Элементы теории вероятностей и математической статистики

Лекция 1. Введение. Основные понятия теории вероятностей. Элементы комбинаторики

Основные формулы комбинаторики

- комбинаторика – наука, изучающая комбинации, которые можно составить по определенным правилам из элементов некоторого конечного множества

Предмет теории вероятностей

- Теория вероятностей изучает закономерности, возникающие в случайных экспериментах.

Случайным называют эксперимент, результат которого нельзя предсказать заранее. Невозможность предсказать результат отличает случайное явление от других.

Случайность и хаос — не одно и то же.

Случайное событие:

- факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.
- События, которые могут произойти в результате опыта, можно подразделить на три вида:
- а) достоверное событие – событие, которое всегда происходит при проведении опыта;
- б) невозможное событие – событие, которое в результате опыта произойти не может;
- в) случайное событие – событие, которое может либо произойти, либо не произойти.

Перестановки

- Перестановки – это комбинации, составленные из всех **n** элементов данного множества и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!$$

- Пример. Сколько различных списков (отличающихся порядком фамилий) можно составить из 7 различных фамилий?
- Решение. $P_7 = 7! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5040$.

Размещения

- Размещения – комбинации из m элементов множества, содержащего n различных элементов, отличающиеся либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)...(n-m+1).$$

- Количество размещений из n по m, обозначаемое A_n^m, равно убывающему факториалу
- $A_n^m = n! / (n-m)!$
- Пример. Сколько возможно различных вариантов пьедестала почета (первое, второе, третье места), если в соревнованиях принимают участие 10 человек?
- Решение.
- $A_3^{10} = 10*9*8 = 10! / 7! = 720$

Сочетания

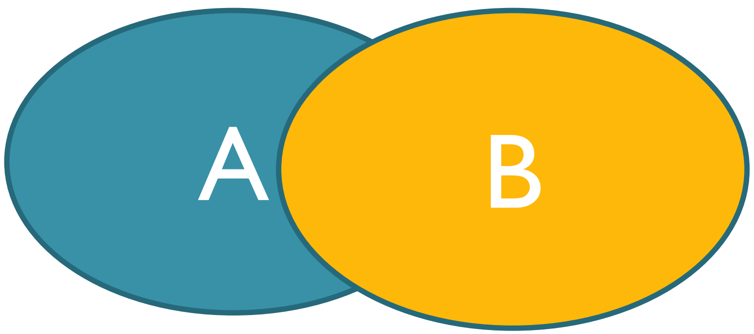
- Сочетания – неупорядоченные наборы из т элементов множества, содержащего п различных элементов (то есть наборы, отличающиеся только составом элементов). Число сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

- Пример. В отборочных соревнованиях принимают участие 10 человек, из которых в финал выходят трое. Сколько может быть различных троек финалистов?
- Решение. В отличие от предыдущего примера, здесь не важен порядок финалистов, следовательно, ищем число сочетаний из 10 по 3:
- $$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{6} = 120.$$

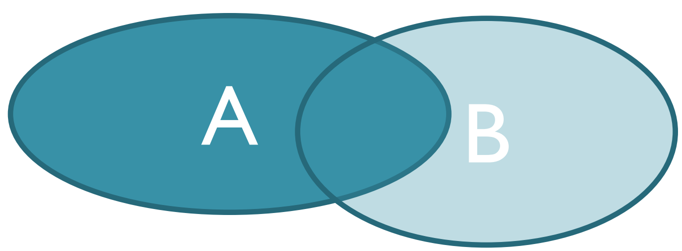
Операции над событиями: Сумма событий

- Суммой (объединением) событий A и B называется *событие*, состоящее в том, что произошло либо A, либо B, либо оба события одновременно.



