Численные методы

Метод хорд (метод секущих)

Метод касательных(метод Ньютона)

Цель лекции

- Изучить два метода вычисления корней нелинейных уравнений, а именно:
- Метод хорд (метод секущих)
- Метод касательных(метод Ньютона)

- Прежде чем приступить к изучению новых методов решения нелинейных уравнений, вспомним (смотри лекцию «Способы отбора корней нелинейных уравнений») как графическим способом отобрать корни данного уравнения:

$$f(x) = 0.$$

- *Для того, чтобы найти графически интервалы изоляции действительных корней данного скалярного уравнения*

  $f(x) = 0$ необходимо:
- 1). Представить уравнение $f(x) = 0$ в виде

  $f1\,(x) = f2\,(x)$.
- 2). Построить графики функций

  $y = f1(x)$ и $y = f2\,(x)$,
- 3). Определить приближенно по графику абсциссу точки пересечения этих графиков *x0.*
- 4). Определить промежуток изоляции *[a; b],* содержащий корень *x0.*

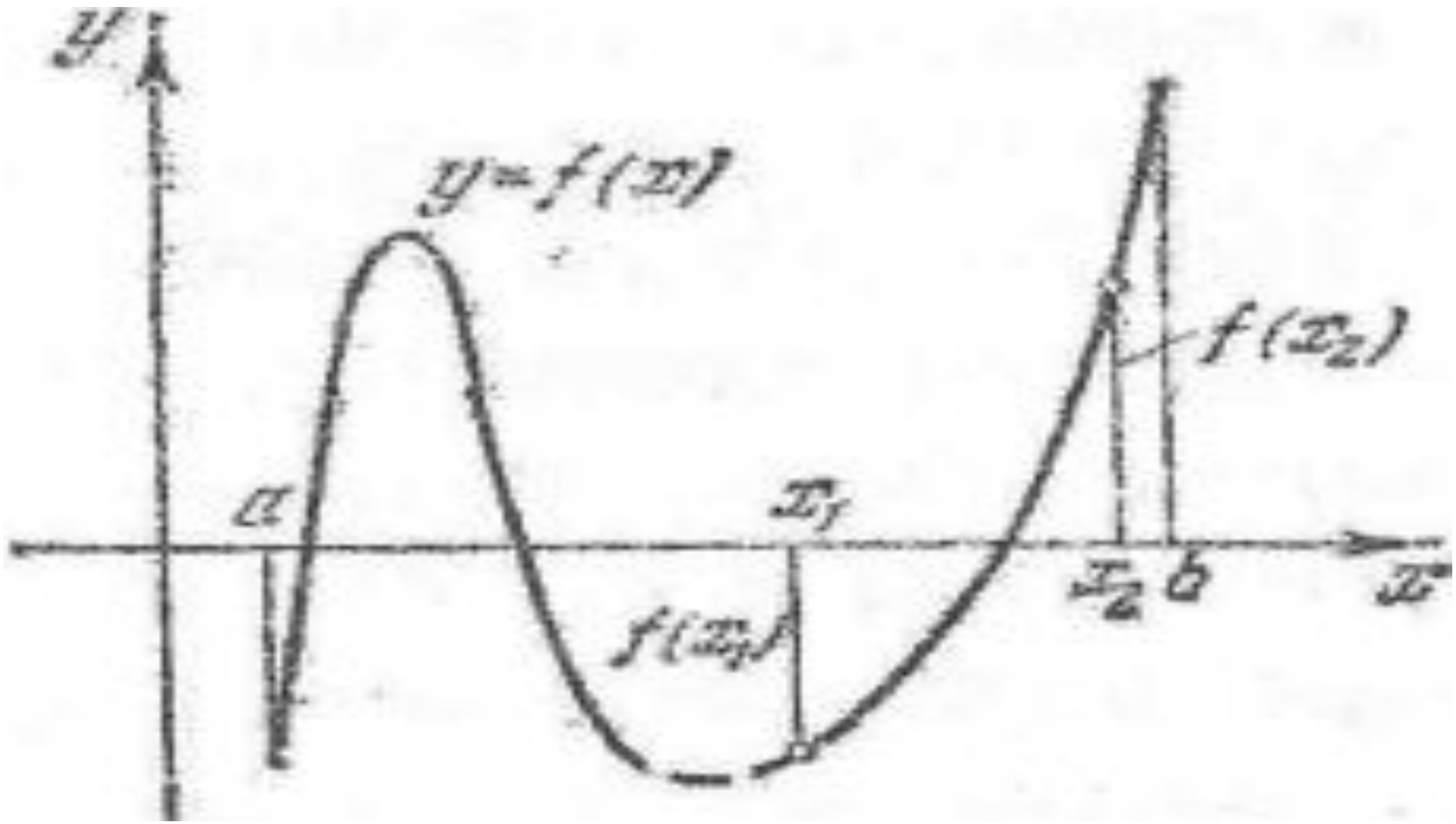
Метод хорд (метод секущих)

