Численные методы

Метод половинного деления

(метод дихотомии)

Цель лекции

- Изучить один из методов решения нелинейных уравнений – метод половинного деления;
- Рассмотреть пример решения нелинейного уравнения.

- **Метод половинного деления один из методов решения нелинейных уравнений.**
- **Основан на последовательном сужении интервала, содержащего единственный корень уравнения F(x)=0 до того времени, пока не будет достигнута заданная точность ε**

- **Пусть задан отрезок [a;b], содержащий один корень уравнения.**
- **Предварительно необходимо определить области локализации корней данного уравнения (см. предыдущую лекцию).**
- **Если на отрезке [a;b] содержится более одного корня, то метод не работает.**

Алгоритм метода:

- Разобьем отрезок [a,b] пополам.
- Определим новое приближение корня x в середине отрезка [a,b]: $x=(a+b)/2$. Найдем значения функции в точках a и x: $F(a)$ и $F(x)$.
- Проверим условие $F(a)*F(x) < 0$. Если условие выполнено, то корень расположен на отрезке [a,x].

- В этом случае необходимо точку b переместить в точку x (b = x).
- Если условие не выполнено, то корень расположен на отрезке [x;b].
- В этом случае необходимо точку a переместить в точку x (a = x).
- Перейдем к пункту 1 и вновь поделим отрезок пополам.
- Алгоритм выполнять до тех пор, пока не будет выполнено условие /F(x)/ < ε.

Рассмотрим пример

- *Методом проб (половинного деления) решим уравнение* $x^5 - x^2 - 1 = 0$, *т.е. найдем приближенное значение действительного корня с точностью до 0,001 .*

Решение

- **1**. Найдем графически интервалы изоляции действительных корней данного уравнения $x^5 - x^2 - 1 = 0$.
- **2**. Представим данное уравнение в виде *f1 (x) = f2 (x)*, $x^5 = x^2 + 1$.
- **3**. Построим графики функций *y = f1 (x)*, *y = f2 (x)* и определим промежуток, которому принадлежит корень: [1;2].

- **4**. Найдем значении функции на концах промежутка и определим ее знак.
- $f(1) = 1^5 - 1^2 - 1 = -1 < 0$
- $f(2) = 2^5 - 2^2 - 1 = 27 > 0$
- Т.к. значения функции на концах промежутка разных знаков, то корень заключен внутри отрезка [1;2], который является промежутком изоляции.

- **5**. Разделим отрезок [1;2] пополам, для этого воспользуемся формулой

C1 = (a + b)/2.

C1 = (1 + 2)/ 2 = 1,57.

- **6**. Найдем значение функции в точке

C1 = 1,5

f(1,5) = $1,5^5$ – $1,5^2$ - 1 = 7,5938 – 2,25 – 1 = 4,3437 > 0

- **7**. Т.к. значение противоположного знака функция принимает в левом промежутке, то за новый более узкий промежуток возьмем [1; 1,5].
- **8.** Найдем *С2 = (С1 + а)/2;*

С2 = (1 + 1,5) /2 = 2,5/2 = 1,25.

- **9.**Найдем значение функции в точке С2

f(1,25) = $1{,}25^5$ – $1{,}25^2$ - 1 = 3,0518 – 1,5625 – 1 = 0,4893 > 0.

- **10**. Т.к. значение противоположного знака функция принимает на левом промежутке, то за новый промежуток возьмем [1; 1,25].
- **11**. Найдем С3:

С3 = (а + С2)/2;

С3 = (1 + 1,25)/2 = 1,125

- **12**. Найдем значение в точке С3:

f(1,125) = $1{,}125^5$ – $1{,}125^2$ - 1 =

1,8020 – 1,2656 – 1 = -0,4636

- **13**. Найдем погрешность приближения

$|x3 - x2 = |1{,}125 - 1{,}25| = |-0{,}125| = 0{,}125 > \varepsilon$, где $\varepsilon = 0{,}001$.

Продолжим дальше вычисления.

- **14**. Т.к. противоположный знак находится в правом конце изоляции, то за новый более узкий промежуток возьмем [1,125; 1,25].
- 15. Найдем значение С4 :

С4 = (С2 + С3)/2.

С4 = (1,125 + 1,25)/2 = 1,188

- **16**. Найдем значение функции в точке С4:

$f(C4) = f(1{,}188) = 1{,}188^5 - 1{,}188^2 - 1 =$
$2{,}3664 - 1{,}4113 - 1 = -0{,}449$

- **17**. Найдем погрешность приближения

$|x4 - x3| = |1{,}188 - 1{,}125| = 0{,}063 > \varepsilon$,
где $\varepsilon = 0{,}001$.

