§ 6. Интегрирование некоторых иррациональных функций

1) Случай $\int R\left(x, \sqrt[k]{x}, \sqrt[l]{x}, \sqrt[m]{x}, \ldots\right) dx$.

Пусть n – *наименьшее кратное всех показателей* k, l, m, … - целые числа. Это означает, что:

$$\frac{n}{k} = r_1, \frac{n}{l} = r_2, \frac{n}{m} = r_3, \ldots,$$

где r_1, r_2, r_3, … – целые числа. В этом случае используют замену переменной

$$x = u^n,\ dx = nu^{n-1} du.$$

Пример. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$.

В данном случае $n = 2 \cdot 3 = 6$. Используем замену переменной:

$$x = u^6,\ \sqrt{x} = u^3,\ \sqrt[3]{x} = u^2,\ dx = 6u^5 du.$$

Тогда получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}} = \int \frac{6u^5 du}{u^3 - u^2} = 6\int \frac{u^3 du}{u-1} = 6\int \frac{\left(u^3 - 1 + 1\right)du}{u-1} =$$

$$= 6\int \left(u^2 + u + 1\right)du + 6\int \frac{du}{u-1} = 6\left(\frac{u^3}{3} + \frac{u^2}{2} + u + \ln\left|u-1\right|\right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} + \sqrt[6]{x} + \ln\left|\sqrt[6]{x} - 1\right|\right) + C\,.$$

2) Случай $\int R\left(x, \sqrt[k]{\frac{ax+b}{px+q}}, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{px+q}}, \ldots\right)dx$.

В этом случае используют замену переменной:

$$\frac{ax+b}{px+q} = u^n,\ x = \frac{qu^n - b}{a - pu^n},\ dx = \frac{aq - bp}{\left(a - pu^n\right)^2} nu^{n-1} du\,.$$

3) Случай $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

Здесь необходимо рассмотреть два случая: $a>0$ и $a<0$. Результат интегрирования будет совершенно различный.

Пусть $a>0$. После вынесения за знак интеграла $\frac{1}{\sqrt{a}}$, интеграл приводится к виду $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}$. Выделяя полный квадрат в подкоренном выражении, получим интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4}}}$, который выражается через логарифмы.

Пусть $a<0$. После вынесения за знак интеграла $\frac{1}{\sqrt{-a}}$, интеграл приводится к виду $\int\frac{dx}{\sqrt{-x^2+px+q}}$. Выделяя полный квадрат в подкоренном выражении, получим интеграл $\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{4q+p^2}{4}-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2}}$, который в случае $\frac{4q+p^2}{4}>0$ выражается через арксинус.

4) Случай $\int\frac{dx}{(x-\alpha)\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

В этом случае замена $x-\alpha=\frac{1}{u}$ приводит интеграл к виду 3.

5) Случай $\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$.

Интеграл после выделения в числителе производной подкоренного выражения разбивается на два интеграла, один из которых является интегралом от степенной функции, а второй является интегралом вида 3.

$$\left(ax^2+bx+c\right)'=2ax+b$$

$$Ax+B=\frac{1}{2a}\left(A\left(2ax+b\right)+2aB-Ab\right)$$

$$\int \frac{Ax+B}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx=\frac{A}{2a}\int \frac{(2ax+b)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{2aB-Ab}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

6) Случай $\int \sqrt{ax^2+bx+c}dx$.

Выделением полного квадрата в подкоренном выражении интеграл приводится к одному из трех следующих видов:

$$\int \sqrt{u^2+1}du, \int \sqrt{u^2-1}du, \int \sqrt{1-u^2}du.$$

§ 7. Интегрирование некоторых трансцендентных функций

Трансцендентными называют элементарные функции, не являющиеся алгебраическими. Они образованы с помощью возведения в иррациональную степень, логарифмирования, использования тригонометрических и обратных тригонометрических операций.

Пример. Функция $y = \ln\left(x^2 + 2\right)$ – трансцендентная.

Интегралы от трансцендентных функций в общем случае не выражаются в элементарных функциях.

1) Случай $\int P(x)e^{ax}dx$, где $P(x)$ – многочлен.

Интеграл вычисляется интегрированием по частям или методом неопределенных коэффициентов. Во втором случае результат ищут в виде

$$\int P(x)e^{ax}dx = Q(x)e^{ax} + C,\ a \neq 0,$$

где $Q(x)$ – многочлен той же степени, что и $P(x)$.

Пример. Вычислить $\int xe^{2x}dx$.

$$\int xe^{2x}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int\frac{e^{2x}}{2}dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x} + C$$

Будем использовать метод неопределенных коэффициентов, для чего положим

$$\int xe^{2x}dx = (Ax+B)e^{2x} + C.$$

Дифференцируя левую и правую часть этого уравнения, получим

$$xe^{2x} = Ae^{2x} + (Ax+B)2e^{2x} \text{ или } x = (A+2B) + 2Ax.$$

Так как левая часть этого уравнения должна быть равна правой части при любом x, необходимо положить

$$A + 2B = 0,\ 2A = 1,$$

откуда получим $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}$.

Следовательно, интеграл равен

$$\int xe^{2x}dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C.$$

2) Случай $\int P(x)\cos x dx, \int P(x)\sin x dx$, где $P(x)$ – многочлен.

Интеграл вычисляется интегрированием по частям или методом неопределенных коэффициентов.

Пример. Вычислить $\int x\cos x dx$.

Интегрируя по частям, получим

$u = x$, $du = dx$, $\cos x dx = dv$, $\sin x = v$, $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx = x\sin x + \cos x + C .$$

Используя метод неопределенных коэффициентов, положим

$$\int x\cos x dx = (Ax + B)\sin x + (Ex + D)\cos x + C .$$

Дифференцируя левую и правую часть этого уравнения, получим

$$x\cos x = A\sin x + (Ax + B)\cos x + E\cos x - (Ex + D)\sin x$$

или

$$x\cos x = (A - Ex - D)\sin x + (Ax + B + E)\cos x .$$

Так как левая часть этого уравнения должна быть равна правой части при любом x, необходимо положить откуда получим

$$A=1, B=E=0,\ A=D=1.$$

Следовательно, интеграл равен

$$\int x\cos x dx = x\sin x + \cos x + C$$

3) Случай $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь используется тригонометрическая подстановка

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=u\ ,\ \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\ \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\ dx=\frac{2du}{1+u^2}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int\frac{dx}{3+5\cos x}$.

Используя тригонометрическую подстановку, получим

$$\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\int\frac{2du}{\left(1+u^2\right)\left(3+5\cdot\frac{1-u^2}{1+u^2}\right)}=\int\frac{du}{4-u^2}=\frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{2-u}+\frac{1}{2+u}\right)dt=$$

$$= \frac{1}{4}\ln\left|\frac{u+2}{u-2}\right| + C = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2}\right| + C\,.$$