие системы линейных уравнений;
- изучить матрицу как математический объект, используемый для решения таких систем;
- рассмотреть различные виды матриц;
- научиться выполнять операции над ними.

В высшей математике используют достаточно простую, а главное, компактную форму записи и решения задач, а именно, *матричную форму* (или форму *матрицы*).

Числовой матрицей или просто *матрицей* называется любая прямоугольная таблица чисел. Горизонтальные ряды матрицы называются *строками*, а вертикальные – *столбцами*, а сами числа – *элементами матрицы*.

В общем случае элементами матрицы могут быть различные математические объекты: числа, функции, многочлены и т. д. Однако в нашем курсе будут рассматриваться в основном числовые матрицы, т.е. матрицы, у которых элементами являются числа.

Если матрица содержит m строк и n столбцов, то говорят, что матрица имеет *размерность m на n* и обозначают размерность в виде $m \times n$.

Записывают матрицы в круглых скобках, не ставя между элементами никаких знаков. При необходимости, за матрицей внизу справа пишется ее размерность. Например,

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}_{2\times3}$$ – матрица размерности 2×3.

Матрицы обозначаются большими буквами латинского алфавита, например, A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются соответствующие маленькие буквы с двойной нумерацией, например, a_{ij}, где i – номер строки, а j – номер столбца данного элемента.

Например, матрица размерности $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} \quad (2)$$

Матрица (2) является матрицей системы линейных уравнений (1).

Иногда для обозначения матрицы используют двойные вертикальные линии.

$$A_{m \times n} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \equiv \left\| a_{ij} \right\|_{m \times n}.$$

Рассмотрим матрицу системы уравнений вида:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Для матриц одинаковой размерности существует понятие равенства.

Две матрицы A и B одной размерности называются *равными*, если у них равны соответствующие элементы, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$, для $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Вопрос 2. Виды матриц. Операции над матрицами

Матрица называется *нулевой* (или *нуль-матрицей*), если все ее элементы равны нулю.

Например, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей-строкой.*

Например, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Матрица, состоящая из одного столбца, называется *матрицей-столбцом.* Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ВТОРОЙ УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

ВИДЫ МАТРИЦ. ОПЕРАЦИИ НАД МАТРИЦАМИ

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*. Число строк, а, следовательно, и число столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

– квадратная матрица третьего порядка.

Элементы квадратной матрицы, для которых $i=j$, называются *диагональными* и образуют *главную диагональ*. Таким образом, главная диагональ состоит из элементов, образующих диагональную линию, идущую из левого верхнего угла в правый нижний угол квадратной матрицы. Элементы, стоящие на диагональной линии, идущей из правого верхнего угла в левый нижний, образуют *побочную диагональ*.

Квадратная матрица называется *матрицей треугольного вида*, если все ее элементы, расположенные под (или над) одной из диагоналей, равны нулю.

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, а остальные – нулю, называется *единичной*.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \longleftarrow \textit{Матрица треугольного вида} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longleftarrow \textit{Единичная матрица}$$

Подведем итог: в ходе рассмотрения первого учебного вопроса вы получили представление об общем виде системы линейных уравнений, о матрице системы и о видах матриц.

Операции над матрицами

Над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны числовым операциям, а некоторые носят особый характер.

1. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число α (или числа α на матрицу A) называется матрица $A \cdot \alpha$, каждый элемент которой есть произведение соответствующего элемента матрицы A на число α.

Таким образом, чтобы умножить матрицу на число, нужно все элементы данной матрицы умножить на это число.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 0{,}5 \\ -8 & 1 \end{pmatrix}$, то $A \cdot 4 = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ -32 & 4 \end{pmatrix}$

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно вынести за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 6 & 10 & 4 \\ -8 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Сложение матриц

Суммой двух матриц A и B одной и той же размерности называется матрица той же размерности, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B.

Таким образом, чтобы сложить две матрицы, нужно сложить их соответствующие элементы.

Необходимо помнить, что складывать можно только матрицы одинаковой размерности.

Пример 2.1 $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 & 9 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$

3. Вычитание матриц

Вычитание можно определить через рассмотренные ранее операции: $A - B = A + (-1) \cdot B$

Разностью матриц A и B одинаковой размерности называется матрица, каждый элемент которой равен разности соответствующих элементов A и B.

Таким образом, чтобы из матрицы A вычесть матрицу B, нужно из элементов матрицы A вычесть соответствующие элементы матрицы B.