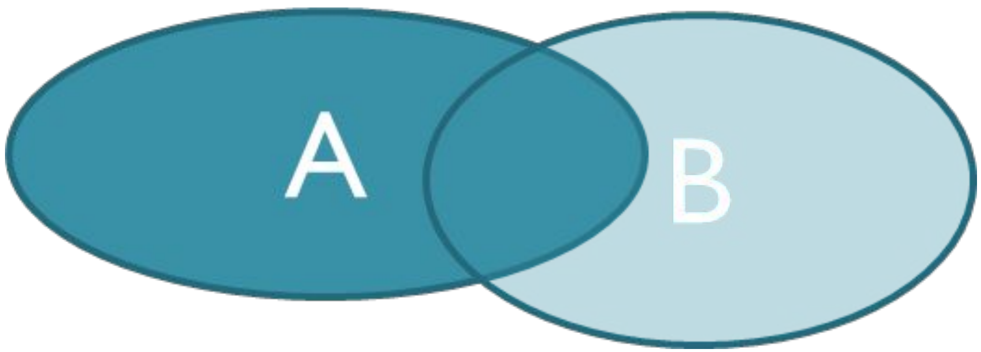
Произведение событий

- Произведением AB событий A и B называется событие, состоящее в том, что произошло и событие A, и событие B. Аналогично произведением нескольких событий называется событие, заключающееся в том, что произошли все эти события.



Разность (дополнение) событий

- Разностью A\B событий A и B называется событие, состоящее в том, что A произошло, а B – нет.



Виды событий:

- События А и В называются совместными, если они могут произойти оба в результате одного опыта. В противном случае события называются несовместными.
- События А1, А2,…,Ап образуют полную группу, если в результате опыта обязательно произойдет хотя бы одно из событий этой группы
- События называются равновозможными, если нет оснований считать, что одно из них является более возможным, чем другое

Схема случаев

- Если все события, которые могут произойти в результате данного опыта,
- а) попарно несовместны;
- б) равновозможны;
- в) образуют полную группу,
- то говорят, что имеет место схема случаев.

Классическое определение вероятности

- Вероятностью события А называется отношение числа исходов опыта, благоприятных этому событию, к числу возможных исходов:

$$p(A) = \frac{m}{n}$$

Задача 1

В урне находится 15 белых, 5 красных и 10 чёрных шаров. Наугад извлекается 1 шар, найти вероятность того, что он будет: а) белым, б) красным, в) чёрным.

Решение: важнейшей предпосылкой для использования классического определения вероятности является **возможность подсчёта общего количества исходов**.

Всего в урне: 15 + 5 + 10 = 30 шаров, и, очевидно, справедливы следующие факты:

– извлечение любого шара одинаково возможно ***(равновозможность** исходов)*, при этом исходы ***элементарны*** и образуют ***полную группу событий** (т.е. в результате испытания обязательно будет извлечён какой-то один из 30 шаров)*.

Таким образом, общее число исходов: $n = 30$

Рассмотрим событие: A – из урны будет извлечён белый шар. Данному событию благоприятствуют $m = 15$ элементарных исходов, поэтому по классическому определению:

$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$ – вероятность того, то из урны будет извлечён белый шар.

Другими пунктами аналогично:

$$P(B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6};$$

$$P(C) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}.$$

Аксиомы теории вероятностей

- Аксиома 1. Каждому случайному событию A соответствует определенное число P(A), называемое его вероятностью и удовлетворяющее условию
  - $0 \leq P(A) \leq 1$
- Аксиома 2. Вероятность достоверного события равна единице.
- Аксиома 3 (аксиома сложения вероятностей). Пусть A и B — несовместные события. Тогда вероятность того, что произойдет хотя бы одно из этих двух событий, равна сумме их вероятностей:
  - $P(A+B)=P(A)+P(B)$
- Аксиома 3 допускает обобщение на случай нескольких событий, а именно: если события $A_1, A_2, \ldots, A_n$, попарно несовместны, то

  $P(A_1+A_2+\ldots+A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$

Свойства вероятности

- Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.
- Доказательство. Так как достоверное событие всегда происходит в результате опыта, то все исходы этого опыта являются для него благоприятными, то есть т = п, следовательно, $P(A) = 1$.
- Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.
- Доказательство. Для невозможного события ни один исход опыта не является благоприятным, поэтому т = о и $p(A) = 0$.
- Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.
- Доказательство. Случайное событие происходит при некоторых исходах опыта, но не при всех, следовательно, $0 < m < n$, и из (1.1) следует, что $0 < p(A) < 1$.

