Наилучшее приближение функций, заданных таблично. Сглаживание функций. Метод наименьших квадратов.

ВЫПОЛНИЛ

Студент группы Б21-791-1 Э.В. Серегин

Таблично заданная функция

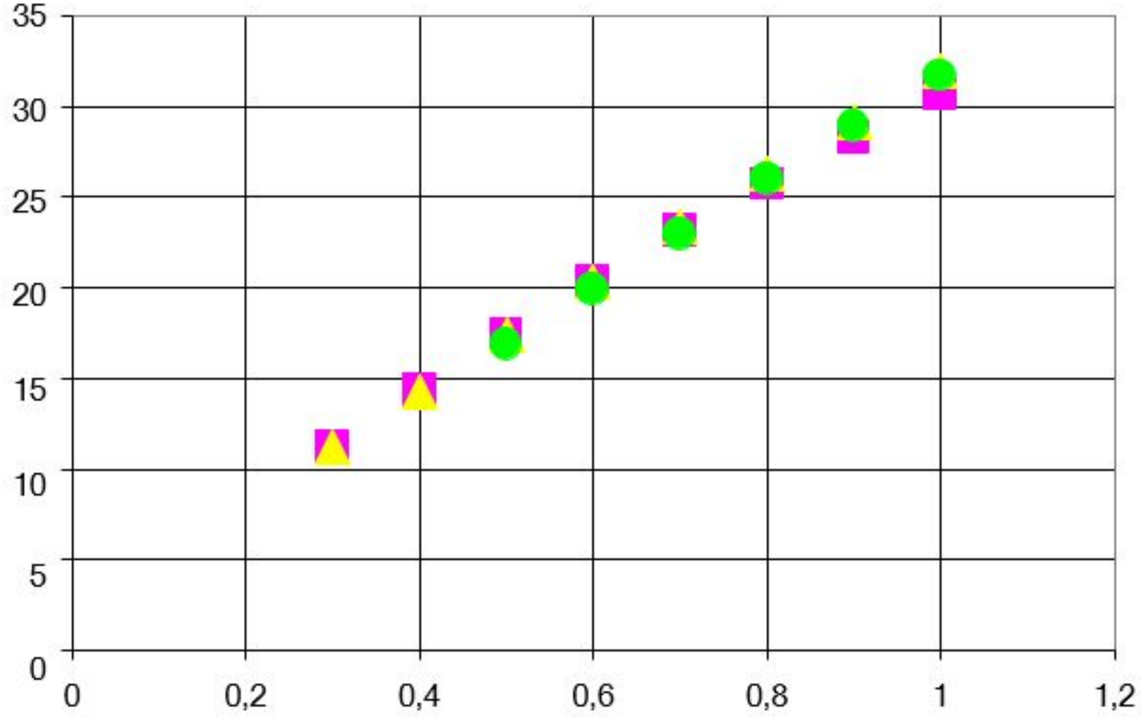
Зависимость разрядного напряжения газового промежутка с однородным полем от расстояния между электродами.

Расстояние между шарами, см	Диаметр шаров, см		
	2	**5**	**12,5**
0,30	11,2	11,2	
0,40	14,4	14,3	
0,50	17,4	17,4	16,8
0,60	20,4	20,4	19,9
0,70	23,2	23,4	23,0
0,80	25,8	26,3	26,0
0,90	28,3	29,2	28,9
1,0	30,7	32,0	31,7

(табл. 1)

Таблично заданная функция

Зависимость разрядного напряжения газового промежутка с однородным полем от расстояния между электродами.



(рис. 1)

Таблично заданная функция

Зависимость разрядного напряжения газового промежутка с однородным полем от расстояния между электродами.

