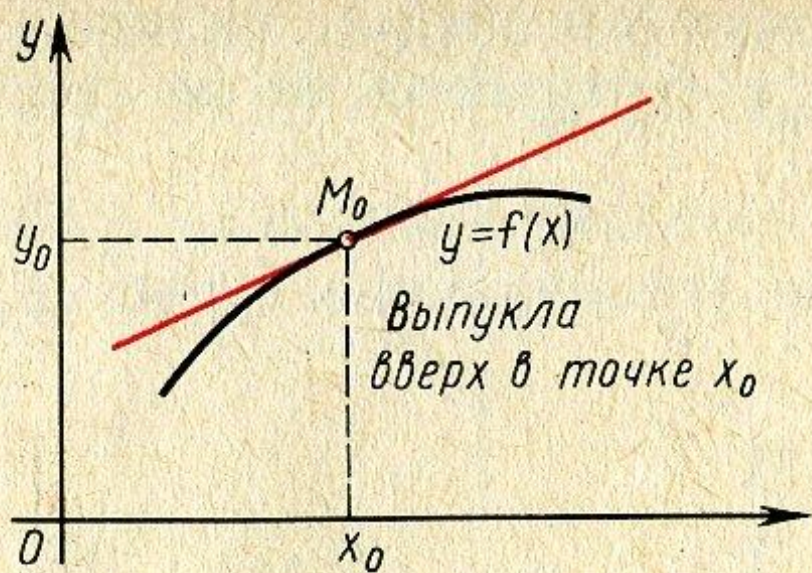
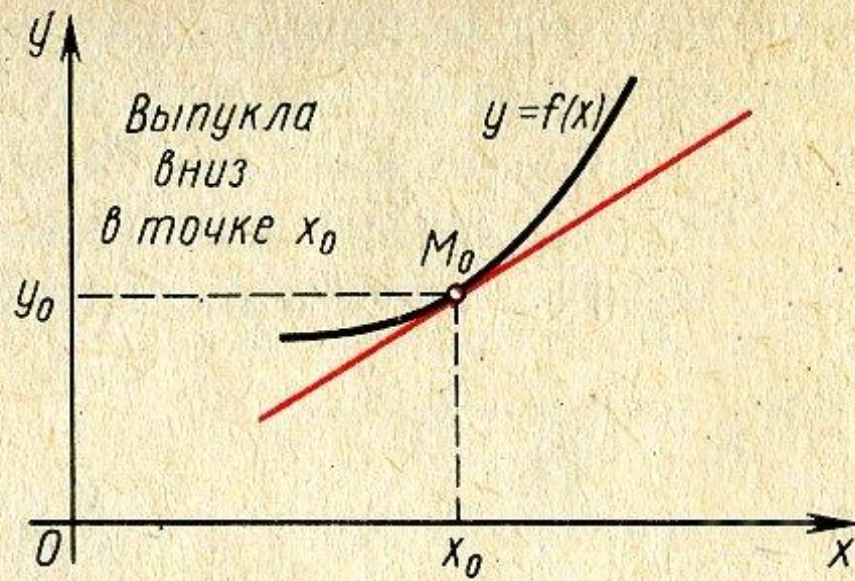


# Вторая производная и ее применение

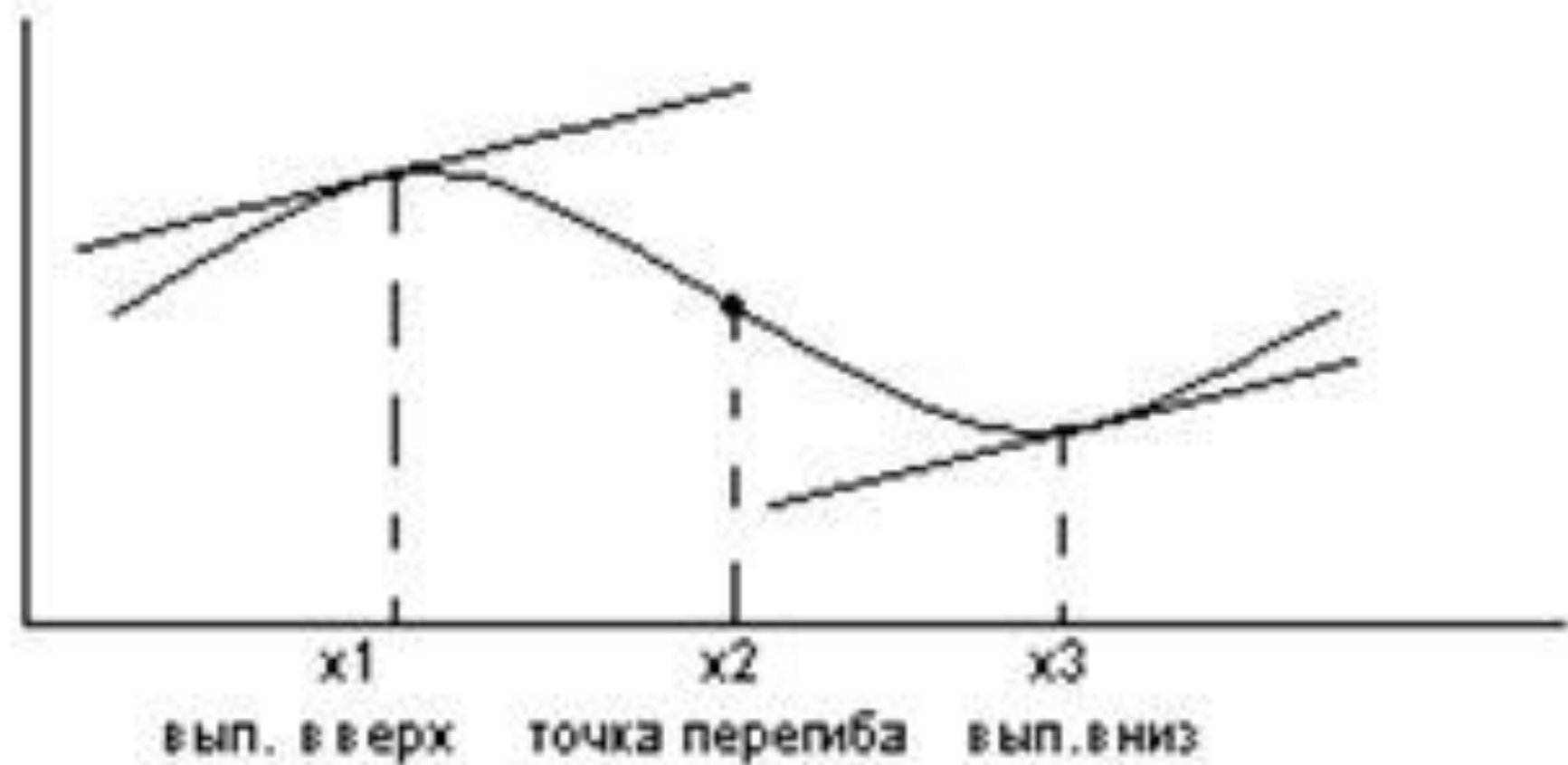
1. Выпуклость и вогнутость  
графика функции. Точки  
перегиба.



