Элементы теории множеств

Понятие множества

Множество - это совокупность определенных различаемых объектов, причем таких, что для каждого можно установить, принадлежит этот объект данному множеству или нет

- Обычно множества обозначают большими буквами: A,B,X N ,…, а их элементы – соответствующими маленькими буквами: a,b,x,n…
- В частности, приняты следующие обозначения:
- $\mathbb{N}$ – множество натуральных чисел;
- $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел;
- $\mathbb{Q}$ – множество рациональных чисел;
- $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел (числовая прямая).
- $\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел. И верно следующее:
- $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$

Как правило, элементы множества обозначаются маленькими буквами, а сами множества - большими. Принадлежность элемента **m** множеству **M** обозначается так: **m∈M**, где знак **∈** является стилизацией первой буквы греческого слова

$\in\sigma\tau\iota$ (есть, быть),

знак непринадлежности: $\notin$

- Множества могут быть конечными, бесконечными и пустыми.
- Множество, содержащее конечное число элементов, называется **конечным**.
- Если множество не содержит ни одного элемента, то оно называется **пустым** и обозначается Ø.

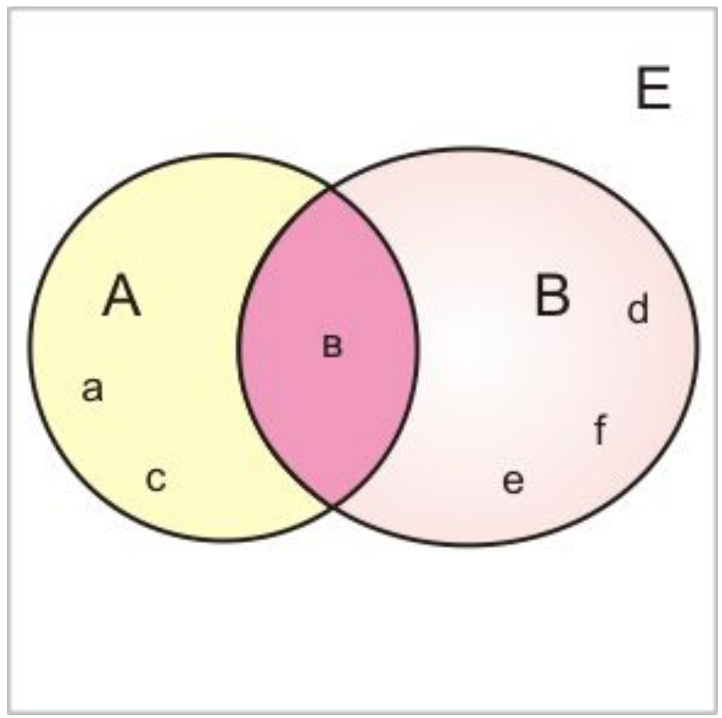
Например:

- множество студентов 1курса - конечное множество;
- множество звезд во Вселенной - бесконечное множество;
- множество студентов, хорошо знающих три иностранных языка (японский, китайский и французский), видимо, пустое множество.

Способы задания множеств

- Существуют три способа задания множеств:
- ***1) описание множества***
- Примеры: $Y=\{y|1\leq y \leq 10\}$ –множество значений y из отрезка [1;10]
- $X=\{x|x>2\}$ – множество всех чисел x, больших 2.
- ***2) перечисление множества***
- Примеры:
- A={а,б,в}- три начальные буквы русского алфавита
- N={1,2,3…}-натуральные числа
- ***3)графическое*** задание множеств происходит с помощью диаграмм Эйлера-Венна

- Заданы два множества: $A = \{a, b, c\}$ и $B = \{b, d, e, f\}$. Если элементов множеств немного, то они могут на диаграмме указываться явно.



- Множество **A** называют подмножеством множества **B** (обозначается **A⊆B**), если всякий элемент множества **A** является элементом множества **B**:

$$A \subseteq B \leftrightarrow a \in A \rightarrow a \in B$$ см.рис 1.1

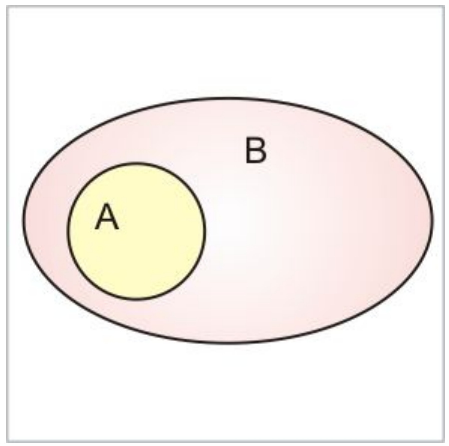


Рис. 1.1

При этом говорят, что B содержит A, или B покрывает A

Невключение множества C в множество B, обозначается так: $C \not\subset B$

- Множества A и B **равны** (A=B) тогда и только тогда, когда , $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$, т. е. элементы множеств A и B совпадают.