Расстояние между шарами, см	Диаметр шаров, см		
	2	**5**	**12,5**
0,05	2,8		
0,10	4,7		
0,15	6,4		
0,20	8,0	8,0	
0,25	9,6	9,6	
0,30	11,2	11,2	

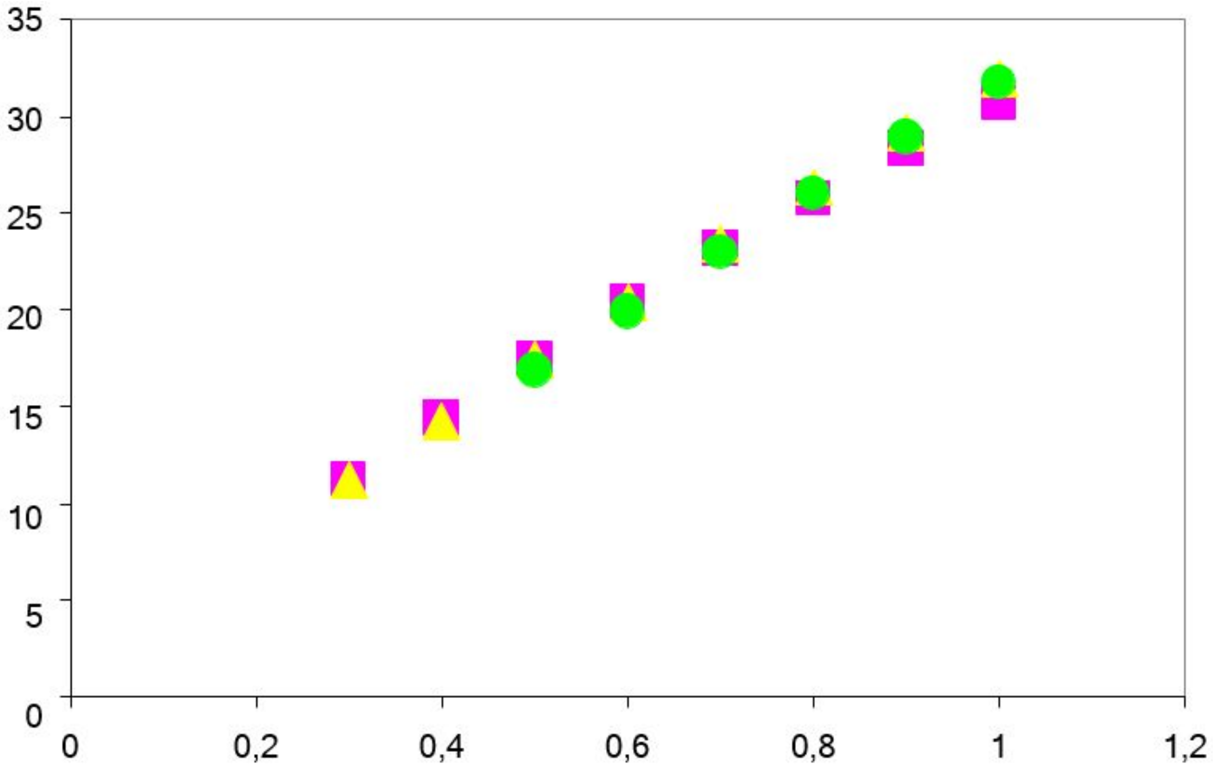
(табл. 2)

Аппроксимация таблично заданных функций (приближение функций, заданных таблично)

- Таблица - дискретное множество значений аргумента (x_i) поставленое в соответствии с множеством значений функции (y_i), $y_i = f(x_i)$, $i = 0, 1, 2, \ldots, n.$
- На практике часто нужно знать значения y

  при других значениях x.
- **Аппроксимация** (приближение) – замена данной функции приближенной (аппроксимирующей) функцией так, чтобы отклонение в заданном диапазоне изменения x было минимальным.

Аппроксимация



(рис.1)

$$U_{\text{пр}} = 23{,}85\delta \cdot S + 7{,}85\delta \cdot S$$

Критерии аппроксимации

1. **Метод наименьших квадратов.**
   Мерой близости аппроксимирующей функции f(x) к табличной является величина:

   $$S = \sum_{i=0}^{n} \left[f(x_i) - y_i \right]^2$$

   Наилучшее приближение – при минимуме S.
2. **Равномерное приближение.**
   Более жесткое требование близости аппроксимирующей функции к табличной: во всех точках отклонение аппроксимирующей функции f(x)от табличной должно быть меньше заданной величины.

   $$\left| f(x_i) - y_i \right| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0$$

Сглаживание функций - сглаживающий сплайн.

Сглаживающий сплайн - это метод сглаживания аппроксимации кривой набора зашумлённых исходных данных с использованием сплайн-функций.

