Краснодарский университет МВД России

Кафедра информатики и математики

Тема 1

Элементы теории погрешностей

по дисциплине

«Численные методы

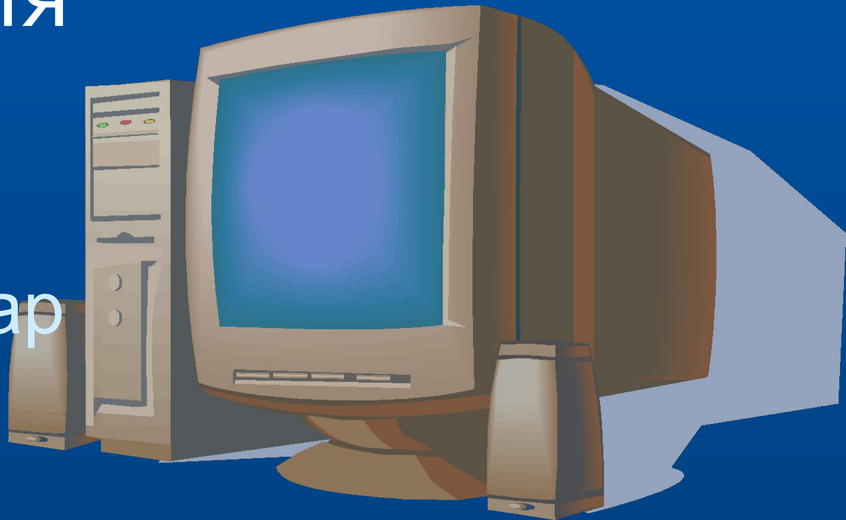
Лекция

$$\sqrt{M(X^2)-(M(X))^2}$$

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = \sum a_{ij} \cdot b_{jk}$$



Краснодар

2013

- **Цель лекции:** *изучить источники и классификацию погрешностей, рассмотреть понятия абсолютных и относительных погрешностей, значащих цифр, провести обзор прямой и обратной задач теории погрешностей, ознакомиться с правилами вычисления погрешностей.*

- **Материально-техническое обеспечение:** *компьютер, видеопроектор, экран.*

- **Учебно-методическое обеспечение:** *учебно-методический материал в электронном виде.*

Основные вопросы

1. Источники и классификация погрешности
2. Абсолютная и относительная погрешности
3. Значащие цифры
4. Прямая задача теории погрешностей
   4.1. Абсолютная погрешность функции
   4.1. Относительная погрешность функции
   4.3. Относительная погрешность суммы
5. Правила вычисления погрешностей
6. Обратная задача теории погрешности

1. Источники и классификация погрешности

Определение.

