Теория вероятностей и математическая статистика

Необходимые сведения из теории вероятности

Теория вероятностей – математическая наука, которая позволяет по вероятности одних случайных событий находить вероятности других случайных событий, связанных каким-либо образом между собой.

Элементарные события и вероятность

Исход опыта - результат любого проводимого опыта (эксперимента).

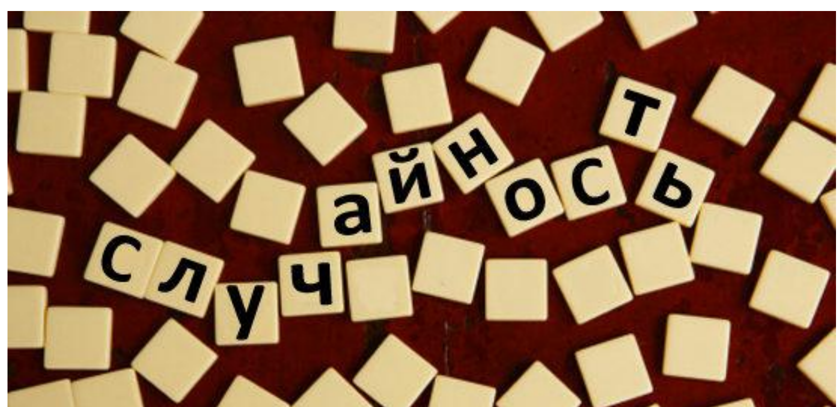
Событие - исход или группа исходов, удовлетворяющих определённым требованиям.

События

Достоверное событие – это такое событие, которое всегда происходит в рассматриваемом эксперименте.

Невозможное событие – это такое событие, которое никогда не может наступить в рассматриваемом эксперименте.

Случайное событие - событие, которое при воспроизведении опыта может наступить, а может и не наступить.



Вероятность события

Вероятность события - численная мера степени объективной возможности этого события.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

Полная группа событий – это несколько возможных событий, одно из которых *обязательно* должно произойти в результате опыта.

События

Несовместные события – это события, которые не могут появиться вместе.

Равновероятные события – события, вероятности которых равны между собой.

Классическая формула для вероятности события

Вероятность события A - отношение благоприятного числа исходов опыта к общему числу всех равновозможных несовместных элементарных исходов

$$P(A) = \frac{m}{n}$$

где m – благоприятное число исходов опыта, n – общее число исходов опыта.

Свойства вероятности

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n}{n}=1$$

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{0}{n}=0$$

Вероятность события $= \dfrac{\text{Число благоприятных исходов}}{\text{Число всех исходов}}$

$$\mathbf{P(A)}=\frac{m}{n}$$

$$\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$$

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей

Статистическая вероятность

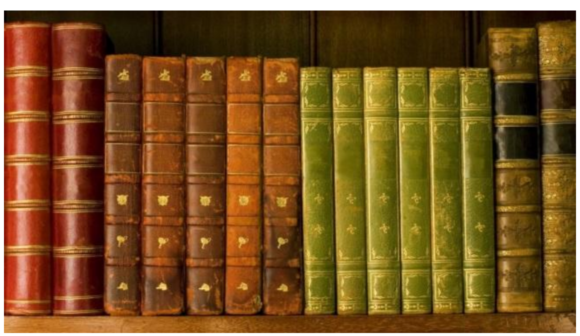
Относительная частота события A (статистическая вероятность) серии одинаковых опытов - отношение числа опытов, в которых появилось событие А, к общему числу фактически произведённых опытов.

$$W(A) = \frac{m}{n}$$

где m – число появлений события А, n – число опытов в серии.

Комбинаторика

Комбинаторика изучает количество комбинаций, которое можно составить из элементов, заданного конечного множества, в определенных условиях.



Перестановка

Перестановка - это комбинация, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения.

$$P_n = n!$$

где $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

Пример 1

Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, если каждая цифра входит в изображение числа только один раз?

Решение. Искомое число трехзначных чисел

$$P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$$

Размещение

Размещение - это комбинация, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом, либо их порядком.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)...(n-m+1)$$

Пример 2

Сколько можно составить сигналов из 6 флажков различного цвета, взятых по 2?

Решение. Искомое число сигналов

$$A_6^2 = 6 \cdot 5 = 30$$

Сочетание

Сочетание - это комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Пример 3

Сколькими способами можно выбрать две детали из ящика, содержащего 10 деталей 2?

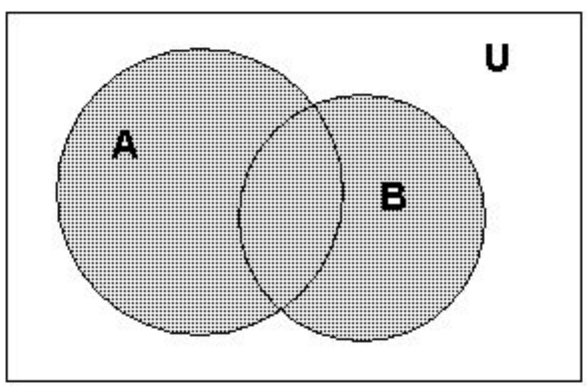
Решение. Искомое число сигналов

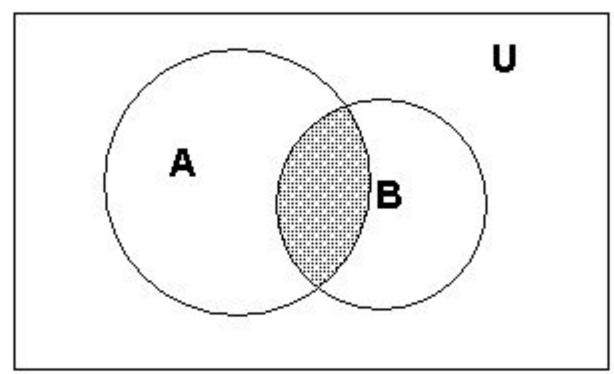
$$C_{10}^{2} = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$$

Основные правила комбинаторики

Правило суммы. Если некоторый объект А может быть выбран из совокупности объектов *m* способами, а другой объект *B* может быть выбран *n* способами, то выбрать либо *A,* либо В можно ***m* + *n*** способами.

Правило произведения. Если объект А можно выбрать из совокупности объектов *m* способами и после каждого такого выбора объект *B* можно выбрать *n* способами, то пара объектов *(A, B)* в указанном порядке может быть выбрана ***mn*** способами.





Пример 4

В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди шести взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число исходов испытания равно числу способов C_{10}^{6}

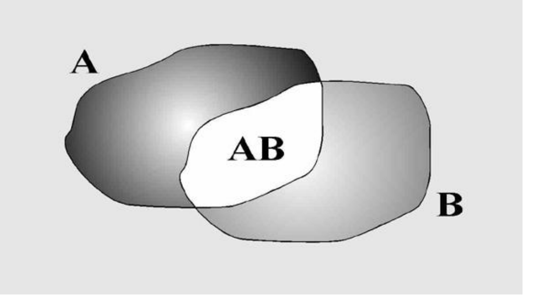
Число благоприятствующих событию $C_7^4 \cdot C_3^2$

Искомая вероятность $P(A) = \dfrac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6} = \dfrac{1}{2}$

Теорема сложения вероятностей

Теорема. Вероятность появления одного из двух совместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий без учета вероятности их совместного появления:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$$



Теорема. Вероятность появления одного из двух несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

Следствие. Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

Пример

Найти вероятность того, что наудачу взятое двухзначное число окажется кратным либо 2, либо 5, либо тому и другому одновременно.

<u>Решение.</u> Пусть A - наудачу взятое двузначное число кратно 2, а B - это число кратно 5. A и B - события совместные.

Двузначные числа - это 10, 11, . . . ,98, 99. (Всего их 90). Очевидно, 45 из них кратны 2 (событие A), 18 кратны 5 (событие B) и, наконец 9 кратны и 2, и 5 одновременно (события A и B) .