Пусть $(x_i, Y_i); x_1 < x_2 < \cdots < x_n, i \in \mathbb{Z}$ последовательность наблюдений, порождённы $Y_i = \mu(x_i)$ ем . Приближение сглажива $\hat{\mu}$ щими спл μ йнами функции

определяется как функция (в классе дважды дифференцируемых функций),

$$\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \hat{\mu}(x_i))^2 + \lambda \int_{x_1}^{x_n} \hat{\mu}''(x)^2\, dx.$$

Примечания:

1. $\lambda \geq 0$ параметр сглаживания, контролирующий соотношение между точностью воспроизведения данных и «неровностью» аппроксимирующей функции.
2. Интеграл вычисляется по всему диапазону x_i .
3. При $\lambda \to 0$ (нет сглаживания), сглаживающий сплайн превращается в интерполяционный сплайн.
4. При $\lambda \to 0$ (бесконечное сглаживание), штраф за неровность становится преобладающим и аппроксимация превращается в линейную МНК аппроксимацию.
5. Наиболее часто в современной статистической литературе используется штраф за неровность на основе второй производной, однако метод может быть легко адаптирован к использованию штрафов на основе других производных.
6. В ранней литературе, с равноудалёнными , для вычисления штрафа вместо производной использовались конечные разности второго и третьего порядка.

Метод наименьших квадратов

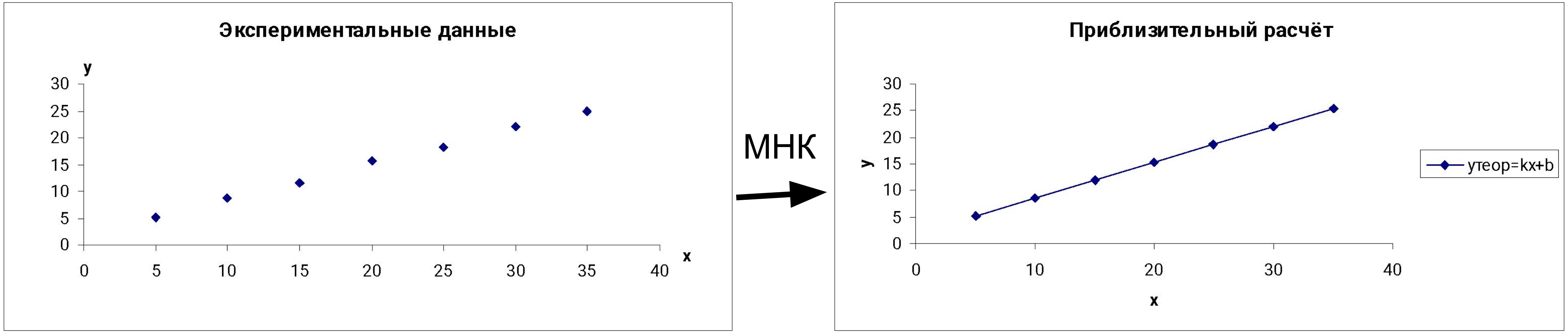
- Это один из методов регрессионного анализа для оценки неизвестных величин по результатам измерений, содержащих случайные ошибки.
- Метод наименьших квадратов применяется также для приближенного представления заданной функции другими (более простыми) функциями и часто оказывается полезным при обработке наблюдений.

Основной принцип метода наименьших квадратов

При замене точного (неизвестного) параметра модели приблизительным значением необходимо минимизировать разницу между экспериментальными данными и теоретическими (вычисленными при помощи предложенной модели).