Пример 2.2. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 7 \\ 8 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 12 & -3 & -3 \end{pmatrix}$

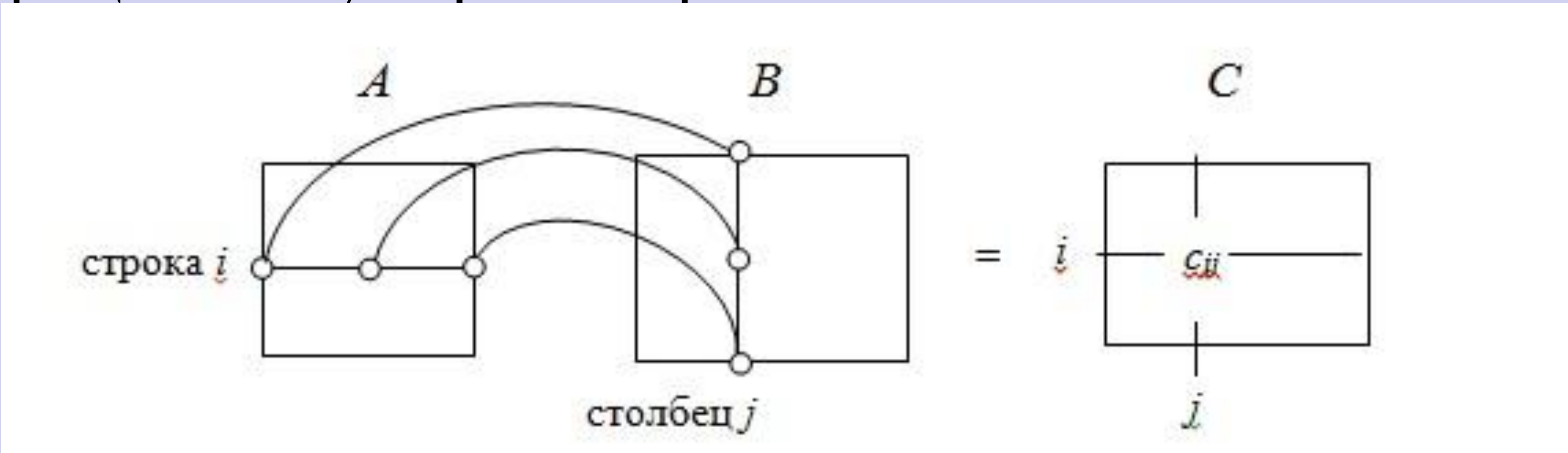
4. Умножение матриц

Произведение матриц имеет место *только для матриц определенных размерностей*. Матрицу A можно умножить на матрицу B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B, т.е. если A имеет размерность $m \times k$, то матрица B должна иметь размерность $k \times n$. Произведением будет матрица размерности $m \times n$:

То есть $A_{m\times k} \cdot B_{k\times n} = C_{m\times n}$

произведением матрицы $A_{m\times k}$ на матрицу $B_{k\times n}$ называется матрица $C_{m\times n}$, каждый элемент которой равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B.

Именно для того, чтобы можно было составить такую сумму, и требуется равенство числа столбцов первой матрицы числу строк второй:



Пример 2.3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 + 2\cdot(-1) & 1\cdot 1 + 2\cdot 2 \\ 2\cdot 2 + 0\cdot(-1) & 2\cdot 1 + 0\cdot 2 \\ -1\cdot 2 + 1\cdot(-1) & -1\cdot 1 + 1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Замечание. Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами. Однако для произведения матриц практически все основные свойства не выполняются в общем случае.

Особенности умножения матриц

1. *Для произвольных матриц* $AB \neq BA$. Так как возможно, что произведение AB существует, а произведение BA не имеет смысла, либо, если и то, и другое произведения существуют, то полученные матрицы могут быть разных размерностей, но даже, если с размерностями будет все в порядке, в общем случае соответствующие элементы матриц AB и BA могут быть не равны.

Пример 2.4. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Тогда $AB = \begin{pmatrix} 17 & 1 \\ -16 & 2 \end{pmatrix}$ $BA = \begin{pmatrix} 15 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ т.е. $AB \neq BA$.

Однако существует матрица, для которой переместительный закон умножения выполняется. Если матрица A – квадратная матрица порядка n, и E − единичная матрица того же порядка, то $AE = EA = A$.

Доказать это равенство можно простым перемножением матриц. Кроме единичной существуют и другие матрицы, при умножении которых переместительный закон выполняется. Их называют ***перестановочными***.

Пример 2.5. Перестановочными матрицами являются матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \qquad AB = BA = \begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 14 & 9 \end{pmatrix}$$

2. Если произведение матриц равно нулю, то совсем не обязательно, чтобы какой-либо из сомножителей был нулевой матрицей.

Пример 2.6. $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;

- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получена из другой путем элементарных преобразований.

6. Транспонирование матрицы

При решении различных задач бывает удобным поменять у матрицы строки и столбцы местами, т.е. применить операцию транспонирования матрицы.

