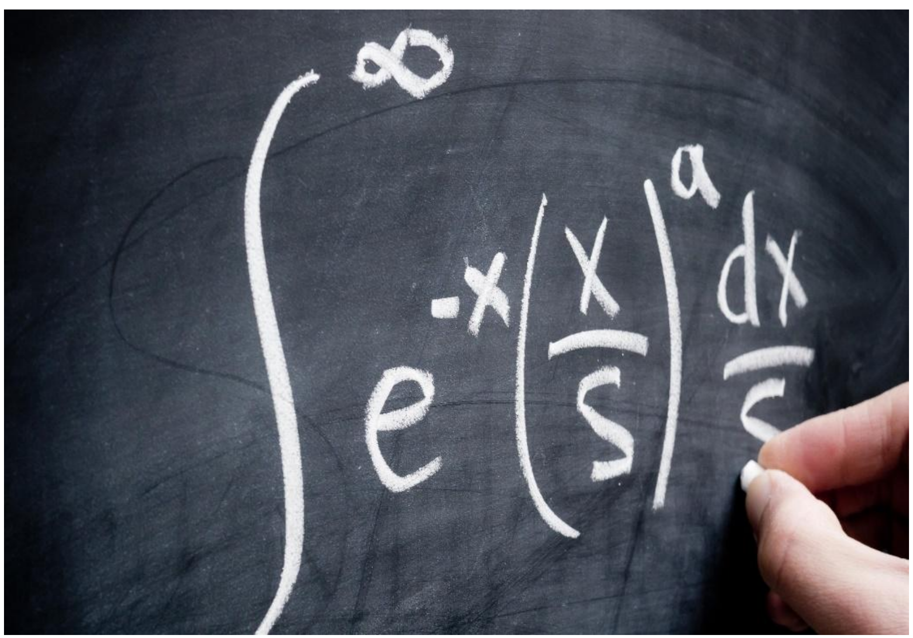
ГБПОУ НСО
«Новосибирский профессионально – педагогический колледж»

МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ



Автор: Припускова И. Г., преподаватель математики

Цель: продолжать знакомиться с методами интегрального исчисления (метод интегрирования по частям); получить навыки вычисления интегралов методом интегрирования по частям.

План лекции:

1. Метод интегрирования по частям.
2. Вычисление неопределенных интегралов.
3. Вычисление определенных интегралов.

СУТЬ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Этот метод основан на правиле дифференцирования произведения

Пусть u = u(x), v = v(x) – функции, дифференцируемые на некотором промежутке X. Тогда, как известно, дифференциал произведения этих функций вычисляется по формуле:

$$d(u\cdot v)=u'dv + v'du$$

Взяв неопределенный интеграл от обеих частей этого равенства, получим:

$$\int d(u\cdot v)=\int(udv + vdu)$$

СУТЬ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Но $\int d(u\cdot v) = u\cdot v + C$,

а $\int (udv + vdu) = \int udv + \int vdu$;

поэтому

$$u\cdot v + C = \int udv + \int vdu,$$

откуда получаем:

$$\int udv = uv + C - \int vdu.$$

СУТЬ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Так как $\int v'du$ уже содержит произвольную постоянную, то в правой части полученного равенства можно опустить С и записать равенство в виде:

$$\int udv = uv - \int vdu \qquad (1).$$

Эта формула называется формулой интегрирования по частям.

Ею обычно пользуются в тех случаях, когда подынтегральное выражение $v'du$ проще, чем подынтегральное выражение $u'dv$.

СУТЬ МЕТОДА ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Важно!!!

Одно и то же подынтегральное выражение можно записать в виде udv различными способами.

Обычно стараются в подынтегральном выражении выделить части u и dv так, чтобы функция v была не сложнее, чем v', а u' проще, чем u.

В частности, полезно иметь в виду, что для таких функций, как lnx, x^n, arctgx, arcctgx производные имеют более простой вид, нежели сами функции. Поэтому в большинстве случаев эти функции удобно принимать за u.

