Лекция №1

Алгебра:

Матрицы. Действия с матрицами.

Определитель. Его вычисление и основные свойства. Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Методы решения СЛАУ.

Матрицы.

Определение: Матрица размерности mxn – это таблица чисел расположенных в m строках и n столбцах вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Матрицы бывают квадратные: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Прямоугольные: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

Матрицы.

Главная диагональ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Побочная диагональ

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Нулевая матрица

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Единичная матрица

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица столбец

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Матрица строка

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами.

Сложение матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

Вычитание матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}-b_{11} & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22} & a_{23}-b_{23} \end{pmatrix}$$

Умножение матрицы на число:

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \alpha \cdot a_{13} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \alpha \cdot a_{23} \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами

Умножение матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \boxed{a_{31} \quad a_{32}} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \boxed{b_{13}} \\ b_{21} & b_{22} & \boxed{b_{23}} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} & a_{11}\cdot b_{13} + a_{12}\cdot b_{23} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} & a_{21}\cdot b_{13} + a_{22}\cdot b_{23} \\ a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} & a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} & a_{31}\cdot b_{13} + a_{32}\cdot b_{23} \end{pmatrix}$$

Пример умножения матриц.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 0\cdot 0 & 1\cdot 2 + 0\cdot(-1) & 1\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 2\cdot 1 + 1\cdot 0 & 2\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 2\cdot 0 + 1\cdot 1 \\ -1\cdot 1 + 1\cdot 0 & -1\cdot 2 + 1\cdot(-1) & -1\cdot 0 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Действия над матрицами.

Операции сложения и умножения матриц обладают следующими свойствами:

Сложения:

1. $A+B=B+A$ (переместительный закон)
2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ (сочетательный закон)
3. $A+0=A$
4. $(\alpha\cdot\beta)\cdot A=\alpha\cdot(\beta\cdot A)$
5. $(\alpha+\beta)\cdot A=\alpha\cdot A+\beta\cdot A$ (распределительный
6. $(A+B)\cdot\alpha=\alpha\cdot A+\alpha\cdot B$ закон)

Умножения:

1. $A\cdot B\neq B\cdot A$
2. $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$
3. $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$
   $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$
4. $A\cdot E=E\cdot A=A$

Определитель матрицы.

Каждой квадратной матрице ставится в соответствие число, называемое определителем матрицы.

Обозначается: det|A| или ||A|| или |A|

Вычисление определителя.

Для матрицы размера 2x2, определитель вычисляется по следующей формуле:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Для вычисления определителя матрицы размера 3x3 (nxn), введем понятие миноров и алгебраических дополнений.

Вычисление определителя.

Будем называть минором (M_{kl}) определитель матрицы полученной из исходной после вычеркивания из нее k-ой строки и l-го столбца.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{23} \cdot a_{32}$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{31}$$

$$M_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{23} - a_{13} \cdot a_{21}$$

Вычисление определителя.

Алгебраическим дополнением элемента матрицы с индексами k, l называется число , полученное умножением минора (M_{kl}) на (-1) в степени (k+l).

$$A_{kl} = (-1)^{k+l} M_{kl}$$

Вычисление определителя.

Определитель матрицы размера более чем 3x3, вычисляется путем разложения этой матрицы по строке или столбцу, следующим образом:

$$\det|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{21} \cdot A_{21} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{23} \cdot A_{23} =$$

$$= a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} =$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} =$$

$$= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} =$$

$$= a_{13} \cdot A_{13} + a_{23} \cdot A_{23} + a_{33} \cdot A_{33}$$

Вычисление определителя.

Для вычисления определителя матрицы 3х3 можно использовать следующую формулу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} + & + & + & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} - & - & - & & \end{array} \end{array}$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} -$$
$$- a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$

Пример вычисление определителя.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 3 - 2 = 1$$

Пример вычисление определителя.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 0 + 0\cdot 3\cdot(-1) + (-1)\cdot 1\cdot 1 -$$

$$-(-1)\cdot 2\cdot(-1) - 1\cdot 3\cdot 1 - 0\cdot 1\cdot 0 = 0 + 0 - 1 - 2 - 3 - 0 = -6$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Пример вычисление определителя.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-3) + 0\cdot(-3) + (-1)\cdot 3 = -3 - 3 = -6$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\cdot M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot 0 - 3\cdot 1 = 0 - 3 = -3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\cdot M_{12} = -1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot(1\cdot 0 - 3\cdot(-1)) = -1\cdot(0+3) = -3$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\cdot M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 1 + 2 = 3$$

Свойства определителей.