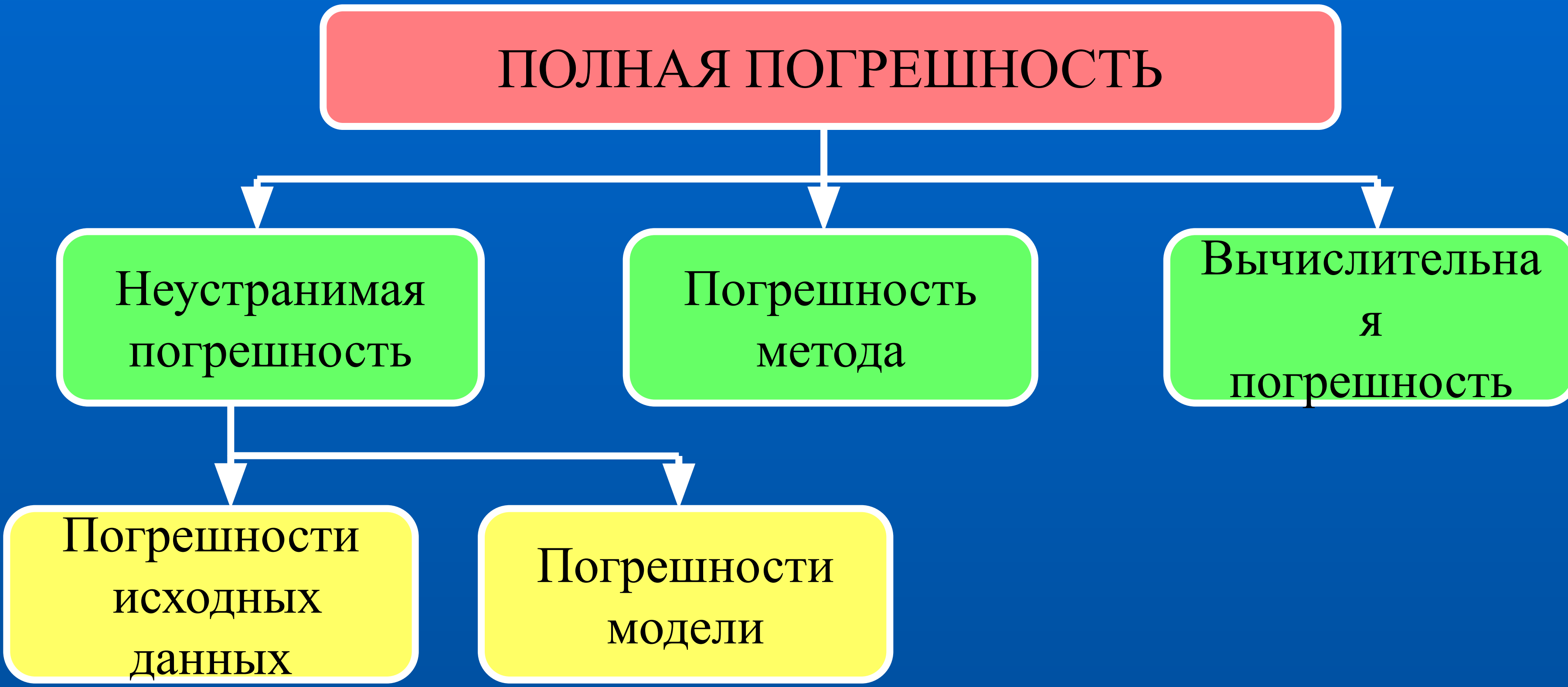
Отклонение истинного решения от приближенного называется **погрешностью**.

Численные решения задач часто имеют погрешность, связанную со следующими **причинами**:

1. **Неточное математическое описание задачи**, в частности неточно заданы исходные данные описания;

2. **Неточный метод решения задачи**: получение точного решения возникающей математической задачи требует неограниченного или неприемлемо большого числа арифметических операций; поэтому вместо точного решения задачи приходится прибегать к приближенному;

3. **Ошибки округления**, возникающие из-за ограниченной разрядной сетки при вводе данных, выполнении арифметических операций и выводе данных на компьютере.



Часто **неустранимую погрешность** подразделяют на две части:

1.1. Погрешности, являющиеся следствиями **неточности задания числовых данных**, входящих в математическое описание задачи;

1.2. Погрешности, являющуюся следствиями **несоответствия математического описания задачи** реальности, т.е. погрешностями математической модели.

При решении большинства задач нет особого смысла применять метод решения задачи с погрешностью, существенно меньшей, чем величина неустранимой погрешности.

Требования точности решения часто **снимаются** в процессе обсуждения задачи на основе следующих соображений:

1) При детальном подходе к изучению задачи в целом оказывается, что столь высокая точность и не нужна;

2) Математическая модель явления настолько груба, что требовать столь высокую точность бессмысленно;

3) Параметры модели не могут быть определены с высокой точностью;

4) Требуется качественный результат, например будет ли работать данное устройство в заданном режиме.

2. Абсолютная и относительная погрешности

Определение.

Если x - точное значение некоторого числа, x^* - приближенное, то **абсолютной погрешностью** приближения x^* назовем величину:

$$\Delta x^* \geq |x - x^*| ,$$

т.е. точное значение числа х заключено в границах

$$x^* - \Delta x^* \leq x \leq x^* + \Delta x^*.$$

Пример:

Найти абсолютную погрешность, если $x = 3.141592$, а $x^*=3.14$.

