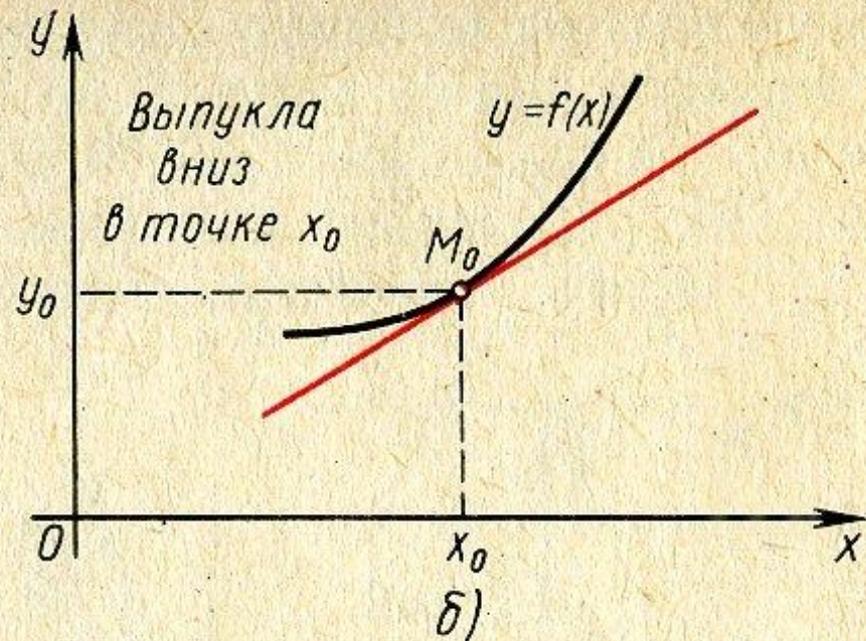
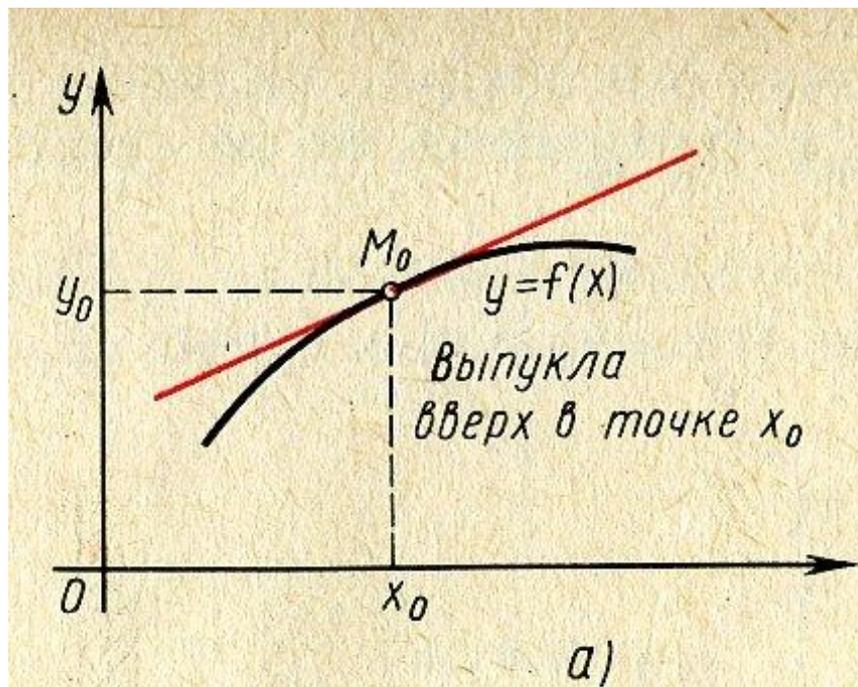
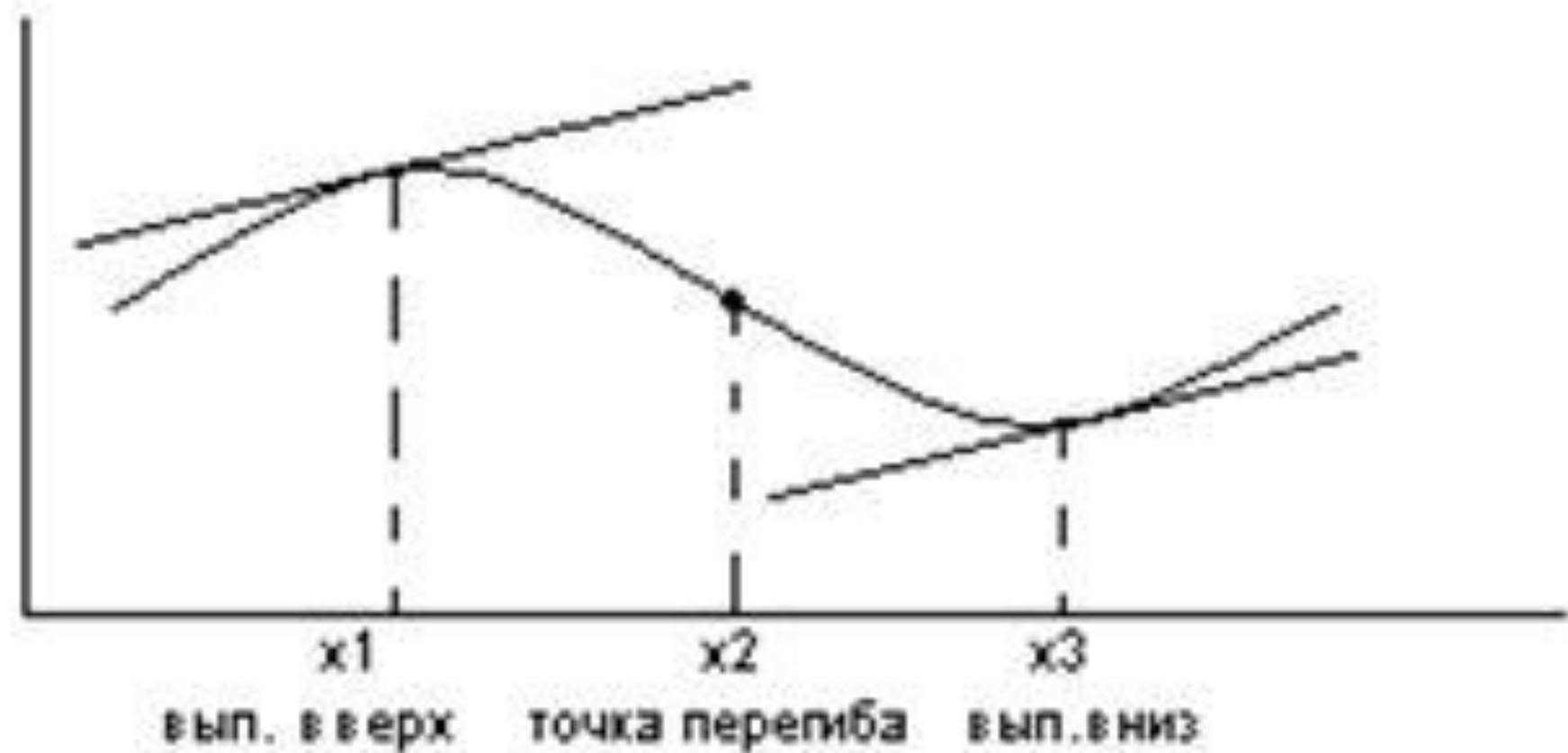