Матрица, полученная из данной матрицы A заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *транспонированной* к данной.

Обозначение: $A^{т}$.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, то $A^{т} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

Итак, при изучении второго учебного вопроса вы познакомились с операциями над матрицами, рассмотрели основные их свойства.

Таким образом, мы рассмотрели основные понятия теории матриц, которыми будем пользоваться в дальнейшем. Изучили различные виды матриц, ознакомились с операциями над матрицами.

ТРЕТИЙ УЧЕБНЫЙ ВОПРОС

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛЕЛЕИТЕЛЯ. СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕЛЕИТЕЛЕЙ

С понятием матрицы тесно связано понятие **определителя**.

Определители широко применяются в линейной и общей алгебре, в аналитической геометрии, в математическом анализе, физике, механике и других науках.

Теория определителей возникла в XVI веке и развита более полно в XVII веке в связи с задачей решения систем линейных алгебраических уравнений.

На предыдущей лекции мы убедились, что над матрицами, как и над числами, можно производить ряд операций, причем некоторые из них аналогичны числовым операциям (умножение на число, сложение, перемножение матриц), а некоторые носят особый характер (например, транспонирование). Данная лекция посвящена еще одной специфической операции над матрицей – вычислению ***определителя*** матрицы.

Понятие определителя.

Квадратной матрице A порядка *n* можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$ или Δ), называемое ее **определителем (или *детерминантом*)**, следующим образом.

1.n =1. *Определителем матрицы первого порядка*

$A = (a_{11})$ называется элемент a_{11}.

В принятых обозначениях: $|a_{11}| = a_{11}$.

Например, для $A = (5)$ определитель $|5| = 5$;

для $A = (-4)$ определитель $|-4| = -4$.

2. *n*=2. *Определителем матрицы второго порядка* называется число, определяемое по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

Определитель второго порядка вычисляется так: произведение элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Например,

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 4 \cdot (-2) = 29$$

3. n=3. *Определителем матрицы третьего порядка* называется число, определяемое по формуле:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \qquad (1)$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{31}a_{12}a_{23} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

Это число представляет собой алгебраическую сумму шести произведений, при этом у первых трех произведений знак не меняется, а у последних – меняется на противоположный.

Формулу (1) можно легко запомнить, используя следующую схему, называемую *правилом треугольника* или *правилом Саррюса:*

Словесно это правило можно сформулировать так: со своим знаком надо взять произведение элементов, соединенных главной диагональю, и произведения элементов, находящихся в вершинах больших треугольников, у которых основания параллельны главной диагонали. С противоположным знаком берутся аналогичные произведения, только относительно побочной диагонали.

Пример 3.1

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 3\cdot 1 + 0\cdot 1\cdot 0 - (2\cdot 2\cdot 0 + 2\cdot 1\cdot 1 + 4\cdot 3\cdot 0) =$$

$$= 16+6+0-0-2-0 = 20.$$

Вычисление определителя матрицы n-го порядка связано с понятиями минора и алгебраического дополнения.

В дальнейшем, вместо слов «определитель матрицы n-го порядка» будем говорить просто «определитель n-го порядка».

Пусть дана квадратная матрица n-го порядка.

Минором $\boldsymbol{M_{ij}}$ некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент.

Алгебраическим дополнением $\boldsymbol{A_{ij}}$ элемента a_{ij} матрицы A называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$\boldsymbol{A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}},$$

т.е. алгебраическое дополнение либо совпадает со своим минором, когда сумма номеров строки и столбца – четное число, либо отличается от него знаком, когда сумма номеров строки и столбца – нечетное число.

Например, для элементов a_{11} и a_{12} матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

миноры $M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 52$ $M_{12} = \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 8$

а алгебраические дополнения:

$A_{11}=(-1)^{1+1} \cdot M_{11}=52;\ A_{12}=(-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -8.$

Свойства определителей

Вычисление определителей (особенно высших порядков) довольно часто упрощается, если воспользоваться их свойствами.

1. Основное свойство определителей (разложение определителей по элементам строки или столбца):

определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения, т.е.

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}\,, \qquad (2)$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ или

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}\,, \qquad (3)$$

для любого $j = 1, 2, \ldots, n$

Пример 3.1. Вычислим определитель матрицы A с помощью разложения по первой строке и сверим результат с тем, что получен при использовании метода треугольника (Саррюса) (см. пример 1.1).

$$det\, A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 0 + 2\cdot(-1)^4\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 + 2\cdot 3 = 14 + 6 = 20$$

Ответ тот же, что и в примере 1.1.