Свойство 1. При перестановке двух строк (или столбцов) определитель меняет знак.

Свойство 2. Общий множитель какой-либо строки или столбца можно выносить за знак определителя.

Свойство 3. Если в определителе две строки (или два столбца) пропорциональны (в частности, равны), то определитель равен нулю.

Свойство 4. При замене всех строк определителя на столбцы с теми же номерами величина его не изменится.

Свойства определителей.

Свойство 5. Если все элементы некоторой строки (столбца) нули, то определитель равен нулю.

Свойство 6. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже число.

Свойство 7. Сумма парных произведений элементов какой-либо строки (столбца) на соответствующие алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна нулю.

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Система вида:

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x + & a_{12}\cdot y + & a_{13}\cdot z & = f_1 \\ a_{21}\cdot x + & a_{22}\cdot y + & a_{23}\cdot z & = f_2 \\ a_{31}\cdot x + & a_{32}\cdot y + & a_{33}\cdot z & = f_3 \end{cases}$$

где $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ матрица системы,

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ - вектор неизвестных, $\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ - вектор правой части уравнения,

называется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ).

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Если обозначим:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \bar{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \qquad \bar{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

То нашу систему можно записать в виде: $A \cdot \bar{x} = \bar{f}$

Тогда решение будет иметь вид: $\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{f}$

где A^{-1} обратная матрица системы.

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

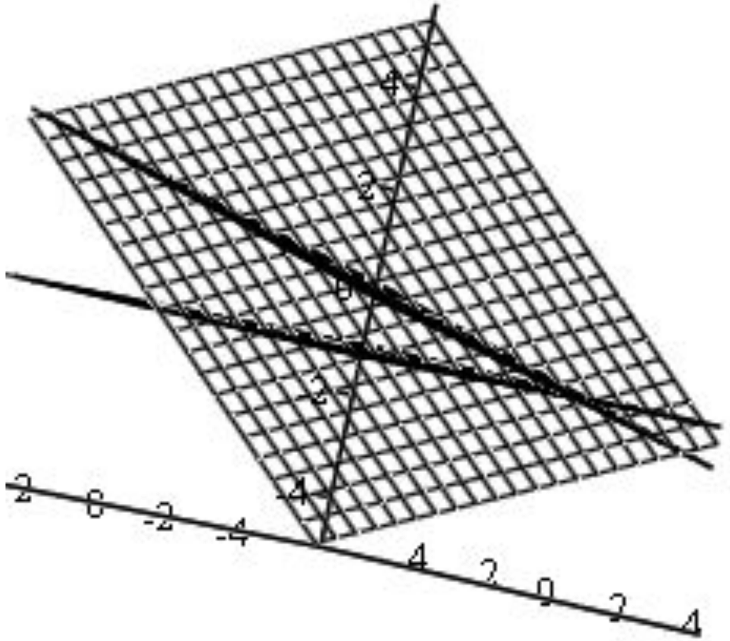
Обратная матрица – это такая матрица при умножении на которую самой матрицы получается единичная матрица.