- **Пример**: A={1,2,3}, B={3,2,1}, C={1,2,3,3}- равны. Множество C – это множество A, только в нем элемент 3 записан дважды.

- **Пример**: A={1,2}, B={1,2,3}- НЕ РАВНЫ
- Семейством множеств называется множество, элементы которого сами являются множествами.
- Пример: A={{Ø},{1,2},{3,4,5}}- семейство, состоящее из трех множеств.

- Каждое непустое подмножество A≠ Ø имеет по крайней мере два различных подмножества: само множество A и Ø.

- Множество A называется собственным подмножеством множества B, если $A \subseteq B$, а $B \not\subseteq A$. Обозначается так: $A \subset B$.
- Например, $B = \{a, b, c, d, e, f\}, A = \{a, c, d\}, A \subset B$

Принято считать, что пустое множество является подмножеством любого множества.

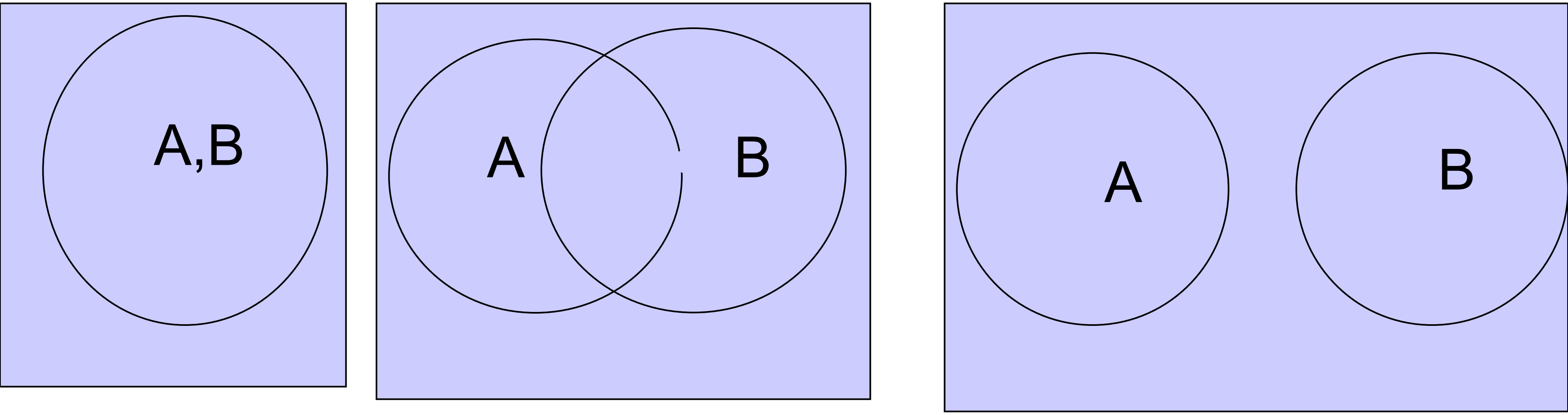
Мощностью конечного множества M называется число его элементов. Обозначается $|M|$

Например, $|B|=6.$ $|A|=3.$

Операции над множествами

- **Объединением** (суммой) множеств A и B (обозначается $A \cup B$) называется множество C тех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств A или B. Возможны три случая:
- 1) A=B;
- 2) множества имеют общие элементы;
- 3) множества не имеют общих элементов.
- Примеры:
- 1)$A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,2,3\}$, тогда $A \cup B=\{1,2,3\}$.
- 2)$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$, тогда $A \cup B=\{1,2,3,4,5,6\}$
- 3) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,6,8\}$, тогда $A \cup B=\{1,2,3,4,6,8\}$

- Рассмотренные случаи наглядно проиллюстрированы на рисунке



- **Пересечением** множеств A и B называется новое множество C, которое состоит только из элементов одновременно принадлежащих, множествам A, B
- Обозначение $C=A\cap B$

- Возможны три случая:
- 1) A=B
- 2) множества имеют общие элементы
- 3) множества не имеют общих элементов.

- Примеры:
- 1)$A=\{1,2,3\}$, $B= \{1,2,3\}$, тогда $A \cap B= \{1,2,3\}$.
- 2)$A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5,6\}$, тогда $A \cap B=\{2,3\}$
- 3) $A=\{1,2,3\}$, $B=\{4,6,8\}$, тогда $A \cap B=\varnothing$

- **Разностью** множеств А и В называется множество С, состоящее из элементов принадлежащих только множеству А и не принадлежащих В.