По классическому определению вероятности:

$$P(A) = 45/90 = 0,5;\ P(B) = 18/90 = 0,2;\ P(AB) = 9/90$$

и следовательно:

$$P(A + B) = 0,5 + 0,2 - 0,1 = 0,6.$$

Теорема произведения вероятностей

Теорема. Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(AB) = P(A)P_A(B).$$

Для *независимых* событий теорема умножения имеет вид

$$P\ (AB) = P\ (A)\ P(B).$$

Пример 1

У сборщика имеется 3 конусных и 7 эллиптических валиков. Сборщик взял один валик, а затем второй. Найти вероятность того, что первый из взятых валиков – конусный, а второй – эллиптический.

Решение. Вероятность того, что первый валик окажется конусным (событие *А),* Р (А) = 3/10.

Вероятность того, что второй валик окажется эллиптическим (событие *В),* вычисленная в предположении, что первый валик — конусный, т. е. условная вероятность $P_A(B) = 7/9$.

По теореме умножения, искомая вероятность

$$P(AB) = P(A)\,P_A(B) = (3/10) \cdot (7/9) = 7/30.$$

Заметим, что, сохранив обозначения, легко найдем: Р (В) =7/10, $P_B(A) = 3/9$, $P(B)P_B(A) = 7/30$, что наглядно иллюстрирует справедливость равенства

$$P(A)\,P_A(B) = P(B)\,P_B(A).$$

Формула Бернулли

Задача. Вычислить вероятность того, что при n испытаниях событие A осуществится ровно k раз и, не осуществится $n - k$ раз.

Формула Бернулли

$$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot p^k \cdot q^{n-k}.$$

Пример

Вероятность того, что расход электроэнергии в продолжение одних суток не превысит установленной нормы, равно P=0,75 . Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течении 4 суток не превысит нормы.

Решение

Вероятность нормального расхода электроэнергии постоянна и равна P=0,75 .

Следовательно, вероятность перерасхода также постоянна и равна q=1-P =0,25.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot p^4 \cdot q^2 = \frac{6!}{4! \cdot (6-4)!} \cdot 0,75^4 \cdot 0,25^2 = 0,099.$$

Случайная величина

Случайная величина (СВ)

- величина, которая в результате опыта может принимать то или иное значение, причём до завершения опыта неизвестно какое.

Дискретная случайная величина

Дискретная случайная величина (ДСВ)

- случайную величину, которая может принимать отдельные, изолированные значения с определенными вероятностями

Закон распределения

Закон распределения

- любое правило, устанавливающее соответствие между значениями случайной величины и вероятностями ее наступления.

Ряд распределения ДСВ

Ряд распределения

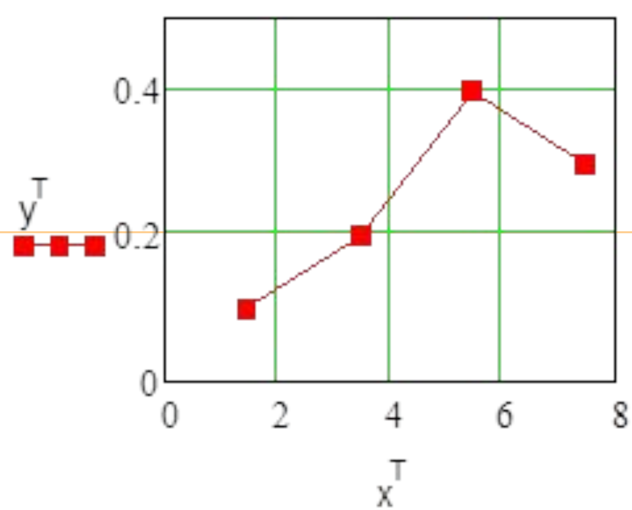
- совокупность всех возможных значений x_i и соответствующих им вероятностей $p_i = P(X = x_i)$

x_1	x_2	…	x_n
p_1	p_2	…	p_n

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$$

Многоугольник распределения

- Графическое изображение ряда распределения

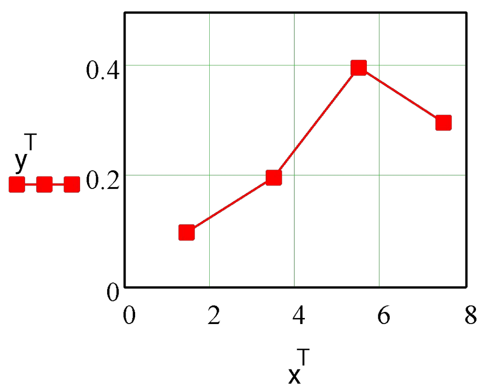


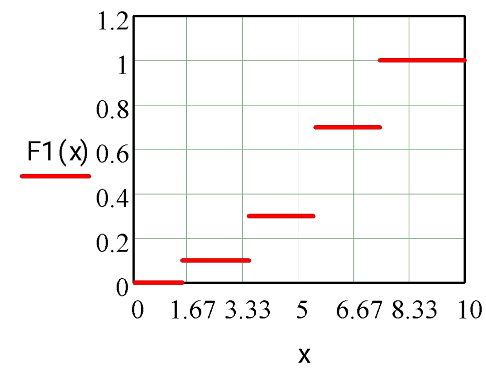
Функция распределения СВ

Функция распределения

- функция *F(x)*, значение которой в точке x равно вероятности того, что случайная величина X будет меньше этого значения x, то есть F(x)=P{X<x}

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i$$





Пример

Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеются 10 дефектных, выбраны случайным образом пять изделий для проверки их качества. Построить ряд распределений случайного числа X дефектных изделий, содержащихся в выборке .

<u>Решение.</u> Так как в выборке число дефектных изделий может быть любым целым числом в пределах от 0 до 5 включительно, то возможные значения x_i случайной величины X равны:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = 4, \quad x_6 = 5$$

Вероятность P(X = k) того, что в выборке окажется ровно k (k=0, 1, 2, 3, 4, 5) дефектных изделий, равна $P(X = k) = \dfrac{C_{10}^{k} \cdot C_{90}^{5-k}}{C_{100}^{5}}$

Используя для проверки равенство $\sum_{k=1}^{6} p_k = 1$, убеждаемся, что расчеты и округление произведены правильно (см. таблицу).

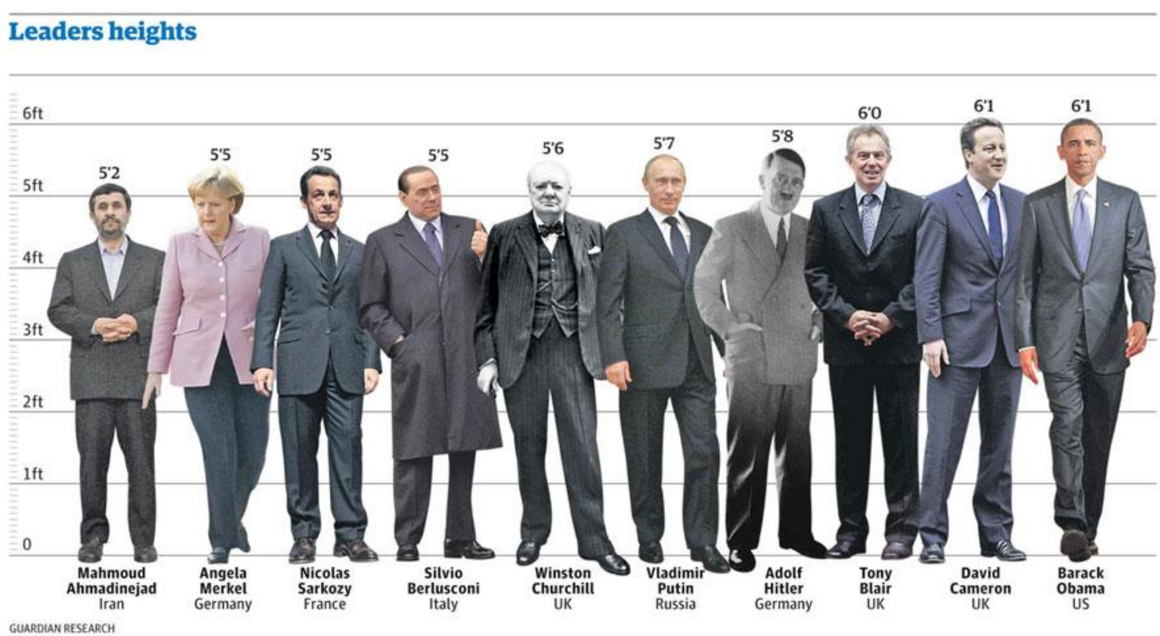
x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	0,583	0,3401	0,070	0,007	0	0