$$A \cdot A^{-1} = E$$

Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

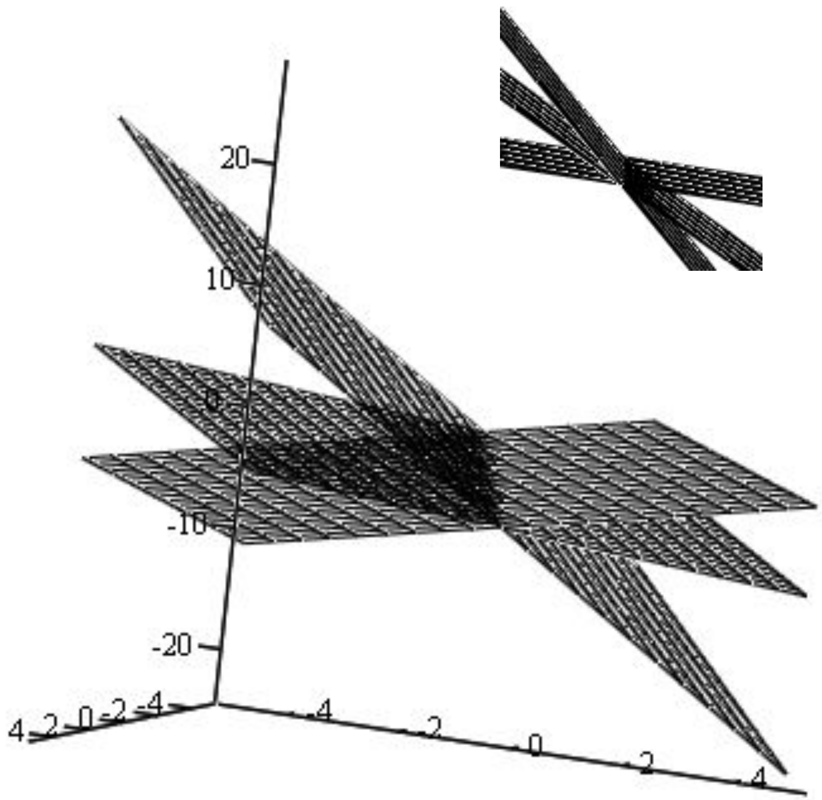
Геометрически, каждое уравнение нашей системы является уравнением плоскости. Возможны следующие варианты взаимного расположения трех плоскостей:

1. Пересечение в одной точке:

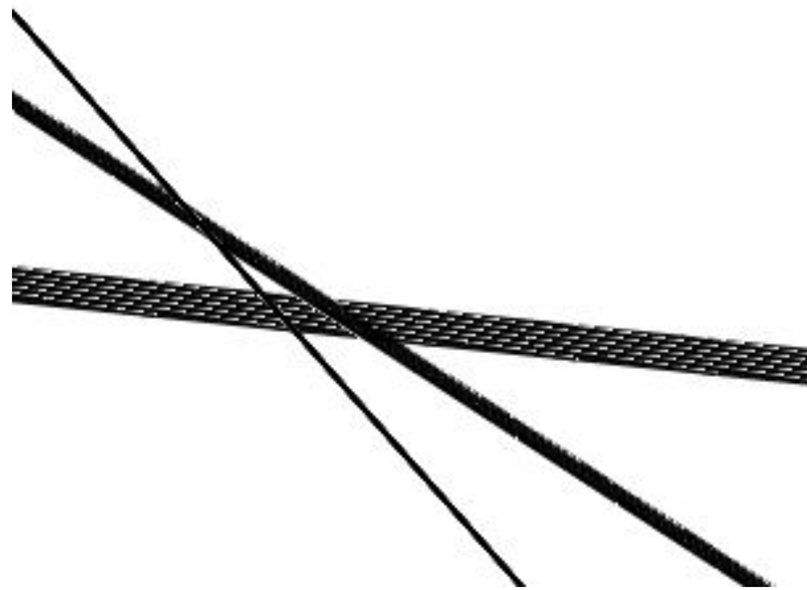


Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

2.Пересечение по прямой:



3.Нет общих точек пересечения:



Система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

В первом случае определитель нашей системы НЕ равен нулю, а значит решение существует и единственно.

Найти решение такой системы мы можем двумя методами: 1. Методом Крамера, 2. Методом обратной матрицы.

Во втором случае решений системы бесконечно много, и решить эту системы мы можем при помощи метода Гаусса.

В третьем случае система не имеет решения, проверить это можно также методом Гаусса.

Метод Крамера.

Данный метод сводиться к нахождению четырех определителей:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D1 = \begin{vmatrix} f_1 & a_{12} & a_{13} \\ f_2 & a_{22} & a_{23} \\ f_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D2 = \begin{vmatrix} a_{11} & f_1 & a_{13} \\ a_{21} & f_2 & a_{23} \\ a_{31} & f_3 & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & f_2 \\ a_{31} & a_{32} & f_3 \end{vmatrix}$$

Метод Крамера.

В результате получим решение СЛАУ:

$$x = \frac{D1}{D} \qquad y = \frac{D2}{D} \qquad z = \frac{D3}{D}$$

Метод Крамера. Пример.

Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2 \cdot z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Метод Крамера. Пример.