Приближение

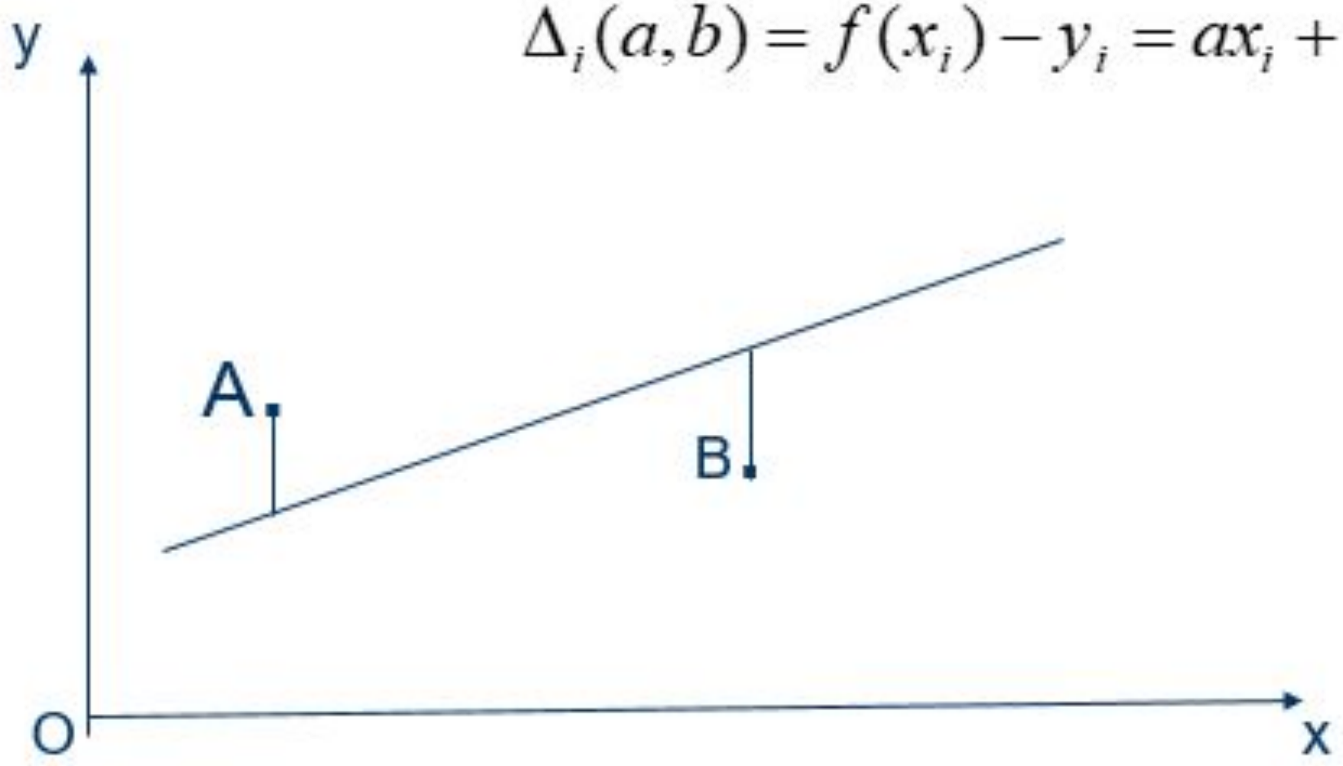
Так же с помощью МНК из экспериментальных данных сделать приблизительный расчет (рисунок 2):



(рис. 2)

Отклонение точки от прямой

$$\Delta_i(a,b) = f(x_i) - y_i = ax_i + b - y_i$$



Как учесть отклонение всех точек?

В рамках метода наименьших квадратов минимизируется величина:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$$

Суммарное отклонение всех точек

Метод наименьших квадратов

Пусть нам известно оптимальное значение a. Тогда S зависит только от b. Для того, чтобы найти минимум, надо приравнять производную к нулю.

$$S_b' = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot \Delta_i \cdot (\Delta_i)_b' = \sum_{i=1}^{n} 2 \cdot (ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 2 \cdot (a \sum_{i=1}^{n} x_i + bn - \sum_{i=1}^{n} y_i) = 0$$

$$\Downarrow$$

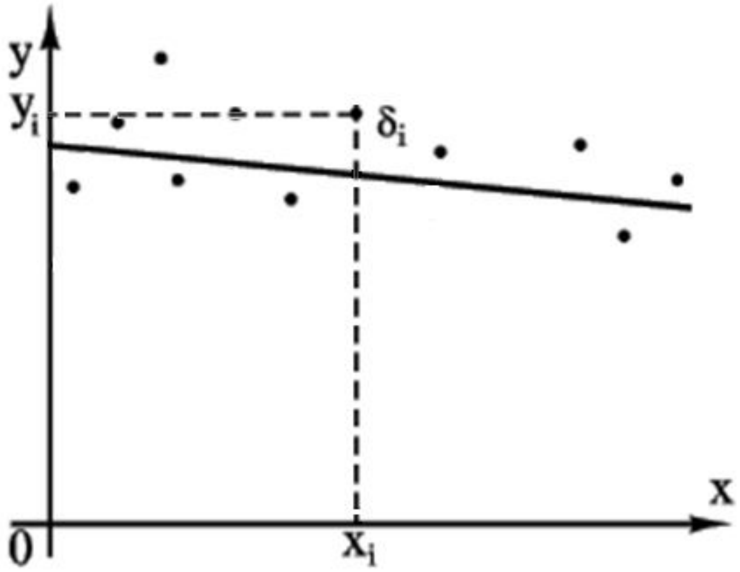
$$b = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} - a \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{y} - a\overline{x}$$