- **18**. Т.к. значение противоположного знака функция принимает в правом промежутке, то за новый более узкий промежуток возьмем отрезок [1,188; 1,25].

- **19**. Найдем значение С5:

где С5 = (С1 + С4)/2 = (1,188 + 1,25)/2 = 1,219.

- **20**. Найдем значение функции в точке С5:

f(1,219) = $1{,}219^5$ – $1{,}219^2$ - 1 =

2,6916 – 1,4860 – 1 = 0,2056.

- **21**. Т.к. значение противоположного знака функция принимает в левом конце промежутка, то за новый более узкий промежуток возьмем отрезок [1,188; 1,219].

- **22**. Найдем значение С6:

С6 = (1,188 + 1,219)/2 = 1,2035.

- **23**. Найдем погрешность приближения:

$|1,2035 – 1,219| = 0,0155 > ε$.

- **24**. Найдем значение С5 :

$f(1,2035) = 1,2035^5 – 1,2035^2 - 1 = 2,5248 – 1,4484 – 1 = 0,076$

- **25**. Т.к. значение противоположного знака функция принимает в левом конце промежутка, то за новый более узкий промежуток возьмем отрезок [1,2035; 1,219].
- **26.** Найдем значение *C7:*

C7 = (1,203 + 1,219)/2 = 1,2112.

- **27**. Найдем погрешность приближения:

$|1{,}2112 - 1{,}2035| = 0{,}0077 > \varepsilon$,

где ε = 0,001.

- **28.** Найдем значение функции в точке С7:

$f(1{,}2112) = 1{,}2112^5 - 1{,}2112^2 - 1 =$

$2{,}6066 - 1{,}4670 - 1 = 0{,}1396 > 0$

- **29**. Т.к. значение противоположного знака функция принимает в левом конце промежутка, то за новый более узкий промежуток возьмем [1,2035; 1,2112].
- **30**. Найдем погрешность приближения:

$|1{,}2112 - 1{,}2035| = 0{,}007 > \varepsilon$

- **31**. Найдем значение С8:

$C8 = (1{,}2112 + 1{,}2035)/2 = 1{,}2074.$

- **32**. Найдем погрешность приближения:

$|1{,}2074 - 1{,}2035| = 0{,}003 > \varepsilon$

- **33**. Найдем значение функции в точке С8:

$f(1{,}2074) = 1{,}2074^5 - 1{,}2075^2 - 1 =$

$2{,}5660 - 1{,}4578 - 1 = 1{,}1082 > 0$

- **34**. Новый промежуток изоляции будет [1,2035; 1,2074].
- **35**. Найдем значение C9:

C9 = (1,2035 + 1,2074)/2 = 1,2054

- **36**. Найдем f(C9):

f(C9) = $1,2054^5$ – $1,2054^2$ - 1 =

2,5448 – 1,4530 – 1 = 0,0918>0

- **37**. Новый промежуток изоляции [1,2035; 1,2054].

- **38**. Найдем *C10:*

C10 = (1,2035 + 1,2054)/2 = 1,2044.

- **39**. Найдем погрешность приближенного вычисления:

$|x10 - x9| = |1,2044 - 1,2054| = 0,001 = \varepsilon.$

- Следовательно искомый корень, найденный методом проб равен ***x ≈ 1,204***

с точностью до *0,001.*

- Результаты измерений занесем в таблицу.

№шага ●	Промежуток изоляции	*C*	*f(C)*	│*x – x*│
1	[1;2]	*1,5*	*4,3437*	
2	[1; 1,5]	*1,25*	*0,4893*	0,25
3	[1; 1,25]	*1,125*	*-0,4636*	0,125
4	1,125; 1,25]	1,188	*-0,449*	*0,063*
5	[1,188; 1,25]	*1,219*	*0,2056*	*0,031*
6	[1,188; 1,219]	1,2035	*0,076*	*0,084*
7	[1,2035; 1,219]	*1,2112*	*0,1396*	*0,082*
8	[1,2035; 1,2112]	1,2074	*1,1082*	*0,04*
9	[1,2035; 1,2074]	*1,2054*	*0,0918*	*0,001*
10	[1,2035; 1,2054]	1,2044	-	-

Заключение

- Данная лекция даёт возможность изучить один из методов решения нелинейных уравнений – метод половинного деления или метод дихотомии;
- В следующей лекции изучим ещё один метод – метод Ньютона.