a)



б)



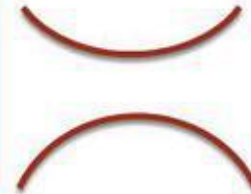
# Теорема

## 2) Выпуклость и вогнутость функции

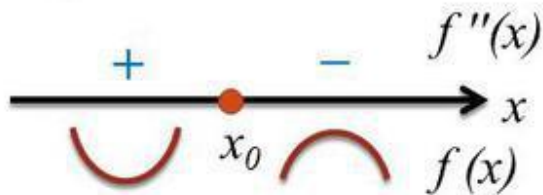
Найдем  $f''(x)$ . Если на некотором интервале

$f''(x) > 0$ , то  $f(x)$  вогнутая.

$f''(x) < 0$ , то  $f(x)$  выпуклая.



Точки, в которых  $f''(x)$  изменяет знак, называются **точками перегиба**.



$x_0$  – точка перегиба



# Пример 1

Исследовать функцию на направление выпуклости и перегиб

$$y = x^3 - 6x^2 + x$$

Решение

1.  $D(y) = R$

2.  $y' = 3x^2 - 12x + 1$

$$y'' = 6x - 12$$

3.  $6x - 12 = 0$

$$x = 2$$



Ответ: функция выпукла на промежутке  $(-\infty; 2)$   
функция вогнута на промежутке  $(2; +\infty)$   
 $x = 2$  – точка перегиба

# Исследование на экстремум с помощью второй производной

## Второе достаточное условие экстремума.

- **Теорема.** *Если первая производная  $f'(x)$  дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке  $x_0$ , а вторая производная в этой точке  $f''(x_0)$  положительна, то  $x_0$  есть точка минимума функции  $f(x)$ ;  
если  $f''(x_0)$  отрицательна, то  $x_0$  - точка максимума.*

# Пример 2

Исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$$

Решение 1.  $D(y) = R$

$$2. y' = x^2 - 2x - 3$$

$$y'' = 2x - 2$$

3.  $D(y') = R$

$$4. x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

5.  $y''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow$  точка максимума

$y''(3) = 4 > 0 \Rightarrow$  точка минимума



# Механический смысл второй производной

Ускорение

$$a(t) = x''(t)$$

# Приближенные вычисления

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Пример

$$\sqrt{65}$$

1.  $y = \sqrt{x}$ ,  $x = 65$

2.  $x_0 = 64$

3.  $f(x_0) = \sqrt{64} = 8$

4.  $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{16}$$

5.  $\sqrt{65} \approx 8 + \frac{1}{16}(65 - 64) = 8 + \frac{1}{16} = 8,0625$

# Домашнее задание

1. Данные функции исследовать на выпуклость и перегиб:

a)  $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

б)  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 24x + 8$

2. Исследовать функции на экстремум с помощью второй производной:

a)  $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$

б)  $f(x) = x - 2 \ln x$

3. Вычислить, используя формулы для приближенных вычислений:

a)  $\sqrt{3,98}$

б)  $1,99^4$

# ОТВЕТЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1.    a)  $y \cap$  при  $x \in (-\infty; 3)$                       a)  $y \cap$  при  $x \in (-1; 2)$   
           $y \cup$  при  $x \in (3; \infty)$                                $y \cup$  при  $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$   
           $x = 3$  – точка перегиба                       $x = -1$  и  $x = 2$  – точки перегиба

2.    a)  $x_{\min} = 2$     б)  $x_{\min} = 2$   
           $x_{\max} = 1$

3.    a)  $\sqrt{3,98} \approx 2 + 0,25 \cdot (3,98 - 4) = 1,995$   
      б)  $1,99^4 \approx 16 + 32 \cdot (1,99 - 2) = 15,68$