Суть метода наименьших квадратов

Рассмотрим применение МНК в случае применения линейного полинома:

$\varphi(x) = y = a + bx$ (1)

Пусть мы нашли такую прямую (рис. 3)



(рис. 3)

Обозначим через δi расстояние точки xi от этой прямой, измеренное параллельно оси y.

Суть метода наименьших квадратов

Из уравнения (1) следует, что

$$\delta_i = y_i - bx_i - a \qquad (2)$$

Чем меньше числа δi по абсолютной величине, тем лучше подобрана прямая (1). В качестве характеристики точности подбора прямой (1) можно принять сумму квадратов:

$$SS = \sum_{i=1}^{n} \delta_i^{\,2} \qquad (3)$$

Покажем, как можно подобрать прямую (1) так, чтобы сумма квадратов SS была минимальной.
Из уравнений (2) и (3) получаем:

$$SS = \sum_{i=1}^{n} (y_i - bx_i - a)^2 \qquad (4)$$

Суть метода наименьших квадратов

Условия минимума SS будут:

$$\frac{\partial SS}{\partial a} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - bx_i - a) = 0 \qquad (5)$$

$$\frac{\partial SS}{\partial b} = -2\sum_{i=1}^{n}(y_i - bx_i - a)x_i = 0 \qquad (6)$$

Уравнения (6) и (7) можно записать в таком виде:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i x_i = b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + a\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = b\sum_{i=1}^{n} x_i + na \qquad (8)$$

Из уравнений (7) и (8) определяют неизвестные коэффициенты a и b:

$$a = \frac{\sum y_i - b\sum x_i}{n}$$

$$b = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{(\sum x_i)^2 + n\sum x_i^2}$$

Пример

Пример.

В результате эксперимента получены значения x и y, сведенные в таблицу 2:

x	1	2	3	4	5	6
y	5.2	6.3	7.1	8.5	9.2	10.0

(табл. 2)

Найти аппроксимирующую функцию (1) по методу наименьших квадратов.

Решение: Определяем(табл.3

Σx_i	Σy_i	Σx_i^2	$\Sigma x_i y_i$
21	46	91	179

(табл.3
)

Записываем уравнения (8) и (9):

21a+91b=179,1,

6a+21b=46,3,

отсюда находим: a=4,3; b=0,98.

Итоговая формула: **y(x) = 4,3 + 0,98x**

Список литературы

1. Лоран, П. Ж. Аппроксимация и оптимизация. — М.: Мир, 1975. — С. 496.

2. Элементы модели сущность-связь [Электронный ресурс]. URL: http://citforum.ru/database/dblearn/dblearn08.shtml (дата обращения: 24.06.2022).

3. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы: т.2. -М.:Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977.

4. Идельсон Н. И. Способ наименьших квадратов и теория математической обработки наблюдений. - М.: Геодезиздат, 1947. - 358 с.

5. Иордан В. Руководство по геодезии. Том 1. Уравнительные вычисления по способу наименьших квадратов. - М.: РЕДБЮРО ГУГК при СНК СССР, 1939. - 639 с.

6. Линник Ю. В. Метод наименьших квадратов и основы математико-статистической теории обработки наблюдений. - М.: Физматгиз, 1962. - 352 с.

7. Коугия В. А. Избранные труды. Исследования по теории математической обработки результатов измерений: монография. - СПб.: ПГУПС, 2012. - 447 с.

8. Фишер Р. А. Статистические методы для исследователей. - М.: Госстатиздат, 1958. - 267 с.

9. Гаусс К.Ф., Избранные сочинения. Т.1; Способ наименьших квадратов. М.; Геодезиздат, 1957.

10. Мудров В.И., Кушко В.Л., Методы обработки измерений: квазиподобные оценки. М.; Наука, 1983