Решение: $\Delta x^* \geq | 3.141592 – 3.14 |$, тогда $\Delta x^* \geq 0.001592$.

Пример:

Найти абсолютную погрешность, если $x = 27.786543$, а $x^*=27.8013$.

Решение: $\Delta x^* \geq | 27.786543 – 27.8013 |$, тогда $\Delta x^* \geq 0.014757$.

Определение.

Отношение абсолютной погрешности Δx^* к абсолютному значению приближенной величины $|x|$ есть относительная погрешность (доля истинного значения):

$$\delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x^*|}$$

Пример.

Найти абсолютную и относительную погрешности, если $x=3.141592$, а $x^*=3.14$.

Решение: т.к. $\Delta x^* \geq 0.001592$, тогда

$$\delta x^* = \frac{\Delta x^*}{|x^*|} = \frac{0.001592}{3.14} = 0.000507$$

3. Значащие цифры

Определение.

Значащими цифрами числа называются все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Пример.

У чисел подчеркнуты значащие цифры: $0.0\underline{10087}$ и $0.0\underline{100870000}$.

Любое число можно представить в виде

$$x = a_1 \beta^n + a_2 \beta^{n-1} + a_3 \beta_{n-3} + \ldots + a_m \beta^{n-m},$$

где β - основание системы счисления, n – некоторое целое число (старший десятичный разряд числа x), a_i– значащие цифры приближенного числа x.

Пример.

Представим числа 0.010087 и 0.0100870000.

$$0.010087 = 1\cdot10^{-2} + 0\cdot10^{-3} + 0\cdot10^{-4} + 8\cdot10^{-5} + 7\cdot10^{-6};$$

$$0.0100870000 = 1\cdot10^{-2} + 0\cdot10^{-3} + 0\cdot10^{-4} + 8\cdot10^{-5} + 7\cdot10^{-6}.$$

Определение.

Значащая цифра a_k считается верной, если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

В противном случае a_k - сомнительная цифра.

Пример.

Пусть $a^* = 0.073627301$, $\Delta a^* = 0.00004$, тогда верными будут подчеркнутые цифры числа $0.0\underline{7362}7301$, а неподчеркнутые цифры – сомнительными.

Определение.

Если все значащие цифры верные, то говорят, что число записано всеми верными цифрами.

Пример.

Пусть $a^* = 0.0736$, $\Delta a^* = 0.00004$, тогда верными будут все значащие цифры числа $0.0\underline{736}$.

4. Прямая задача теории погрешностей

Основная задача теории погрешностей заключается в следующем:

по известным погрешностям некоторой системы параметров требуется ***определить погрешность функции*** от этих параметров.

4.1. Абсолютная погрешность функции

Пусть задана дифференцируемая функция $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и пусть Δx_i^* – абсолютные погрешности аргументов.

Тогда **абсолютная погрешность функции**:

$$\Delta y^* = \left| y - y^* \right| \le \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)}{\partial x_i} \right| \Delta x_i^*$$

(формула Лагранжа).

При зависимости функции от одного параметра получим формулу:

$$\Delta y^* \le \left| f'(x^*) \right| \Delta x.$$

Пример: Найти абсолютную погрешность объема шара

$$V = 1/6\pi d^3 ,$$

если $d = 3.7$ см ± 0,05 см; $\pi \approx 3.14$.

Решение: Рассмотрим d и π как переменные величины. Вычислим частные производные

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}\pi d^2 \qquad \frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6}d^3$$

При заданных значениях $d = 3,7$ и $\pi \approx 3,14$ получаем, что

$$\frac{\partial V}{\partial d} = \frac{1}{2}3.14 \cdot 3.7^2 = 21.49 \qquad \frac{\partial V}{\partial \pi} = \frac{1}{6}3.7^3 = 8.44$$

Тогда, используя формулу Лагранжа,

$$\boxed{\Delta y^* = \left|y - y^*\right| \le \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial f(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)}{\partial x_i}\right| \Delta x_i^*}$$

рассчитаем абсолютную погрешность функции V:

$$\Delta V^* \le \left|\frac{\partial V}{\partial d}\right| \cdot \left|\Delta d\right| + \left|\frac{\partial V}{\partial \pi}\right| \cdot \left|\Delta \pi\right| = 21.49 \cdot 0.05 + 8.44 \cdot 0.0016 = 1.101508 \approx 1.1 см^3 .$$

Определение.