Непрерывная случайная величина

Непрерывная случайная величина (НСВ)

- Случайная величина, возможные значения которой непрерывно заполняют некоторые конечные или бесконечные промежутки

$$F(x) = \int_{-\infty}^{X} f(x)dx$$



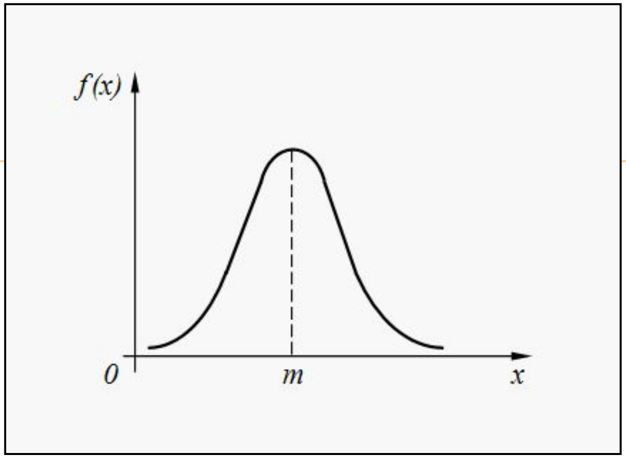
Плотность распределения НСВ

Плотность распределения (или плотность вероятности)

- производная функции распределения *F(x)* случайной величины, обозначаемая *f(x)*.

Кривая распределения

- График плотности распределения



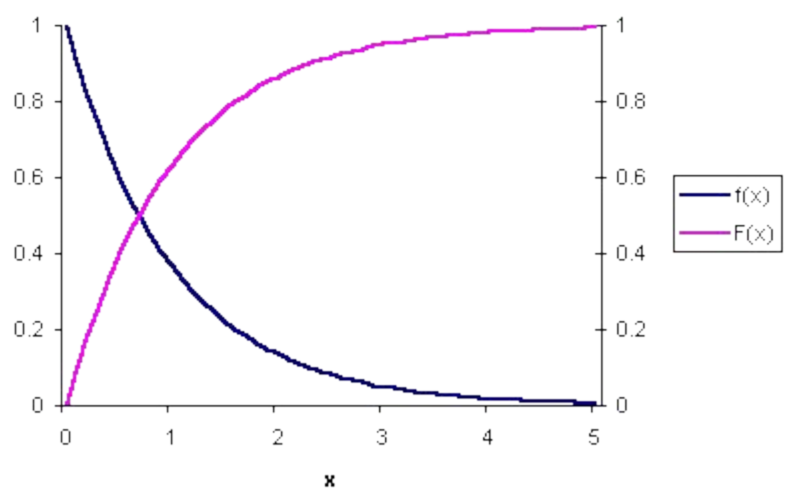
Интегральный и дифференциальный законы распределения

$$F(x) = \int_{-\infty}^{X} f(x)dx$$

Функция распределения

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} = \frac{dF(x)}{dx}$$

Плотность распределения



Свойства функции распределения

$F(-\infty) = 0$

$F(x_{min}) = 0$

$F(+\infty) = 1$

$F(x_{max}) = 1$

$F(x1) \leq F(x2)$, при $x1 < x2$

$P(a \leq X < b) =$

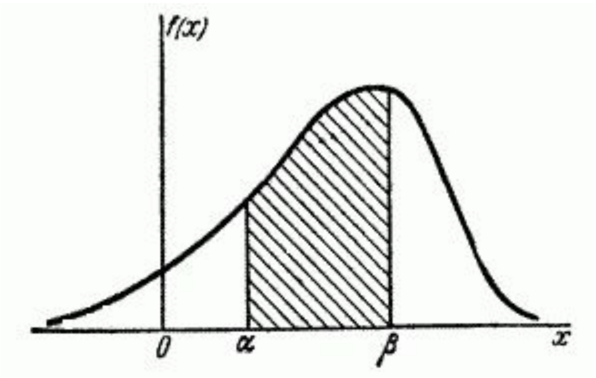
$= F(b) - F(a)$

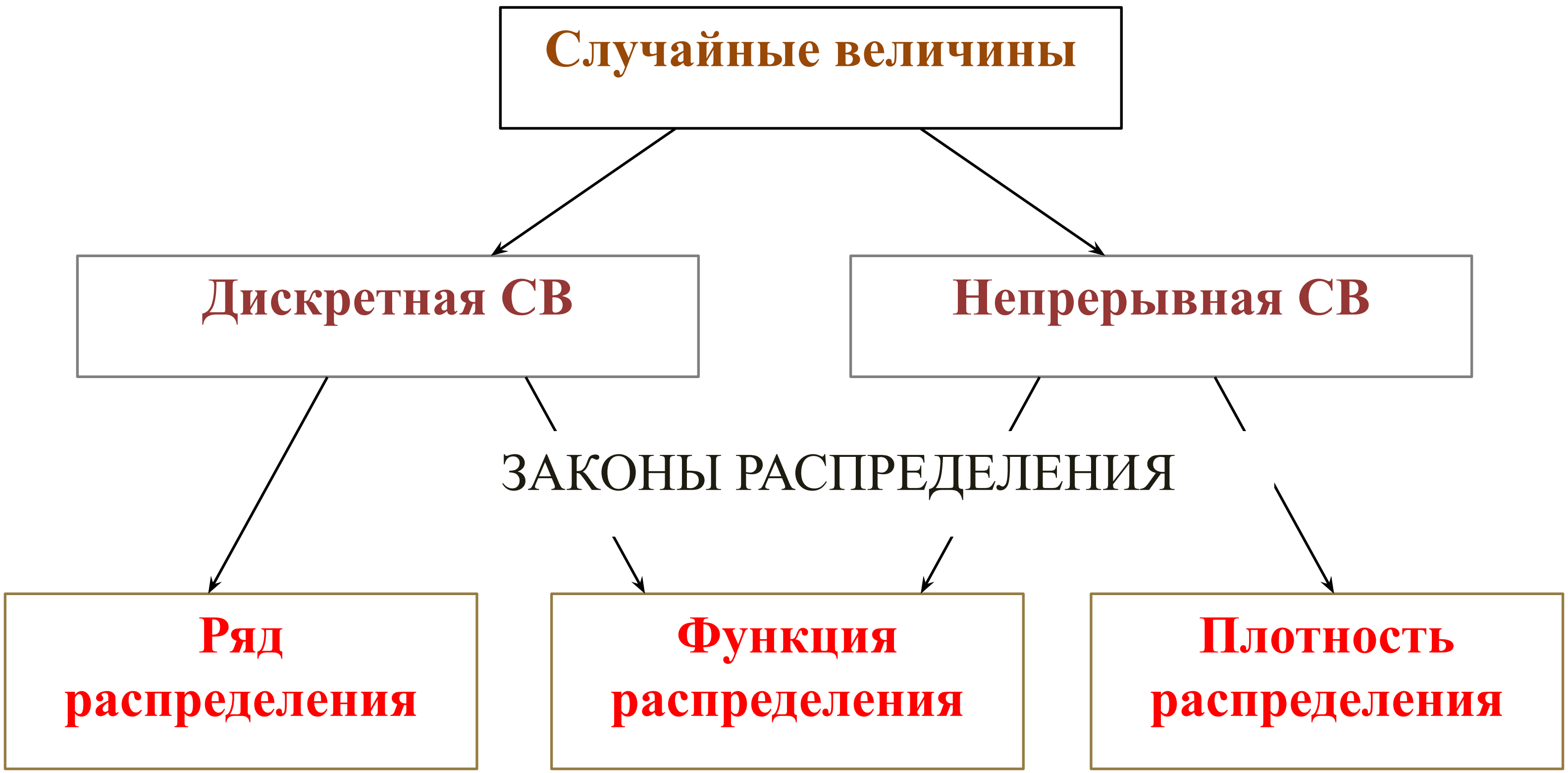
Свойства плотности распределения

Плотность распределения неотрицательна: $f(x) \ge 0$.