Замечание 1: для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, так как соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

***Замечание 2*:** с помощью разложения по строке или столбцу любой определитель *n*-го порядка можно свести к сумме определителей, порядок которых на 1 меньше и т.д., пока не будут получены определители 3-го или 2-го порядков, вычисление которых уже не представляет трудности.

Последующие свойства рассмотрим для определителей третьего порядка, хотя они присущи определителям любых порядков.

2. Если строка или столбец определителя состоит из нулей, то определитель равен нулю.

Доказательство. Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что по формуле (1) определитель выражается в виде суммы, каждое слагаемое которой содержит множителем один элемент из каждой строки и из каждого столбца.

3. При перестановке любых параллельных рядов определитель меняет знак на противоположный.

Свойство доказывается вычислением детерминанта по формуле (1).

4. Общий множитель элементов любого ряда можно вынести за знак определителя.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

<u>Доказательство</u> этого свойства, как и доказательство свойства 1, основывается на формуле (1), в которой определитель представляет собой сумму, каждое слагаемое которой содержит множителем один элемент из каждой строки и из каждого столбца.

5. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Доказательство. В самом деле, при перестановке двух одинаковых параллельных рядов содержание элементов определителя не изменится, однако по свойству 3 должен измениться его знак. Но $\Delta = -\Delta$ только в том случае, если $\Delta = 0$.

6. Если элементы двух параллельных рядов определителя пропорциональны, то он равен нулю.

Доказательство. Действительно, если элементы двух параллельных рядов пропорциональны, то согласно свойству 4, общий множитель можно вынести за знак определителя, в результате остается определитель с двумя одинаковыми рядами, который согласно свойству 5, равен нулю.

7. Величина определителя не изменится, если все строки и столбцы поменять местами (другими словами, при транспонировании матрицы определитель не меняется – «равноправность строк и столбцов»):

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Для доказательства свойства достаточно вычислить по формуле (1) значения определителей, стоящих слева и справа.

8. Если каждый элемент n-го столбца (n-й строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, один из которых в n-ом столбце (n-ой строке) имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой – вторые; элементы, стоящие на остальных местах у всех трех определителей, одни и те же:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda_2 & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ \lambda_2 & a_{22} & a_{23} \\ \lambda_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Чтобы убедиться в равенстве полученных выражений, достаточно применить формулу (1).

9. Величина определителя не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженного на любое число («элементарные преобразования определителя»).

Доказательство. Действительно, полученный в результате такого прибавления определитель, согласно свойству 8, можно разбить на сумму двух определителей, первый из которых совпадает с исходным, а второй имеет два пропорциональных столбца, и в силу свойства 6 он равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+\lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+\lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+\lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{22} & a_{22} & a_{23} \\ \lambda a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

10. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю. (Это утверждение называют также *теоремой аннулирования*).

Доказательство. Покажем, например, что справедливо равенство

$$a_{12}A_{11} + a_{22}A_{12} + a_{32}A_{13} = 0$$

Заменим в определителе Δ первый столбец на произвольные числа h_1, h_2, h_3. Алгебраическими дополнениями элементов h_1, h_2, h_3 являются, соответственно, элементы A_{11}, A_{21}, A_{31}. Согласно свойству 1, имеем

$$\begin{vmatrix} h_1 & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = h_1 A_{11} + h_2 A_{21} + h_3 A_{31}$$

Если теперь положить $h_1=a_{12}$, $h_2=a_{22}$, $h_3=a_{32}$, то получим определитель с двумя одинаковыми столбцами, который, согласно свойству 2, равен нулю. Таким образом, интересующее нас равенство доказано.

Пример 3.2. Используя свойства, вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 & -10 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{vmatrix}$$

<u>Решение.</u> Видим, что 1-й и 3-й столбцы определителя пропорциональны. По свойству 6, детерминант равен нулю.

Проверим результат, вычислив определитель по правилу треугольника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 7 & -10 \\ -2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -6 \end{vmatrix} = 5 \cdot 3 \cdot (-6) + (-2) \cdot 1 \cdot (-10) + 7 \cdot 4 \cdot 3 -$$

$$-(-10) \cdot 3 \cdot 3 - (-2) \cdot 7 \cdot (-6) - 5 \cdot 1 \cdot 4 = -90 + 20 + 84 + 90 - 84 - 20 = 0$$

Пример 2.3. Используя свойства, вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение. Вычислим данный определитель разложением по элементам 3-го столбца.

Руководствуясь свойством 9, преобразуем определитель таким образом, чтобы в 3-м столбце было не менее двух нулевых элементов. Для этого выполним следующие действия: к первой строке прибавим вторую, умноженную на (–1), к третьей – вторую, умноженную на (–3); далее полученный определитель разложим по элементам третьего столбца:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -3 & -5 & 0 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -2$$

Итак, мы рассмотрели основные свойства определителей.