Вычислим определитель системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = |A| = 1 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = $$

$$= 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 5$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2 = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (0 - 2) = 2$$

Метод Крамера. Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \quad 0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (4 - 4) = 0$$

Метод Крамера. Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \quad 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{12} + 0 \cdot A_{13} = 1 \cdot 0 = 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

Метод Крамера. Пример.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \quad 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{31} = 1 \cdot 6 + 1 \cdot 4 = 10$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 4 = 6$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 0 = 4$$

Метод Крамера. Пример.

В результате мы получили: D=5, D1=0, D2=0, D3=10.

$$x = \frac{D1}{D} = \frac{0}{5} = 0 \qquad y = \frac{D2}{D} = \frac{0}{5} = 0$$

$$z = \frac{D3}{D} = \frac{10}{5} = 2$$

Метод Крамера. Пример.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2 \cdot z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 + 0 = 0 \\ 0 + 2 \cdot 2 = 4 \\ 0 - 0 + 2 = 2 \end{cases}$$

Решение СЛАУ методом обратной матрицы.

$$A \cdot \overline{x} = \vec{f}$$

$$x = A^{-1} \cdot \vec{f}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\|A\|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2 \cdot z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Решение СЛАУ методом обратной матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1+2=3 \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix}=-1(1+0)=-1$$

$$A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-1(0-2)=2 \qquad A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix}=(1-0)=1$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=0-1=-1 \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1(-1-1)=2$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2-0=2$$

$$A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-1(2-0)=-2, \quad A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1-0=1$$

Решение СЛАУ методом обратной матрицы.

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{x} = A^{-1} \cdot \bar{f} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 \\ 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 2 \\ (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

Расширенной матрицей системы $A \cdot \bar{x} = \bar{f}$

будем называть матрицу вида

$$\left(A \mid \bar{f}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & f_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & f_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & f_3 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

Ранг матрицы – это размер наибольшего ненулевого минора этой матрицы.

Ранг матрицы с ненулевым определителем равен размеру этой матрицы.

Метод Гаусса

Для того, чтобы СЛАУ была совместна ранг матрицы системы должен быть равен рангу расширенной матрицы.

Заметим:

1. Если ранг матрицы системы равен размерности самой матрицы, то система имеет единственное решение.
2. Если ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, но меньше размерности самой матрицы системы, то система имеет бесконечное множество решений.
3. Если ранг матрицы системы меньше ранга расширенной матрицы, то система несовместна и решений не существует.

Метод Гаусса

Сам метод Гаусса состоит в том, чтобы преобразованием строк получить нули под главной диагональю расширенной матрицы системы.

Метод Гаусса

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ y + 2 \cdot z = 4 \\ x - y + z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Метод Гаусса

$$(A\,|\,\bar{f}) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

Вычитаем из 3 строки первую строку

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

Добавим к 3 строке вторую умноженную на 2

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

Теперь из расширенной матрицы запишем получившуюся систему:

$$\begin{cases} x + y \qquad = 0 \\ \quad y + 2z = 4 \\ \qquad 5z = 10 \end{cases}$$

Метод Гаусса

Осталось только решить нашу систему. Из последнего уравнения получаем $z=2$, подставляем это значение z во второе уравнение и получаем $y=0$, теперь подставляем значение y в первое уравнение и получаем $x=0$.

Метод Гаусса

Исследовать СЛАУ на совместность:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 4y + 3z = 0 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

Вычитаем из 2 строки первую

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

Вычитаем из 3 строки первую умноженную на 3

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \end{array}\right) =$$

Вычитаем из 3 строки вторую

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Заметим, что наибольший ненулевой минор имеет размерность 2, а количество неизвестных системы равно 3, т.е. ранг системы совпадает с рангом расширенной матрицы, но он меньше чем количество неизвестных системы – это означает, что наша система имеет бесконечное множество решений.

Метод Гаусса

Исследовать СЛАУ на совместность:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x - 4y + 3z = 1 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 & 1 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

Вычитаем из 2 строки первую

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) =$$

Вычитаем из 3 строки первую умноженную на 3

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -1 \end{array}\right) =$$

Вычитаем из 3 строки вторую

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Метод Гаусса

Заметим, что наибольший ненулевой минор имеет размерность 3.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Заметим, что ран матрицы самой системы равен 2 – это означает, что наша система не имеет решения, т.к. ранг расширенной матрицы больше ранга матрицы системы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$