З Д Р А В С Т В У Й Т Е!

24.5. Гармонический осциллятор

(Маятники: *пружинный, физический и математический*)

Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения и служат точной или приближенной моделью во многих задачах классической и квантовой физики. Примерами гармонического осциллятора являются пружинный, физический и математический маятники.

В физике под маятником понимают твердое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки или оси.

Математическим маятником - называется идеализированная система, состоящая из невесомой, нерастяжимой нити, на которую подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (небольшой тяжелый шарик на длинной тонкой нити).

Рассмотрим условия, при которых колебания маятника являются гармоническими.

Отклонения маятника от положения равновесия будем характеризовать углом α, образованным нитью с вертикалью.

При отклонении маятника от вертикали, возникает вращательный момент, модуль которого $|\mathbf{M}| = mgl\sin\theta$. Вектор **M** направлен от нас. Он имеет такое направле-ние, что стремится вернуть маятник в положение равновесия и в этом отношении он аналогичен

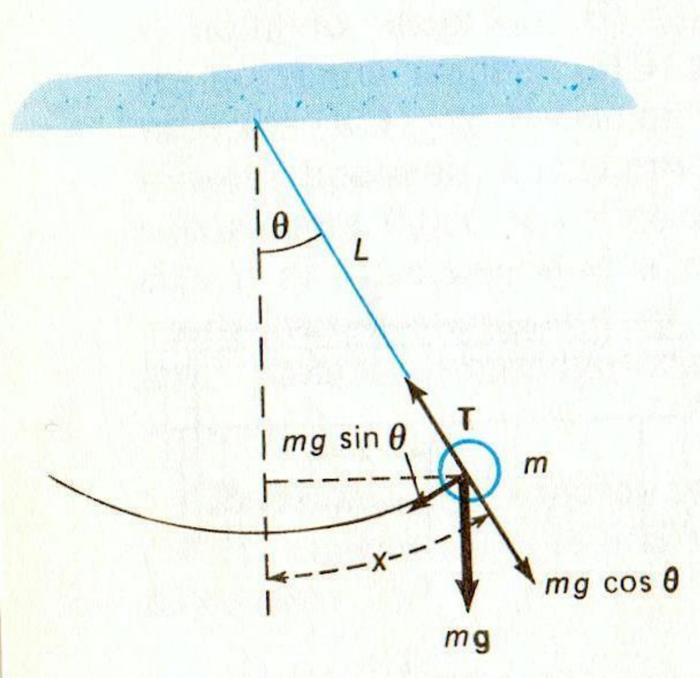

Рис. 7.

квазиупругой силе. Поэтому M и углово
смещению θ нужно приписыва
противоположные знаки.

$$M = -mg\,l\,\sin\theta \qquad (24.5.1)$$

Напишем для маятника уравнение динамики вращательного движения $M = J\varepsilon$, где момент инерции маятника $J = ml^2$, а $\varepsilon = d^2\theta/dt^2$ тогда преобразуем получаем

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta$$

$$d^2\theta/dt^2 + g/(l\sin\theta) = 0 \qquad (24.5.2)$$

Рассмотрим колебания с малой амплитудой т.е. $\sin\theta \cong \theta$ и введем обозначение $g/l = \omega_0^2$ Тогда (24.5.2) преобразуем и получаем

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0 \qquad (24.5.3)$$

А это есть *уравнение динамики гармонических незатухающих колебаний*. Решение уравнения (24.5.3) имеет вид

$$\alpha = \alpha_m \cos(\omega_0 t + \phi_0)$$

(24.5.4)

Следовательно, при малых колебаниях угловое отклонение математического маятника изменяется со временем по гармоническому закону, откуда

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi / \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

(24.5.5)

Т.е. период *T* - зависит только от длины маятника и ускорения свободного падения.

Если колеблющееся тело нельзя представить как материальную точку, то такой маятник называется физическим. При отклонении положения равновесия на угол φ также возникает вращающий момент, стремящийся вернуть маятник в положение равновесия:

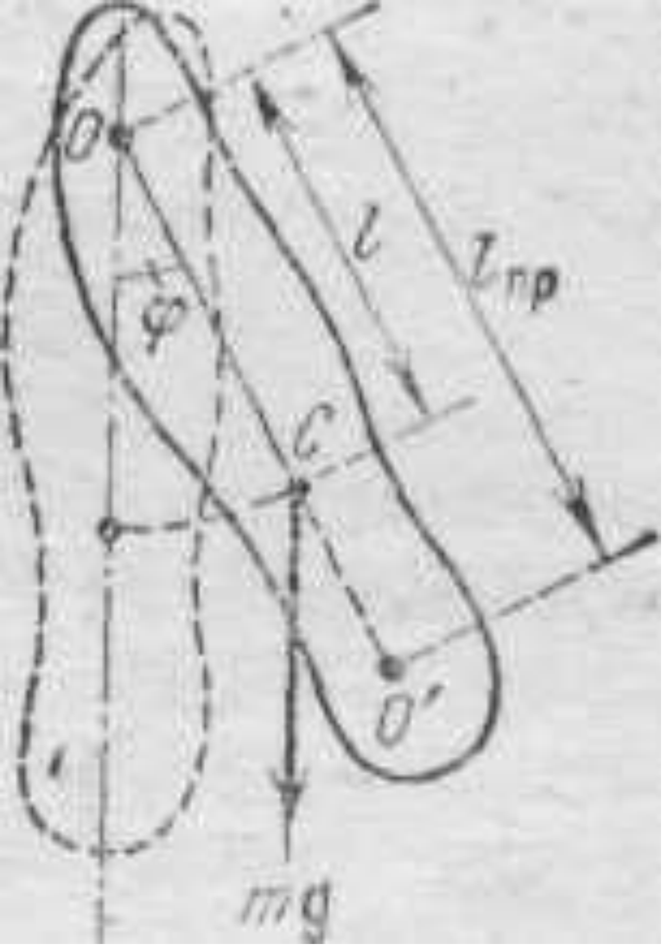

Рис. 8.

Обозначим через **J** -момент инерции маятника относительно точки подвеса 0, тогда

$$J = d^2\varphi / dt^2 = - mgl\sin\varphi \qquad (24.5.6)$$

В случае малых колебаний (**sinα = α**) уравнение (24.5.6) переходит в известное нам уравнение.

$$d^2\varphi / dt^2 + \omega_0^2 \varphi = 0 \qquad (24.5.7)$$

Его решение нам уже известно

$\varphi = \varphi_m \cos(\omega_0 t + \phi)$ **, где** $\omega_0^2 = mgl / J$

Из (24.5.7) следует, что физический маятник

при любых отклонениях также совершает гармонические колебания, частота которых, кроме того, зависит от массы и момента инерции маятника. Аналогично (24.5.5) получим

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \qquad (24.5.8)$$

Величину момента инерции ***J*** бывает трудно вычислить.

Сопоставляя (24.5.5) и (24.5.8) получим, что математический маятник с длиной $l_{пр}=J/ml$ (24.5.9)

будет иметь такой же период колебаний, как и физический.

$l_{пр}$ - приведенная длина физического маятника - это длина такого математического маятника, период колебания которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника. Точка на прямой, соединяющая точку подвеса с центром инерции и, лежащая на расстоянии $l_{пр}$ от точки подвеса, называется центром качения физического маятника (точка ***O'***). Точки ***O*** и ***O'*** всегда будут лежать по обе стороны от точки ***C***. Точки подвеса и центр качания обладают свойством взаимности, т.е. период колебания ***T*** не изменяется если маятник подвесить за точку ***O'***. На этом свойстве основано определение ускорения силы тяжести ***g*** с помощью так называемого оборотного маятника. Это такой маятник, у которого имеются две призмы (точки подвеса) и два груза, которые могут перемещаться вдоль оси маятника. Перемещением грузов добиваются того, что расстояние между призмами будет соответствовать $l_{пр}$. Тогда $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_{пр}}{g}}$, а $l_{пр}$ - точно известно (измерено).

24. Пружинный маятник - это груз массой m, подвешенный на абсолютно-упругой пружине и совершающий гармонические колебания под действием упругой силы $F = -kx$, где k - жесткость пружины. Уравнение движения маятника

$$m\ddot{x} = -kx \text{ ,или } \ddot{x} + (k/m)x = 0. \qquad (24.5.10)$$

Из выражений (24.5.3а) или (24.5.3б) и (24.5.4) следует, что пружинный маятник совершает гармонические колебания по закону

$x = A\cos(\omega t+\varphi)$ с циклической частотой и периодом:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Эти формулы справедливы для упругих колебаний в пределах, в которых выполняется закон Гука, т.е. когда масса пружины мала по сравнению с массой тела. Потенциальная энергия пружинного маятника равна $U=kx^2/2$.

Рассматривая физический и математический маятники, мы все время подчеркивали, что они совершают гармонические колебания при малых отклонениях, т.е. когда длина дуги $x = l\theta$ очень мало отличается от длины хорды $l\sin\theta$, мы можем так поступать для углов меньше 15°, для которых значения θ и $\sin\theta$ различаются меньше чем на 24%.