Условие нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$




Случайные величины
Дискретная СВ
Непрерывная СВ
ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
Ряд распределения
Функция распределения
Плотность распределения

Числовые характеристики СВ

Математическое ожидание

- среднее значение случайной величины

$$m_x = M[x] = \begin{cases} \sum_i x_i \cdot P\{X = x_i\} & для \quad ДСВ, \\ \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx & для \quad НСВ. \end{cases}$$

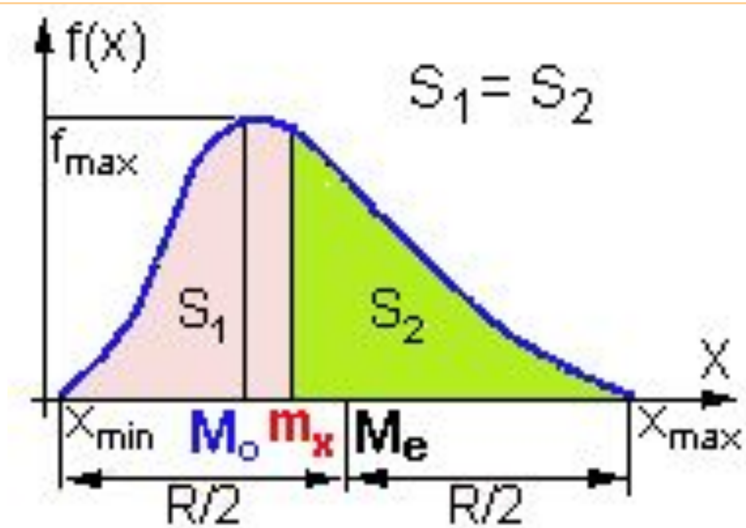
Мода и медиана

Мода (Mx, Mo)

- наиболее вероятное значение СВ, т.е. то значение, для которого вероятность p_i (для дискретной СВ) или $f(x)$ (для непрерывных СВ) достигает максимума.

Медиана (Me)

- значение СВ, для которого выполняется условие $P(X<Me) = P(X \geq Me)$



Начальный и центральный моменты СВ

Начальный момент s-го порядка

- математическое ожидание s-й степени этой случайной величины: $\alpha_s = M[X^s]$.

Центрированная СВ

- отклонение СВ от математического ожидания: $\overset{0}{X} = X - m_x$

Центральный момент

- момент центрированной случайной величины

Центральный момент порядка s

- математическое ожидание s-й степени центрированной случайной величины: $\mu_s = M\left[\overset{0}{X}{}^s\right] = M\left[(X - m_x)^s\right]$

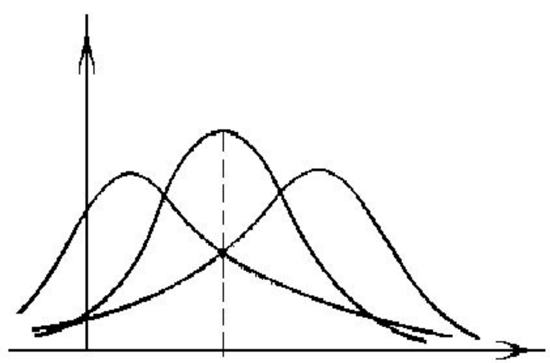
2. Числовые характеристики случайной величины

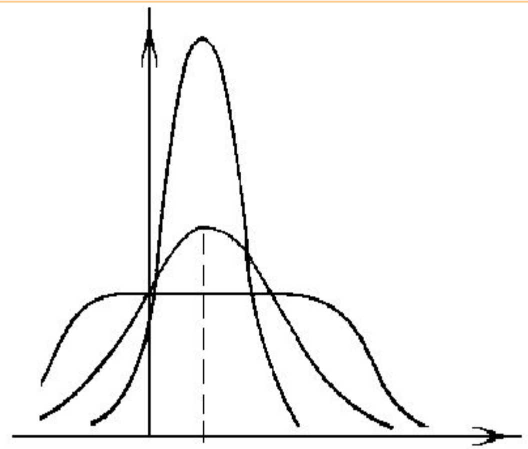
Коэффициент асимметрии (или скошенности)

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Коэффицинет эксцесса (или островершинности)

$$E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$





Дисперсия

Дисперсия

- математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины. Характеризует разброс СВ относительно среднего значения (мат. ожидания)

$$D[x] = \begin{cases} \sum_i (x_i - m_x)^2 \cdot P\{X = x_i\} = \sum_i x_i^2 \cdot P\{X = x_i\} - (m_x)^2 & \text{для } ДСВ, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x)^2 \cdot f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)dx - (m_x)^2 & \text{для } НСВ. \end{cases}$$

Вычислить дисперсию можно:

$$D[X] = M[X^2] - m_x^2$$

Среднее квадратическое отклонение

Среднее квадратическое отклонение (СКО)

- Характеристика $\sigma_x = \sigma[X] = \sqrt{D[X]}$
- характеризует ширину диапазона значений СВ.

Правило 3σ

- [m - 3σ; m + 3σ]

Пример 1

Из партии численностью 25 изделий, среди которых имеется шесть нестандартных, случайным образом выбраны три изделия. Найти математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение нестандартных изделий, содержащихся в выборке.

Решение. По условию задачи СВ Х принимает следующие значения: x1=0; x2=1; x3=2; x4=3. Вероятность того, что в этой выборке окажется ровно i (i = 0, 1, 2, 3) нестандартных изделий, вычисляется по формуле

$$p_i = P\{X = x_i\} = \frac{C_6^i \cdot C_{19}^{3-i}}{C_{25}^i},$$

x_i	1	2	3	4
p_i.	0,41	0,43	0,11	0,005

Математическое ожидание

$$M[X] = \sum x_i p_i =$$

$$0 \cdot 0{,}41 + 1 \cdot 0{,}43 + 2 \cdot 0{,}11 + 3 \cdot 0{,}05 = 0{,}8\ ,$$

Дисперсия $D[X] = M[X^2] - (M[X])^2$

$$M[X^2] = \sum x_i^2 p_i =$$

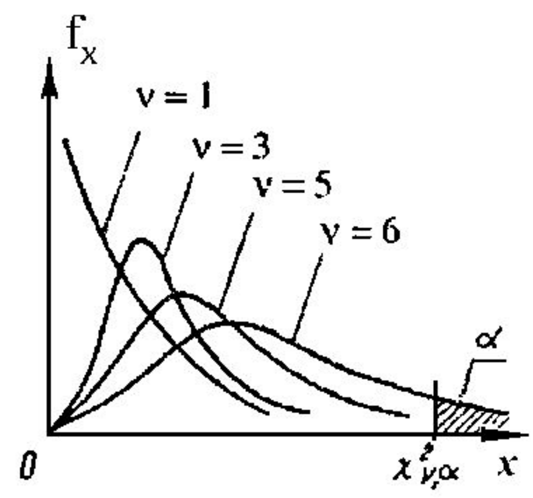
$$= 0 \cdot 0{,}41 + 1 \cdot 0{,}43 + 2^2 \cdot 0{,}11 + 3^2 \cdot 0{,}05 = 1{,}32$$

$$D[X] = 1{,}32 - (0{,}8)^2 = 0{,}68.$$

СКО $\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = 0{,}82$

Некоторые частные законы распределения СВ

- Законы распределения дискретных случайных величин
- Законы распределения непрерывных случайных величин