Относительная частота. Статистическое определение вероятности.

- относительная частоты W(A) события A - отношение числа опытов, в которых наблюдалось событие A, к общему количеству проведенных испытаний:
- где N – общее число опытов, M – число появлений события A.

$$W(A) = \frac{M}{N},$$

- Статистической вероятностью события считают его относительную частоту или число, близкое к ней.

Теорема сложения вероятностей.

- Вероятность p(A + B) суммы событий A и B равна

  P (A + B) = p (A) + p (B) – p (AB).

- Доказательство.

$$p(A+B)=\frac{m_A+m_B-m_{AB}}{n}=\frac{m_A}{n}+\frac{m_B}{n}-\frac{m_{AB}}{n}=p(A)+p(B)-p(AB),$$

Следствие 1.

- Теорему сложения вероятностей можно распространить на случай суммы любого числа событий. Например, для суммы трех событий A, B и C :
- $P(A + B + C) = p(A) + p(B) + p(C) – p(AB) – p(AC) – p(BC) + p(ABC)$

Следствие 2.

- Если события А и В несовместны, то m_{AB} = 0, и, следовательно, вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей:

$$P(A + B) = p(A) + p(B).$$

Определение

- Противоположными событиями называют два несовместных события, образующих полную группу. Если одно из них назвать А, то второе принято обозначать $\overline{A}$
- Теорема. Сумма вероятностей противоположных событий равна 1:

p(A) + p($\overline{A}$) = 1.

В нашем случае события A, B, C образуют полную группу, а значит, сумма соответствующих вероятностей должна обязательно равняться единице: $P(A)+P(B)+P(C)=1$.

Проверим, так ли это: $P(A)+P(B)+P(C)=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{3}{6}+\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{6}{6}=1$, в чём и хотелось убедиться.

Теорема умножения вероятностей.

- Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$p\,(AB) = p\,(A) \cdot p\,(B/A).$$

Независимые события

- Определение: Событие B называется независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности B, то есть $p(B/A) = p(B)$.

Замечание. Если событие B не зависит от A, то и A не зависит от B. Свойство независимости событий взаимно.

- Теорема умножения для независимых событий имеет вид:

$$p(AB) = p(A) \cdot p(B)$$

Вероятность появления хотя бы одного события

- Теорема Вероятность появления хотя бы одного из попарно независимых событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ равна
- $p(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n$, где q_i – вероятность события , противоположного событию A_i .

ЗАДАЧА:
Три стрелка делают по одному выстрелу по одной и той же цели. Вероятности поражения целей равны соответственно $p1 = 0{,}9$, $p2 = 0{,}8$, $p3 = 0{,}7$.
Найти вероятности того, что:
а) все три стрелка попадают в цель;
б) только один из них попадает в цель;
в) хотя бы один стрелок попадает в цель.

Обозначим события: A – все 3 стрелка попадают в цель; B – только один стрелок попадает в цель; C – хотя бы один стрелок попадает в цель.
Вероятности промахов равны соответственно: $q1 = 0{,}1$, $q2 = 0{,}2$, $q3 = 0{,}3$.
а) $P(A) = p1\ p2\ p3 = 0{,}9 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}504$.
б) $P(B) = p1\ q2\ q3 + q1\ p2\ q3 + q1\ q2\ p3 = 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}092$.
в) Событие
$\overline{C}$– все три стрелка промахиваются. Тогда
$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994$.