Пусть требуется вычислить действительный корень уравнения

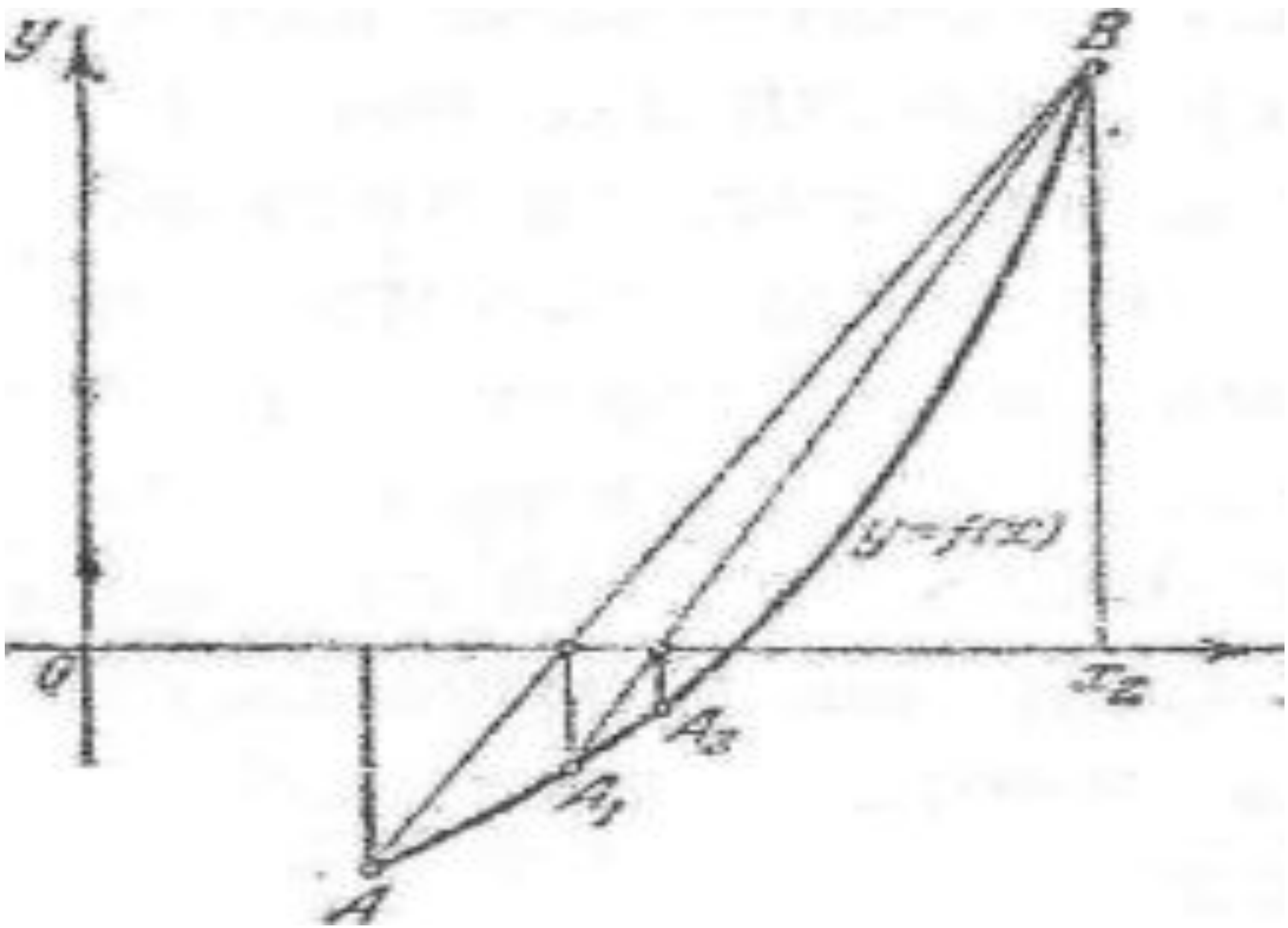
$$f(x) = 0,$$

изолированный на отрезке [a;Ь]. Рассмотрим график функции $y = f(x)$. Пусть $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$.

График функции y = f(x).



- Точки графика A(a; f(a)) и B(b; f(b)) соединим хордой.
- За приближенное значение искомого корня примем абсциссу $x1$ точки пересечения хорды *AB с* осью *Ox.*
- *(смотри следующий рисунок)*



y
B
y=f(x)
0
x₂
A₂
A₁
A

- Это приближенное значение находится по формуле

$$x_1 = a - \frac{(b - a)\, f(a)}{f(b) - f(a)},$$

- где x1e[a; b].

- Пусть, например, $f(x1)<0$, тогда за новый (более узкий) промежуток изоляции корня можно принять *[x 1; b].* Соединив точки *A*(x1; f(x1)) и *B(b; f(b)),* получим в точке пересечения хорды с осью *Ox* второе приближение *x2,* которое вычислим по формуле:

$$x2 = x1 - \frac{(b - x1)\, f(x1)}{f(b) - f(x1)}$$ и т. д.

- Последовательность чисел *a, x1, x2,...* стремится к искомому корню уравнения.
- Если было бы f(x1) > 0, то за новый промежуток изоляции корня можно было бы принять [a; x1] и тогда второе приближение *x2* вычисляли бы по формуле

$$x2 = a - \frac{(x1 - a)\, f(a)}{f(x1) - f(a)},$$

- Вычисление приближенных значений корней уравнения следует вести до тех пор , пока не перестанут изменятся те десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе (т. е. пока не будет достигнута заданная степень точности).