Вторая производная и ее применение

1. Выпуклость и вогнутость
графика функции. Точки
перегиба.





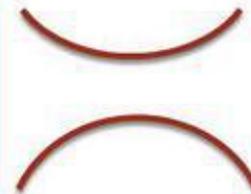
Теорема

2) Выпуклость и вогнутость функции

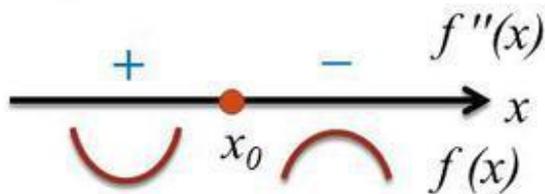
Найдем $f''(x)$. Если на некотором интервале

$f''(x) > 0$, то $f(x)$ вогнутая.

$f''(x) < 0$, то $f(x)$ выпуклая.



Точки, в которых $f''(x)$ изменяет знак, называются **точками перегиба**.



x_0 – точка перегиба



Пример 1

Исследовать функцию на направление выпуклости и перегиб

$$y = x^3 - 6x^2 + x$$

Решение

$$1. D(y) = R$$

$$2. y' = 3x^2 - 12x + 1$$

$$y'' = 6x - 12$$

$$3. 6x - 12 = 0$$

$$x = 2$$



Ответ: функция выпукла на промежутке $(-\infty; 2)$
функция вогнута на промежутке $(2; +\infty)$
 $x = 2$ – точка перегиба

Исследование на экстремум с помощью второй производной

Второе достаточное условие экстремума.

- **Теорема.** *Если первая производная $f'(x)$ дважды дифференцируемой функции равна нулю в некоторой точке x_0 , а вторая производная в этой точке $f''(x_0)$ положительна, то x_0 есть точка минимума функции $f(x)$;
если $f''(x_0)$ отрицательна, то x_0 - точка максимума.*

Пример 2

Исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 2$$

Решение 1. $D(y) = R$

$$2. y' = x^2 - 2x - 3$$

$$y'' = 2x - 2$$

3. $D(y') = R$

$$4. x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_1 = -1 \quad x_2 = 3$$

5. $y''(-1) = -4 < 0 \Rightarrow$ точка максимума

$y''(3) = 4 > 0 \Rightarrow$ точка минимума

Механический смысл второй производной

Ускорение

$$a(t) = x''(t)$$

Приближенные вычисления

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Пример

$$\sqrt{65}$$

1. $y = \sqrt{x}$, $x = 65$

2. $x_0 = 64$

3. $f(x_0) = \sqrt{64} = 8$

4. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{64}} = \frac{1}{16}$$

5. $\sqrt{65} \approx 8 + \frac{1}{16}(65 - 64) = 8 + \frac{1}{16} = 8,0625$

Домашнее задание

1. Данные функции исследовать на выпуклость и перегиб:

a) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$

б) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 12x^2 + 24x + 8$

2. Исследовать функции на экстремум с помощью второй производной:

a) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 8$

б) $f(x) = x - 2 \ln x$

3. Вычислить, используя формулы для приближенных вычислений:

a) $\sqrt{3,98}$

б) $1,99^4$

ОТВЕТЫ К ДОМАШНЕМУ ЗАДАНИЮ

1. a) $y \cap$ при $x \in (-\infty; 3)$ a) $y \cap$ при $x \in (-1; 2)$
 $y \cup$ при $x \in (3; \infty)$ $y \cup$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (2; \infty)$
 $x = 3$ – точка перегиба $x = -1$ и $x = 2$ – точки перегиба

2. a) $x_{\min} = 2$ б) $x_{\min} = 2$
 $x_{\max} = 1$

3. a) $\sqrt{3,98} \approx 2 + 0,25 \cdot (3,98 - 4) = 1,995$
 б) $1,99^4 \approx 16 + 32 \cdot (1,99 - 2) = 15,68$