Биномиальное распределение

$$p_k = P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, \ldots, n$,

,

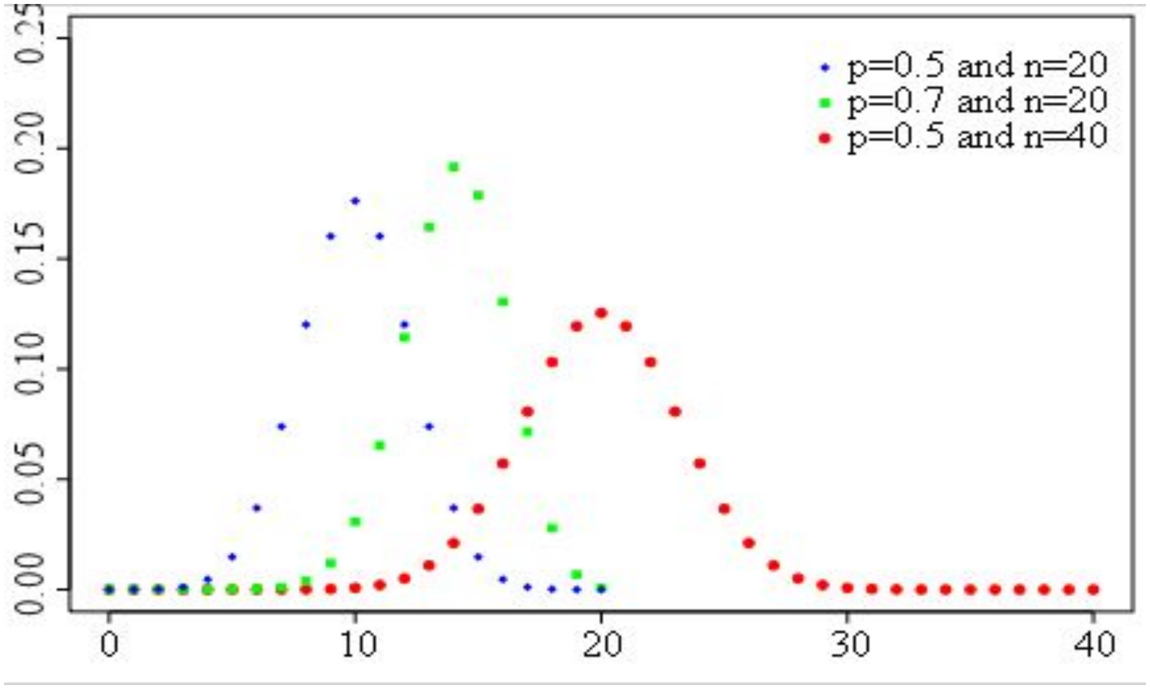
Основные характеристики :

$$M(X) = np$$

$$D(X) = npq$$

$$A = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

$$E = \frac{1-6pq}{npq}$$

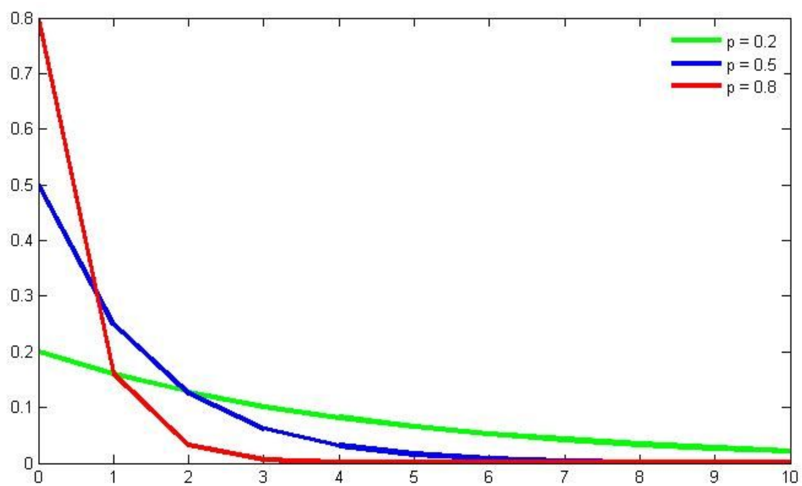


Геометрическое распределение

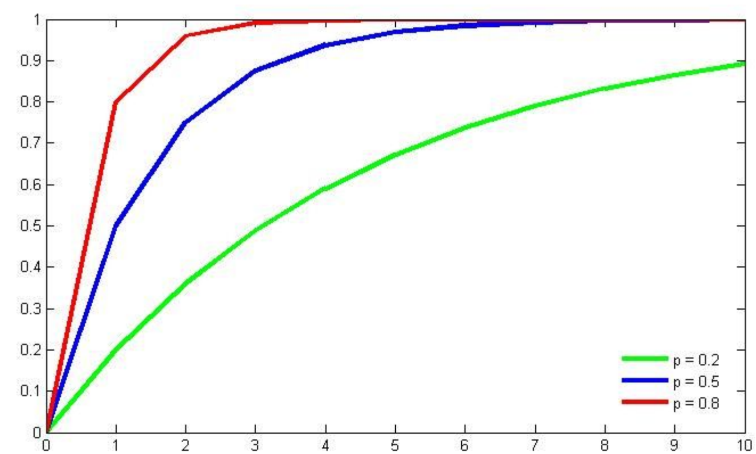
$$p_k = P(\eta = k) = p^k q$$

где $0 < p < 1$, $q = 1 - p$, $k = 0, 1, \ldots, n$,

Функция вероятности



Функция распределения



$$M(X) = \frac{1-p}{p} \quad D(X) = \frac{q}{p^2} \quad A = \frac{2-p}{\sqrt{1-p}} \quad E = 6 + \frac{p^2}{1-p}$$

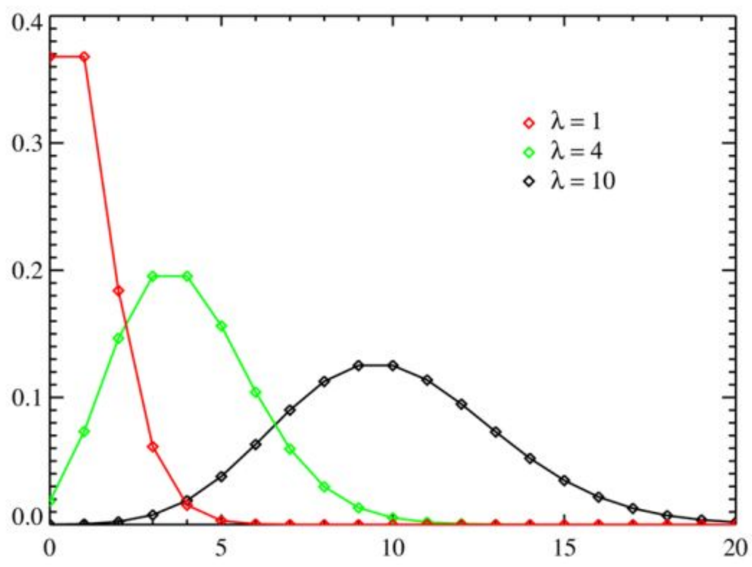
Пуассоновское распределение

$$p_k = P(\mu = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda},$$

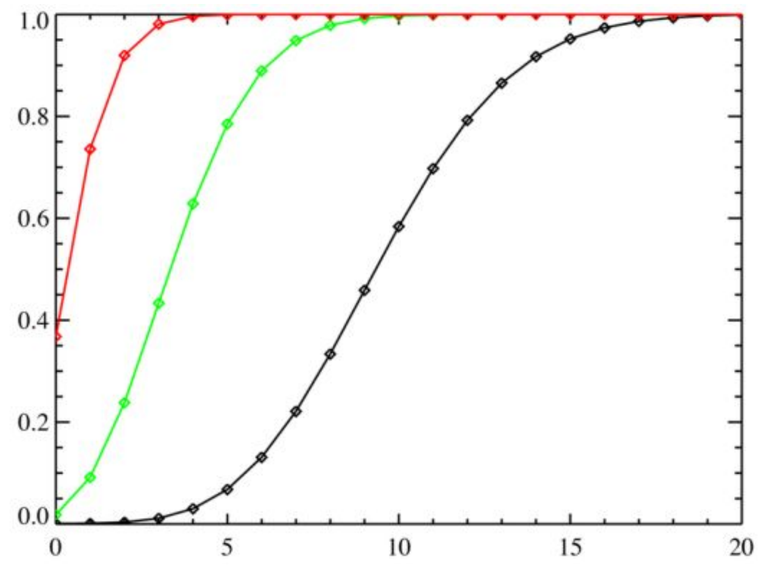
где k= 0, 1, 2, …,

$\lambda > 0$ – параметр пуассоновского распределения.