Алгоритм выполнения задачи

- *Методом хорд решить уравнение $f(x)$=0 с точностью до ε.*
- ***Решение:***
- *Вычислим приближенное значение корня с заданной точность ε. (уточним корень, найденный графически) .*

- 1). Найдем f(a), для этого в f*(x)* вместо *x* подставим *a.* Определим знак f(a).
- 2). Найдем *f(b),* для этого в f*(x)* вместо *x* подставим b*.* Определим знак *f(b).*
- 3). Найдем первое приближенное значение корня по формуле :

$$x1 = a - \frac{(b - a)\,f(a)}{f(b) - f(a)},$$

- 4). Найдем f(x1) для этого в f(x) вместо *x* подставим x1*.*
- *5).* Определим знак   f(x1) ;
- 6). Найдем новый (более узкий) промежуток изоляции:

а)Если f(x1) имеет знак противоположный знаку f(a), то за новый промежуток примем [a;x1,].

б)Если f(x1) имеет знак противоположный *f(b)*, то за новый промежуток примем |x1;b].

- 7). Найдем второе приближение корня в случае а) по формуле:

$$x_2 = x_1 - \frac{(b - x_1)\, f(x_1)}{f(b) - f(x_1)},$$

- в случае б) по формуле:

$$x_2 = a - \frac{(x_1 - a)\, f(a)}{f(x_1) - f(a)},$$

- 8). Найдем f(x2) , для этого в f(x) вместо x подставим x2.
- 9). Определим f(x2) . Сравним его со знаками на концах промежутка изоляции (найденного в п.6).).
- Если знак f(x2) противоположен знаку f*(x1),* то за новый промежуток изоляции примем отрезок [x1;x2]
- Если знак f(x2) противоположен знаку f(*b),* то за новый промежуток изоляции примем [x2; b]*.*