- Обозначение: $C=A\backslash B$

- Даны два множества:
- $A=\{1,2,3,b,c,d\}$, $B=\{2,b,d,3\}$.
- Тогда:
- $A \cup B=\{1,2,3,b,c,d\}$
- B подмножество A
- $A/B=\{1,c\}$
- $A \cap B=\{2,3,b,d\}$

- **Декартовое (прямое) произведение А и В** - это новое множество С, состоящее из упорядоченных пар, в которых первый элемент пары берется из множества А, а второй из В.
- $A=\{1,2,3\}$
- $B=\{4,5\}$
- $C=A\times B = \{(1;4); (1;5); (2;4); (2;5); (3;4); (3;5)\}$
- $D=B\times A = \{(4;1); (4;2); (4;3); (5,1); (5;2); (5;3)\}$
- $A\times B \neq B \times A$, кроме если $A=B$ (в этом случае равенство выполняется)
- Мощность декартова произведения равна произведению мощностей множеств А и В:
    - $|A \times B|=|A|\cdot|B|$

Свойства:

1). если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$ (транзитивность),
2). если $A \subset B$ и $B \subset A$, то $A = B$,
3). $A \cup A = A$,
4). $A \cup \varnothing = A$,
5). $A \cap A = A$,
6). $A \cap \varnothing = \varnothing$,
7). $A - A = \varnothing$,
8). $A \cup B = B \cup A$ (коммутативность сложения),
9). $A \cap B = B \cap A$ (коммутативность умножения),
10). $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (ассоциативность сложения),
11). $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (ассоциативность умножения),
12). $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно сложения),
13). $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$ (дистрибутивность умножения относительно вычитания),
14). $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность сложения относительно умножения).

Задача.

- Опрос 100 студентов дал следующие результаты о количестве студентов, изучающих различные иностранные языки: испанский − 28; немецкий − 30; французский − 42; испанский и немецкий − 8; испанский и французский − 10; немецкий и французский − 5; все три языка − 3.
- а) Сколько студентов не изучают ни одного языка?
- б) Сколько студентов изучают один французский язык?

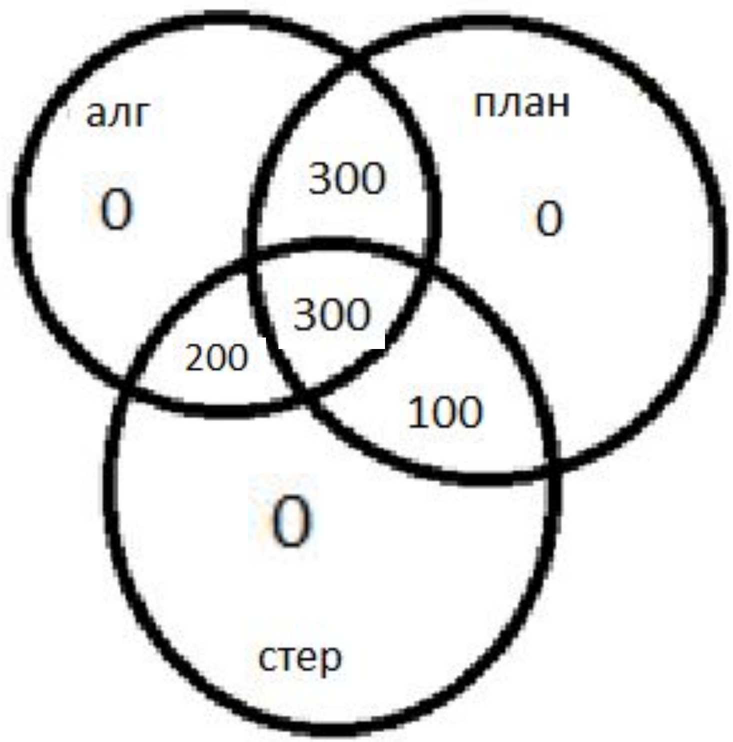
Решение:

- Только французский язык изучают 30 человек.
- Ни одного языка: 100-(13+5+3+7+30+2+20)=20 чел.

Задача 2.

- На вступительном экзамене по математике были предложены три задачи: по алгебре, планиметрии и стереометрии. Из 1000 абитуриентов задачу по алгебре решили 800, по планиметрии — 700, а по стереометрии — 600 абитуриентов. При этом задачи по алгебре и планиметрии решили 600 абитуриентов, по алгебре и стереометрии — 500, по планиметрии и стереометрии — 400. Все три задачи решили 300 абитуриентов. Существуют ли абитуриенты, не решившие ни одной задачи, и если да, то сколько их?

Решение:



- 300+300+200+100=900 (чел.)
- 1000-900-100 (чел.) – не решили ни одной задачи.

Связь с логическими операциями

- Операции теории множеств эквивалентны операциям, применяемым в математической логике:
- Объединение эквивалентно дизъюнкции;
- Пересечение эквивалентно конъюнкции;
- Дополнение эквивалентно инверсии.