Функция вероятности



Функция распределения



Основные характеристики

$M(X) = \lambda \quad D(X) = \lambda \quad A = \lambda^{-1/2} \quad E = \lambda^{-1}$

Законы распределения непрерывных случайных величин

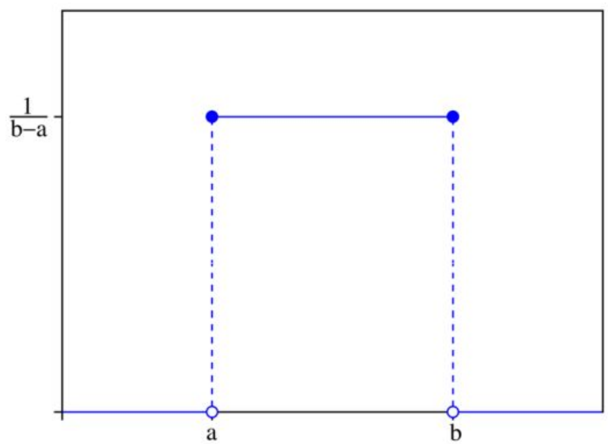
Равномерное распределение

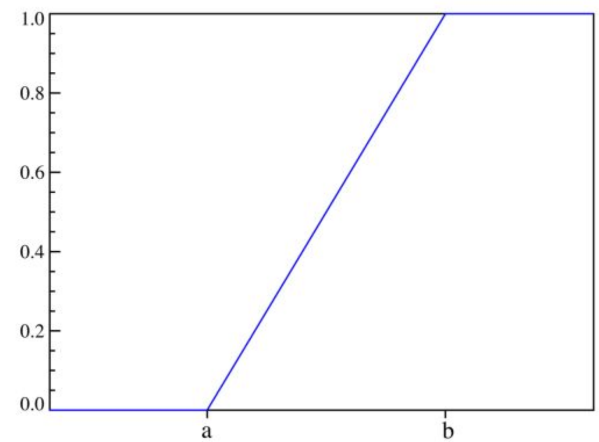
Функция вероятности

$$p_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a,b] \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \end{cases}$$

Функция распределения

$$F_{\xi}(x) = \begin{cases} 0, & x \le a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a < x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$





Основные характеристики:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} \qquad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \qquad A = 0 \qquad E = -\frac{6}{5}$$

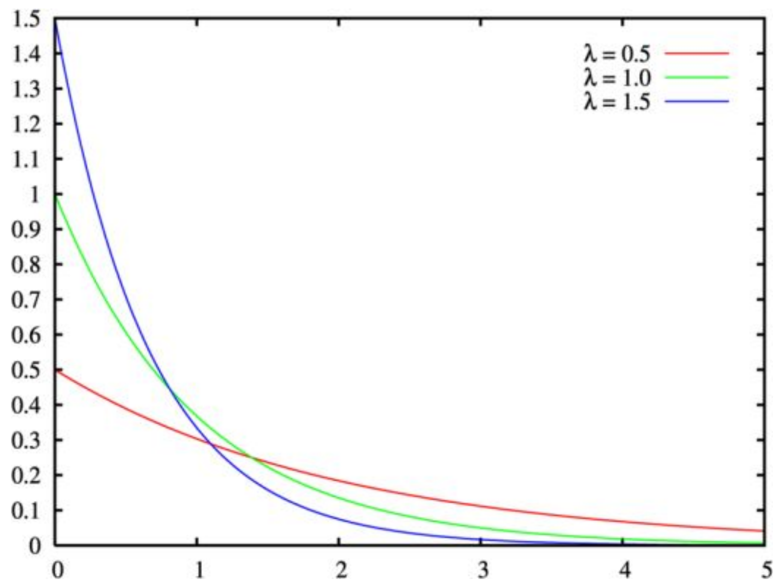
Экспоненциальное (показательное) распределение

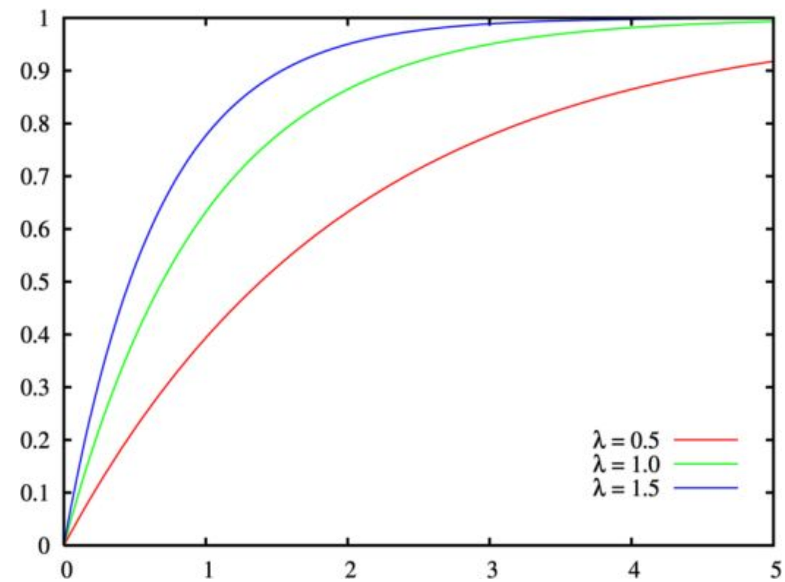
Функция вероятности

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0 \end{cases}$$

Функция распределения

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1 - \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$$





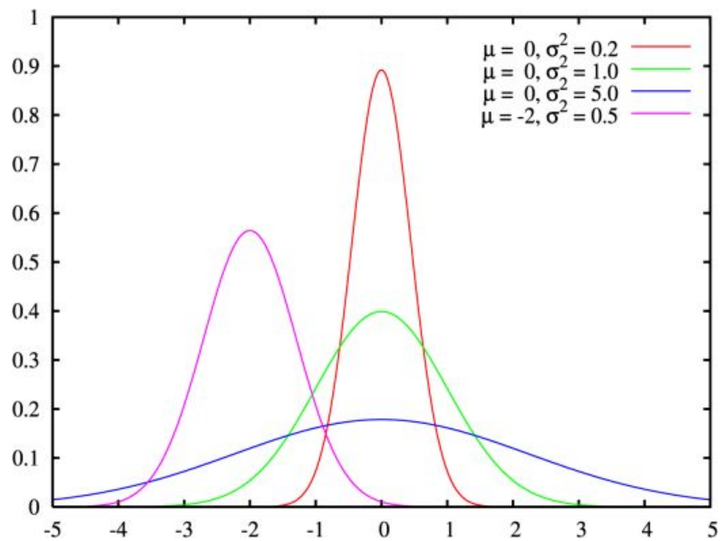
Основные характеристики:

$$M(X) = \lambda^{-1} \quad D(X) = \lambda^{-2} \quad A = 2 \quad E = 6$$

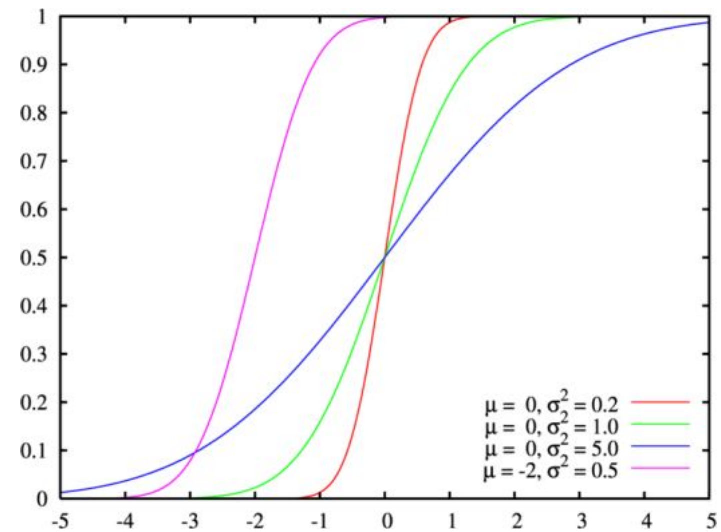
Нормальное распределение

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Функция вероятности



Функция распределения



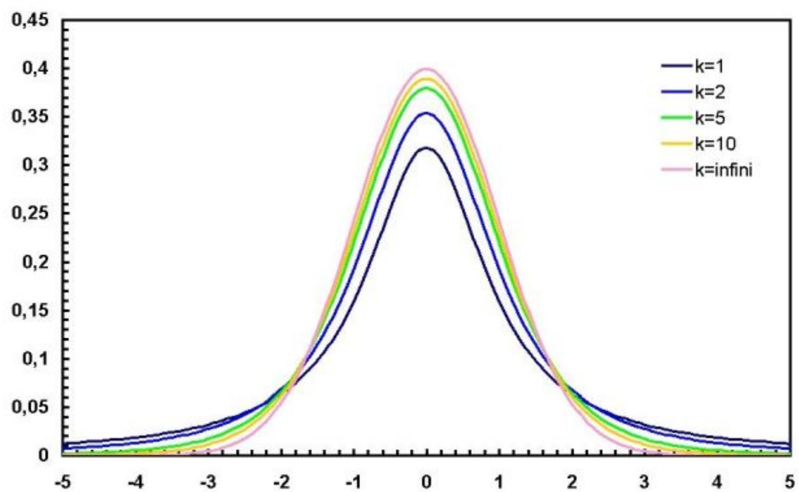
Основные характеристики :