Предельной абсолютной погрешностью называют следующую оценку погрешности величины y^*

$$\Delta y^* = \sup_{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in G} \left| y(x_1, x_2, \ldots, x_n) - y^* \right|$$

Пример: Найти предельную абсолютную погрешность объема шара $V = 1/6\pi d^3$,

если $d = 3.7$ см ± 0,05 см; $\pi \approx 3.14$.

Так как абсолютная погрешность объема шара не превышает 1.1см^3,

объем шара можно представить в виде $V \approx 26.51 \pm 1.1$ см^3.

Поэтому предельная абсолютная погрешность будет равна

$$\Delta V^* = 1.1 cм^3.$$

4.1. Относительная погрешность функции

Пусть задана дифференцируемая функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и пусть δx_i^* – относительные погрешности аргументов. Тогда **относительной погрешностью** называют:

$$\delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial}{\partial x_i} \ln(y) \right| \Delta x_i$$

Определение.

Предельной относительной погрешностью называют величину

$$\delta y = \frac{\Delta y^*}{|y^*|}$$

Пример: Найти предельную относительную погрешность объема шара.

Предельная относительная погрешность δV будет равна:

$$\delta V = \frac{\Delta V^*}{|V^*|} = \frac{1.1}{26.51} \approx 0.04 \approx 4\%.$$

4.3. Относительная погрешность суммы

Относительная погрешность суммы аргументов определяется по формуле

$$\boxed{\delta y^* = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^*}{y^*} \delta x_i^*}$$

Пример: Найдем **относительную погрешность суммы** аргументов в задаче по вычислению объема шара

если $d = 3.7$ см $\pm 0{,}05$ см, то $d^*=3.7$, а $\delta d = 0.05/3.7 \approx 0.013514$

если $\pi = 3.14 \pm 0{,}0016$, то ; $\pi^*=3.14$, а $\delta\pi = 0.0016/3.14 \approx 0.00051$.

Тогда

$$\delta V^* = \frac{d^*}{V^*}\delta d + \frac{\pi d^*}{V^*}\delta\pi = \frac{3.7}{26.51}0.013514 + \frac{3.14}{26.51}0.0005 \approx 0.001947$$

Пусть $M = \max(\delta x_i^*)$, а $m = \min(\delta x_i^*)$, тогда

$$\boxed{m < \delta y^* \le \frac{\left(x_1^* + x_2^* + \ldots + x_n^*\right)\cdot M}{y^*}}$$

5. Правила вычисления погрешностей

1. Предельная абсолютная погрешность суммы или разности равна сумме предельных погрешностей.

2. Относительная погрешность суммы положительных слагаемых не превышает наибольшей из относительных погрешностей этих слагаемых.

3. Предельная относительная погрешность произведения или частного равна сумме предельных относительных погрешностей.

4. Предельная относительная погрешность степени и корня приближенного числа равна произведению предельной относительной погрешности этого числа на показатель степени

6. Обратная задача теории погрешности

Обратная задача теории погрешности заключается в следующем: при каких значениях аргумента известная функция $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ будет иметь погрешность не превосходящую заданной величины.

Простейшее решение обратной задачи дается **принципом равных влияний**.

Согласно этому принципу предполагается, что все частные дифференциалы одинаково влияют на образование общей абсолютной погрешности.

Предельная погрешность функции $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для малых абсолютных погрешностей аргументов Δx_i:

$$\boxed{\Delta y = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} \right| \Delta x_i}$$

БЛАГОДАРЮ

ЗА

ВНИМАНИЕ!