- 10). Вычисление приближенных корней уравнения ведем до тех пор, пока не перестанут изменяться те десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе.
- 11) Результаты вычислений занесем в таблицу:

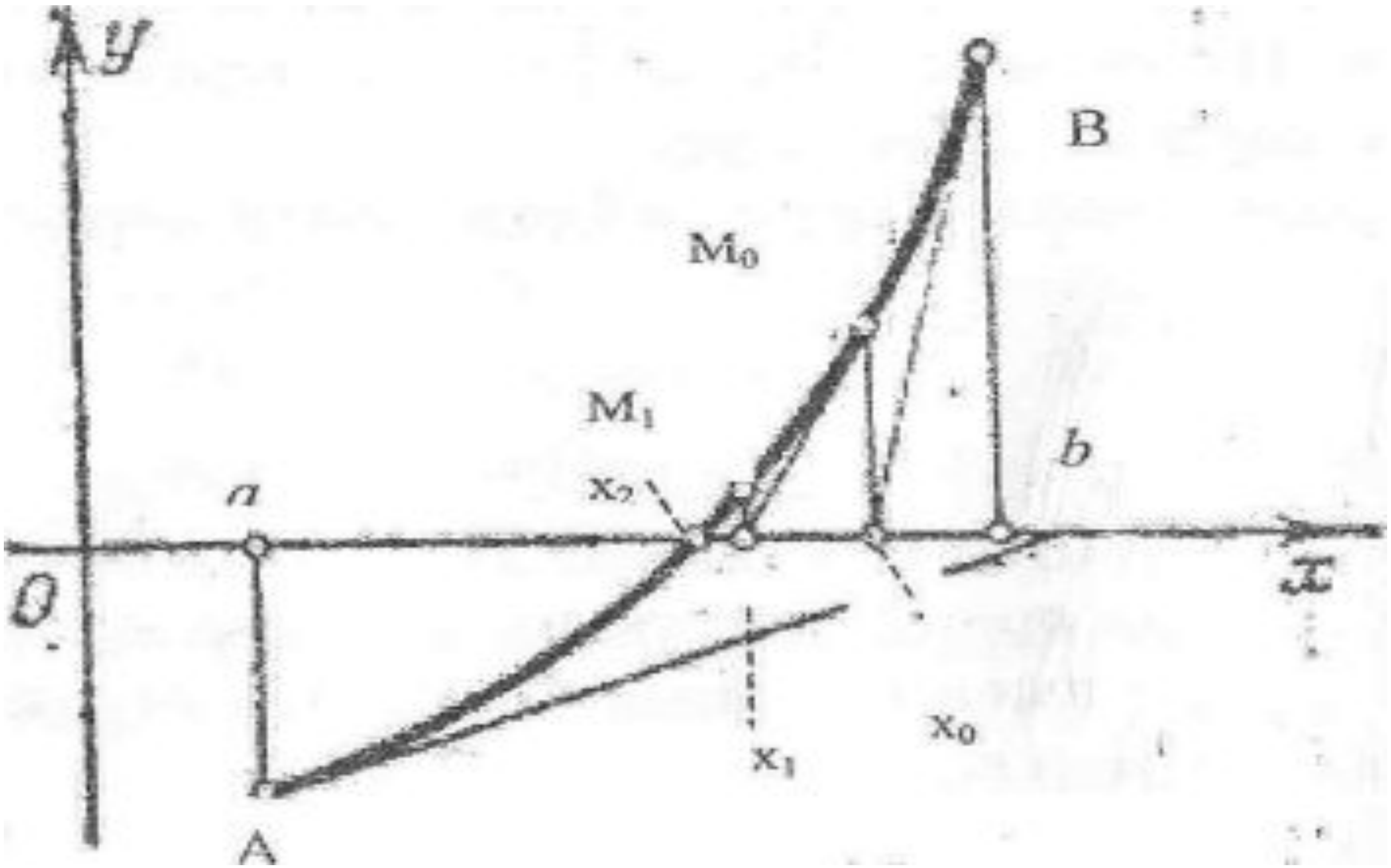
№ шага	Промежуток изоляции	Xn	f(xn)	│xn-x(n-1│