$M(X) = \mu \quad D(X) = \sigma^2 \quad E = 0$

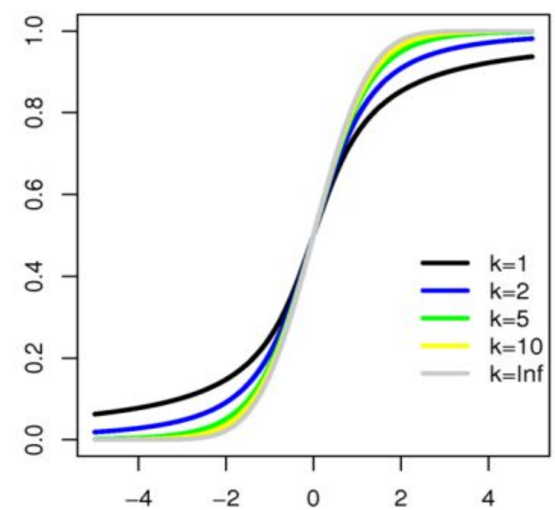
Распределение Стьюдента

$$p_\tau n(x) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, x \in R$$

Функция вероятности



Функция распределения



Основные характеристики :

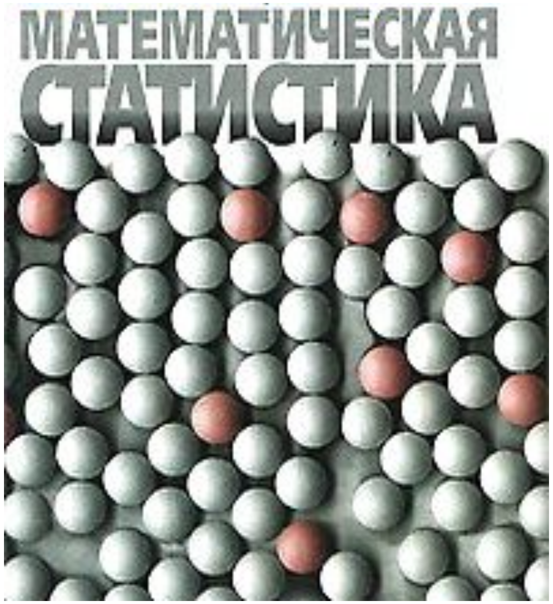
$M(X) = 0, \textit{если} \;\; n > 1$ $\qquad A = 0, \textit{если} \;\; n > 3$

$D(X) = \frac{n}{n-2}, \textit{если} \;\; n > 2$ $\qquad E = \frac{6}{n-4}, \textit{если} \;\; n > 4$

Математическая статистика

Математическая статистика

- раздел математики, посвященный математическим методам сбора, систематизации, обработки и интерпретации статистических данных, а также использование их для научных или практических выводов.



Задачи математической статистики

- **Первая задача** — указать способы сбора и группировки статистических сведений. (описательная статистика)
- **Вторая задача** — разработать методы анализа статистических данных:
  - а) оценка неизвестных параметров распределения (теорию оценивания)
  - б) проверка статистических гипотез о виде неизвестного распределения или о величине параметров распределения, вид которого известен (теория проверки гипотез).

Качественный признак

- стандартность детали

Количественный признак

- контролируемый размер детали

Выборочная и генеральная совокупности

Выборочная совокупность (выборка)

- совокупность случайно отобранных объектов.

Генеральная совокупность

- совокупность объектов, из которых производится выборка.

Объем совокупности (выборочной или генеральной)

- число объектов этой совокупности.

Повторная и бесповторная выборки

Повторная выборка

- выборка , при которой отобранный объект возвращается в генеральную совокупность

Бесповторная выборка

- выборка, при которой отобранный объект в генеральную совокупность не возвращается

Достаточный объем выборки

Репрезентативность (представительность)

Репрезентативная выборка (представительная)

- Выборка, которая правильно представляет генеральную совокупность

Способы отбора

Простой случайный отбор

- отбор, при котором объекты извлекают по одному из всей генеральной совокупности.

Типический отбор

- отбор, при котором объекты отбираются не из всей генеральной совокупности, а из каждой ее «типической» части.

Механический отбор

- отбор, при котором генеральную совокупность «механически» делят на столько групп, сколько объектов должно войти в выборку, а из каждой группы отбирают один объект.

Серийный отбор

- отбор, при котором объекты отбираются из генеральной совокупности не по одному, а «сериями», которые подвергаются сплошному обследованию.

Статистическое распределение выборки

Варианта

- наблюдаемые значения x_i

Частота, n_i

- число наблюдений варианты.

Относительная частота

- отношения частоты к объему выборки $W_i = n_i/n$

Вариационный ряд

- последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке

Статистическое распределение выборки

- перечень вариант и соответствующих им частот или относительных частот

x_i	x_1	x_2	…	x_l
n_i	n_1	n_2	…	n_l
W_i	W_1	W_2	…	W_l

Дискретный вариационный ряд

x_i	x_1	x_2	…	x_l
n_i	n_1	n_2	…	n_l
W_i	W_1	W_2	…	W_l

$$\sum_{i=1}^{l} n_i = n \qquad \sum_{i=1}^{l} W_i = 1.$$

Данные о количестве работников определенного возраста

Возраст, лет	**20**	**24**	**29**	**30**	**32**	**39**	**42**	**50**	**51**	**54**	**55**	**58**	**59**	**60**
Число сотруд-ников	3	2	1	1	3	1	8	6	1	3	2	3	4	1

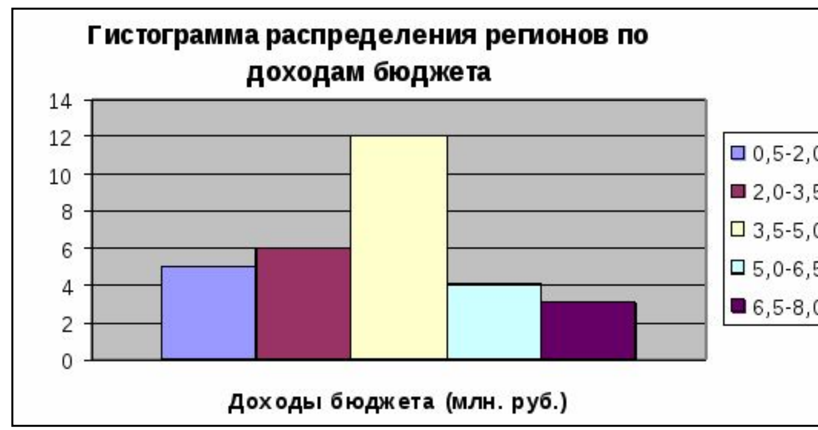
Интервальный вариационный ряд

1. x_{min} и x_{max}
2. Формула Стэрджеса: $l = 1 + 3{,}322 \cdot lg\, n.$
3. Интервальный вариационный ряд

$$a_i = x_{\min} + (i-1) \cdot h,$$

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{l},$$

№ интервала	Границы i-го интервала	Абсолютные частоты	Относительные частоты
1	$a_1 - a_2$	n_1	W_1
2	$a_2 - a_3$	n_2	W_2
...	...	...	...
l	$a_l - a_{l+1}$	n_l	W_l



Эмпирическая функция распределения

Эмпирическая функция распределения (функция распределения выборки)

- функция *F*(x)* , определяющую для каждого значения *x* относительную частоту события *X* < *x.*

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

Теоретическая функция распределения *F(x)*

- функцию распределения генеральной совокупности

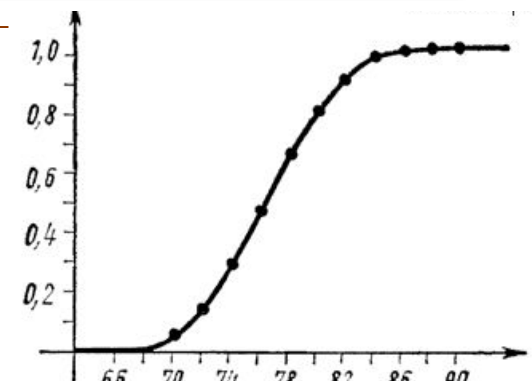
$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|F(x) - F^*(x)\right| < \varepsilon\right] = 1$$

Свойства эмпирической функции распределения

Значения эмпирической функции принадлежат отрезку [0,1]

$F^*(x)$ – неубывающая функция

Если x_1 – наименьшая варианта, то $F^*(x) = 0$ при $x < x_1$;
если x_k –наибольшая варианта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.