24.6. Свободные гармонические колебания в колебательном контуре

Среди различных электрических явлений особое место занимают электромагнитные колебания, при которых электрические величины (заряды, токи, напряжения) периодически изменяются и которые сопровождаются взаимными превращениями электрического и магнитного полей. Для возбуждения и поддержания электромагнитных колебаний используется КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР – ЦЕПЬ, СОСТОЯЩАЯ ИЗ ВКЛЮЧЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНО КАТУШКИ ИНДУКТИВНОСТЬЮ L, КОНДЕНСАТОРА ЕМКОСТЬЮ C И РЕЗИСТОРА СОПРТИВЛЕНИЕМ R

Рассмотрим последовательные стадии колебательного процесса в идеализированном контуре, сопротивление которого пренебрежимо мало ($R \approx 0$). Для возбуждения в контуре колебаний конденсатор предварительно заряжают, сообщая его обкладкам заряд $\pm Q$. Тогда в начальный момент времени $t = 0$ (рис.9) между обкладками конденсатора возникает электрическое поле, энергия которого $Q^2/2C$. Если замкнуть конденсатор на катушку индуктивности, он начнет разряжаться, и в контуре потечёт возрастающий со временем ток I/. В результате энергия электрического поля будет уменьшаться, а энергия магнитного поля катушки (она равна $LQ^2/2$) – возрастать. Т.к. $R \approx 0$, то согласно закону сохранения энергии, полная энергия $W = Q^2/2C + LQ^2/2 = \text{const}$, что обусловлено отсут-ствием потерь на нагревание. Поэтому в момент времени $t = T/4$, когда конденсатор полностью разрядится, энергия электрического поля обращается в нуль, а энергия магнитного поля (а, следовате-льно, и ток) достигает наибольшего значения. Начиная с этого мо-мента ток в контуре будет убывать и как следствие, начнет осла-бевать магнитное поле катушки, и в ней индуцируется ток, который течет (согласно правилу Ленца) в том же направлении, что и ток разрядки конденсатора. Конденсатор начнет перезаряжаться, Возникнет электрическое поле, стремящееся ослабить ток, который в кон-це концов обратиться в нуль, а заряд на обкладках конденсатора достигнет максимума. Далее те же процессы начнут протекать в обратном направлении и система к моменту времени

$t = T$ придет в первоначальное состояние. После этого начнется повторение рассмотренного цикла разрядки и зарядки конденсатора.