Метод касательных (метод Ньютона)

- Пусть корень уравнения $f(x) = 0$ изолирован на отрезке *[a: b].*
- Пусть снова $f(a) < 0$ и $f(b) > 0$, причем первая производная на этом отрезке не меняет своего знака.
- Тогда в отрезке *[a; b]* имеется один корень уравнения $f(x) = 0$.
- Возьмем на отрезке *[a;b]* такое число *x0.,* при котором $f'(x0)$ имеет тот же знак, что и $f''(x0)$, т.е. $f'(x0)\, f''(x0) > 0$ (в частности, за *x0* может быть принят тот из концов отрезка *[a;b],* в котором соблюдено это условие).
- Сохранение знака второй производной на отрезке означает, что кривая либо только выпукла, либо только вогнута на нем.

- Проведем в точке $M_0(x_0; f(x_0))$ касательную к кривой $y = f(x)$.
- За приближенное значение корня примем абсциссу точки пересечения этой касательной с осью *Ox.*
- Чтобы найти эту абсциссу напишем уравнение касательной в точке *Mo.* $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$, при $y=0$ *и* $x=x_1$ получим:
- $-f(x_0) = f'(x_0)(x_1 - x_0)$, или $x_1 - x_0 = -f(x_0)/f'(x_0)$,
- отсюда найдем $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$.
-

График заданной функции



- Применив этот прием вторично в точке $M_1(x_1;f(x_1))$, найдем

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

- И т. д

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

- Полученная таким образом последовательность *x0,* x1, *x2,…имеет своим пределом* искомый корень. Если *x* - точный корень уравнения f(x) = 0, изолированный на отрезке *[a;b], а* ξ –приближенное значение корня , найденное методом хорд, то оценка погрешности этого приближенного значения такова:
- $$\left| x - \xi \right| < \frac{\left| f(\xi) \right|^2}{2} \max_{[a:b]} \frac{f'(x)}{(f''(x))^2} .$$
- Приняв за a и b концы промежутка изоляции, на котором найдено приближенное значение корня.

Алгоритм выполнения задачи

- *Методом касательных (методом Ньютона) решить уравнение f(x) = O с точностью до ε*
- ***Решение:***
- *Вычислим приближенное значение корня с заданной точностью ε. (уточним корень, найденный графически)*
- *1). Найдем f'(x) и f''(x) для данной функции f (x).*
- *2). Возьмем на отрезке изоляции [a;b] такое число x0 , при котором f´(x0) имеет тот же знак, что и вторая производна, т. е. f'(x) · f´´(x)>0*
- *(в частности за x 0 может быть принят тот из концов отрезка [a; b], в котором соблюдено это условие*

- 3) Найдем $f'(x0)$.
- 4). Найдем первое приближенное значение корня x1 по формуле:
- $x1 = x0$ -. $f(x0)/f'(x0)$
- 5). Найдем значения f/(x1), подставив x1 в f /(x) вместо x0 .
- 6)Найдем значение f/(x2), затем по формуле найдем второе значение корня:
- $x2 = x1 - f(x1)/f'(x1)$

- 7). Таким образом находим n-ое приближенное значение корня x_n по формуле:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$$

- 8). Вычисление приближенных значений корней уравнения ведем до тех пор, пока не перестанут изменяться те десятичные знаки, которые мы хотим сохранить в ответе (т.е. пока не будет достигнута заданная степень точности $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$

- 9). Результаты вычислений занесем в таблицу:
-

№ шага *п*	***Хп***	f(xn)	f´(xn)	│xn-xn-1│

Заключение

- Изучить методы решения нелинейных уравнений;
- Выполнить следующие задания:
- *1. Методом хорд решить уравнение*

$x^3 + 2x – 7 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0.01$ в промежутке изоляции [1;2].

Ответ: 1, 56.

2. *Методом касательных (методом Ньютона) решим уравнение с точностью до е = 0,01. $x^3 - 3x – 1 = 0$.*

Ответ: 1,87