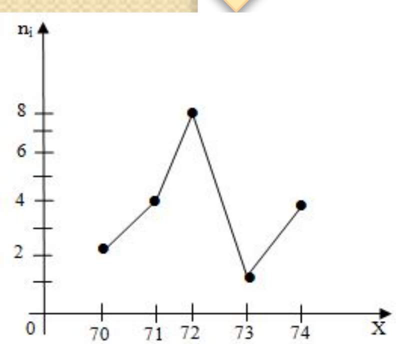
Полигон и гистограмма

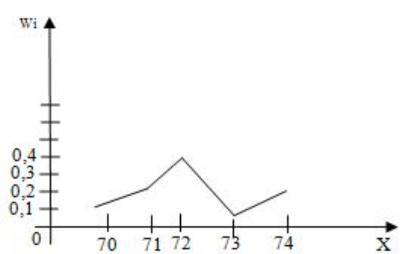
Полигон частот

- ломаная, отрезки соединяют точки $(x_1; n_1)$, $(x_2; n_2)$, ..., $(x_k; n_k)$.

Полигон относительных частот

- ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1; W_1)$, $(x_2; W_2)$, ..., $(x_k; W_k)$.



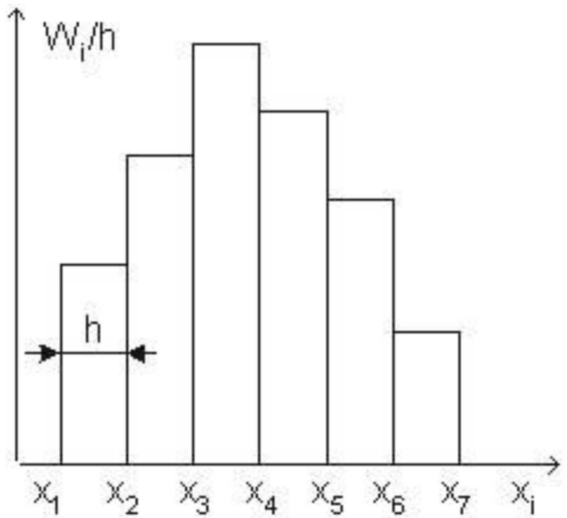


x_i	x_1	x_2	…	x_l
n_i	n_1	n_2	…	n_l
W_i	W_1	W_2	…	W_l

Гистограмма частот (относительных частот) -

- ступенчатая фигура, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиною h, а высоты равны отношению n_i/h (плотность частоты) или W_i/h (плотность относительной частоты).

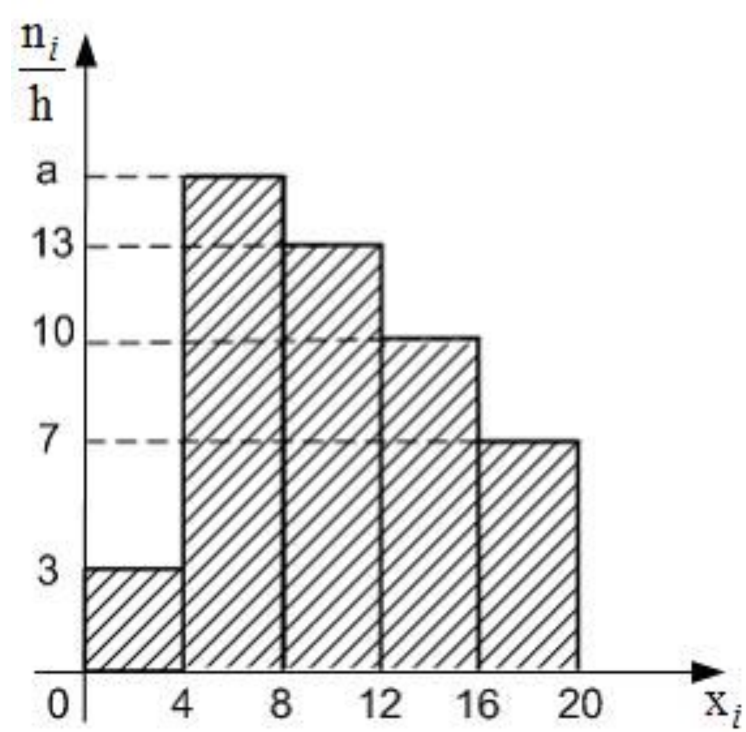
№ интервала	Границы i-го интервала	Абсолютные частоты	Относительные частоты
1	$a_1 - a_2$	n_1	W_1
2	$a_2 - a_3$	n_2	W_2
…	…	…	…
l	$a_l - a_{l+1}$	n_l	W_l



Площадь гистограммы

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $hn_i/h = n_i$ – сумме частот вариант i-го интервала.

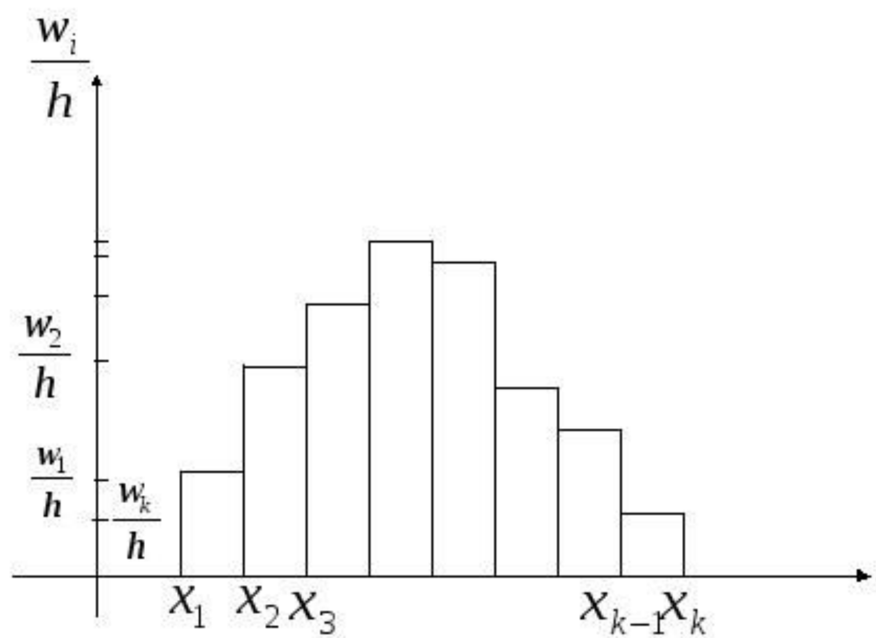
площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, т. е. объему выборки.



Площадь гистограммы относительных частот

Площадь i-го частичного прямоугольника равна $hW_i/h = W_i$ – относительной частоте вариант, попавших в i-й интервал.

Площадь гистограммы относительных частот равна сумме всех относительных частот, т. е. единице.



Когда ширина всех интервалов группировки <u>одинакова,</u> вид гистограммы не изменится, если по оси ординат откладывать не величины n_i/h, а *частоты* интервалов n_i (*относительные частоты* интервалов W_i)