ВИДЕО «ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ»

https://yandex.ru/video/preview/?text=решение%20интегралов%20методом%20интегрирования%20по%20частям%20онлайн%20с%20подробным%20решением&path=wizard&parent-reqid=1610202896352850-846947017734267316000107-production-app-host-vla-web-yp-36&wiz_type=vital&filmId=9310863052833472844

https://yandex.ru/video/preview/?text=решение%20интегралов%20методом%20интегрирования%20по%20частям%20онлайн%20с%20подробным%20решением&path=wizard&parent-reqid=1610202896352850-846947017734267316000107-production-app-host-vla-web-yp-36&wiz_type=vital&filmId=15359783304643963619

ПРИМЕР 1. Вычислите $\int x^3 \ln x dx$

Табличного интеграла логарифмической функции нет, следовательно другого пути нет, как принять его за u.

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^3 dx \Rightarrow \\ v = \int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} \\ du = \dfrac{dx}{x} \end{array} \right| = \frac{x^4}{4} \ln x - \int \frac{x^4}{4} \cdot \frac{dx}{x} = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{4} \int x^3 dx = \frac{x^4}{4} \ln x - \frac{1}{16} x^4 + C$$

ПРИМЕР 2. **Вычислите** $\int x^2 \sin x dx$

Производная степенной функции понижает показатель степени на 1,
поэтому удобнее ее взять за u.

$$\int x^2 \sin x dx = \left| \begin{array}{l} u = x^2 \\ du = 2xdx \\ dv = \sin x dx \Rightarrow \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right| = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array} \right| =$$

$$-x^2 \cos x + 2(x \sin x - \int \sin x dx) = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C$$

ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ МЕТОДОМ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ПО ЧАСТЯМ

Теорема.

Если функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ дифференцируемы на отрезке $[a; b]$, то имеет место формула

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

ПРИМЕР 3. Вычислите $\int_1^e x\ln x\,dx$

$$\int_1^e x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e \frac{x^2}{x}dx =$$

$$\begin{bmatrix} u=\ln x & dv = x\,dx \\ du=\dfrac{dx}{x} & v=\dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x\,dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{x^2}{4}\Big|_1^e = \left(\frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1\right) - \left(\frac{e^2}{4} - \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1+e^2}{4}$$

ПРИМЕР 4. Вычислите $\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$

$$\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = -e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} e^x \cos x\, dx = \begin{bmatrix} u = e^x & dv = \sin x\, dx \\ du = e^x dx & v = -\cos x \end{bmatrix}$$

$$= -e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + e^x \sin x\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = \begin{bmatrix} u = e^x & dv = \cos x\, dx \\ du = e^x dx & v = \sin x \end{bmatrix}$$

Пусть $F(x) = \int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx$ **Тогда** $F(x) = -e^x \cos x\Big|_0^{\pi} + e^x \sin x\Big|_0^{\pi} - F(x)$

$$2F(x) = e^x \cos x\Big|_{\pi}^{0} + e^x \sin x\Big|_0^{\pi}$$

$$2F(x) = e^0 \cos 0 - e^{\pi} \cos \pi + e^{\pi} \sin \pi - e^0 \sin 0 = 1 + e^{\pi}$$

$$F(x) = \frac{1+e^{\pi}}{2}$$

Ответ: $\int_0^{\pi} e^x \sin x\, dx = \frac{1+e^{\pi}}{2}$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ:

1. В чем смысл метода интегрирования по частям?
2. Запишите формулу интегрирования по частям.
3. Разберите и запишите примеры вычисления неопределенных интегралов в видео и в презентации.
4. Вычислите интегралы:

$$1)\int x\cos x\,dx;\qquad 2)\int\frac{x\,dx}{\sin^2 x};\qquad 3)\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx.$$

5. Сформулируйте теорему о вычислении определенных интегралов методом интегрирования по частям.
6. Разберите и запишите примеры вычисления определенных интегралов в презентации.
7. Вычислите определенные интегралы:

$$1)\int_0^1 \mathrm{arcsin}x\,dx\qquad 2)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx\qquad 3)\int_0^1 x\,\mathrm{arctg}x\,dx$$