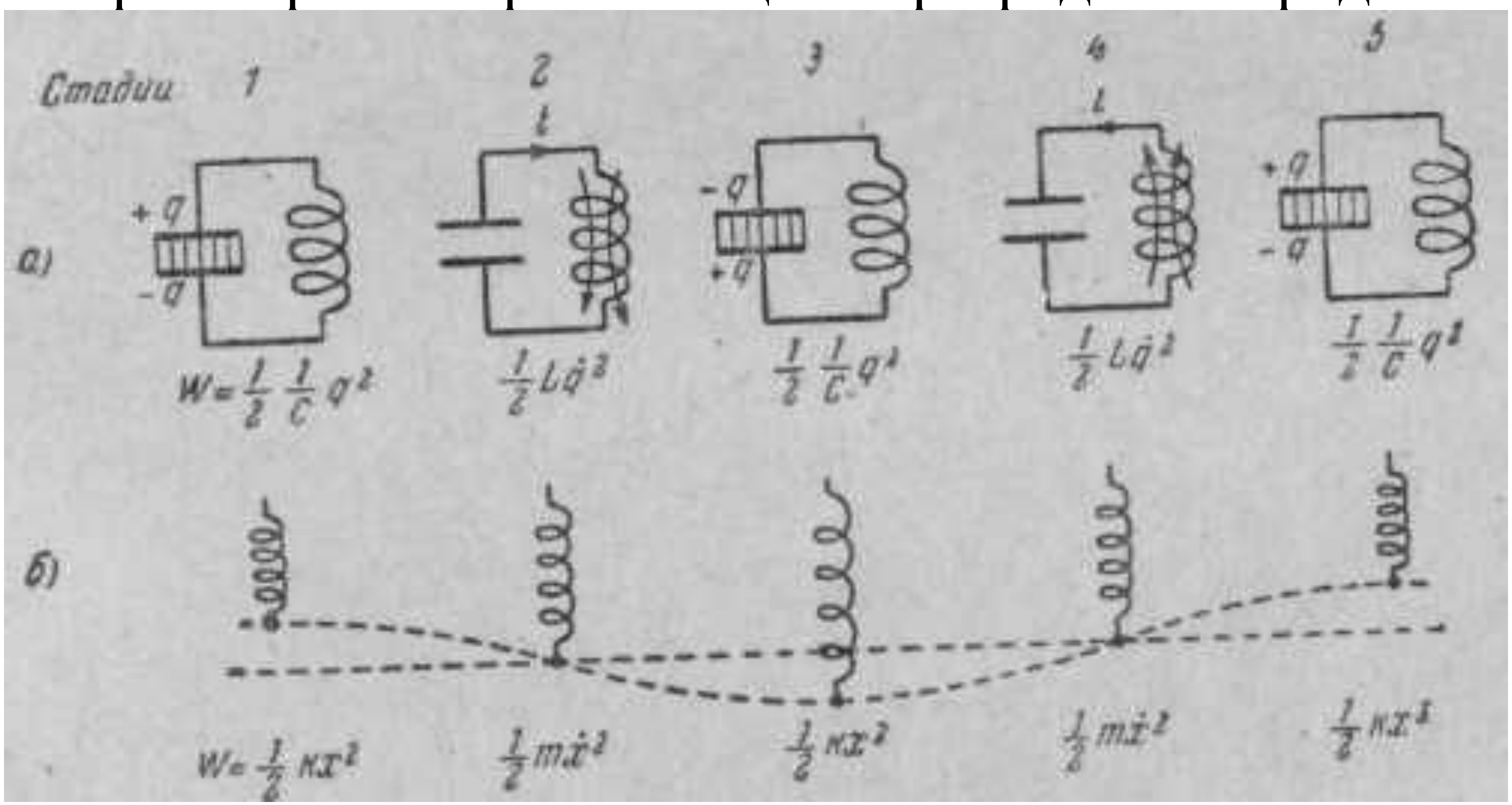

Рис. 9.

Если бы потерь энергии не было, то в контуре совершались бы периодические незатухающие колебания, т.е. периодически изменялись (колебались) бы заряд Q на обкладках конденсатора, напряжение U на конденсаторе и сила тока I, текущего через катушку индуктивности. Следовательно, в контуре возникают электрические колебания, причём колебания сопровождаются превращением энер-гий электрического и магнитного полей.

Электрические колебания в колебательном контуре можно сопоставить с механическими колебаниями маятника,сопровождающимися взаимными превращениями потенциальной и кинетической энергий маятника. В данном случае энергия электрического поля конденсатора ($Q^2/2C$) аналогична потенциальной энергии упругой деформации ($kx^2/2$), энергия магнитного поля ($LI^2/2$) катушки – кинетической энергии ($mv^2/2$) маятника, сила тока в контуре – скорости движения маятника. Индуктивность L играет роль массы, а сопротивление R в контуре играет роль, аналогичную силе трения , действующей на механический маятник.

Согласно закону Ома, для *RLC* контура

$$IR + U_c = E_s,$$

где IR – напряжение на резисторе, $U_c = Q/C$ – напряжение на конденсаторе, $E_s = -L\mathrm{d}I/\mathrm{d}t$ - ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке при протекании в ней тока (E_s – единственная ЭДС контура). Следовательно,

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + IR + \frac{Q}{C} = 0 \quad (24.6.24)$$

Поделив (24.6.24) на L и подставив

$$I = \dot{Q} \quad \text{и} \quad \mathrm{d}I/\mathrm{d}t = \ddot{Q},$$

получим

Дифференциальное уравнение колебаний заряда Q в контуре

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0 \qquad (24.6.2)$$

В данном колебательном контуре внешние ЭДС отсутствуют, поэтому рассматриваемые колебания представляют собой свободные колебания. Если пренебречь сопротивлением $R \approx 0$, то свободные электромагнитные колебания в контуре являются гармоническими. Тогда из (24.6.2) получим дифференциальное уравнение свободных гармонических колебаний заряда в контуре

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = 0 \qquad (24.6.2a)$$

Из выражений (24.3.3) и (24.3.4) следует, что заряд Q совершает гармонические колебания по закону

$$Q = Q_m \cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (24.6.3)$$

где Q_m – амплитуда колебаний заряда конденсатора с циклической частотой ω_0, называемой собственной частотой контура, т.е.

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \qquad (24.6.4)$$

И периодом

$$T = 2\pi\sqrt{LC} \qquad (24.6.5)$$

Формула (24.6.5) называется формулой Томсона.

Сила тока в колебательном контуре

$$I = \dot{Q} = -\omega_0 Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = I_m \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi/2), \qquad (24.6.6)$$

где $I_m = \omega_0 Q_m$ – амплитуда силы тока.

Напряжение на конденсаторе

$$U_c = Q/C = \frac{Q_m}{C}\cos(\omega_0 t + \varphi) = U_m \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (24.6.7)$$

где $U_m = Q_m/C$ – амплитуда напряжения.

Из выражений (24.6.3), (24.6.6) и (24.6.7) вытекает, что колебание тока I опережает по фазе колебания заряда Q и напряжения U на $\pi/2$, т.е. когда ток достигает максимального значения, заряд и напряжение обращаются в нуль, и наоборот.

Сегодня: *

Лекция окончена.

До свидания!

УРА! УРА! УРА!