ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ ЛОГАРИФМОВ

Методы решения уравнений:

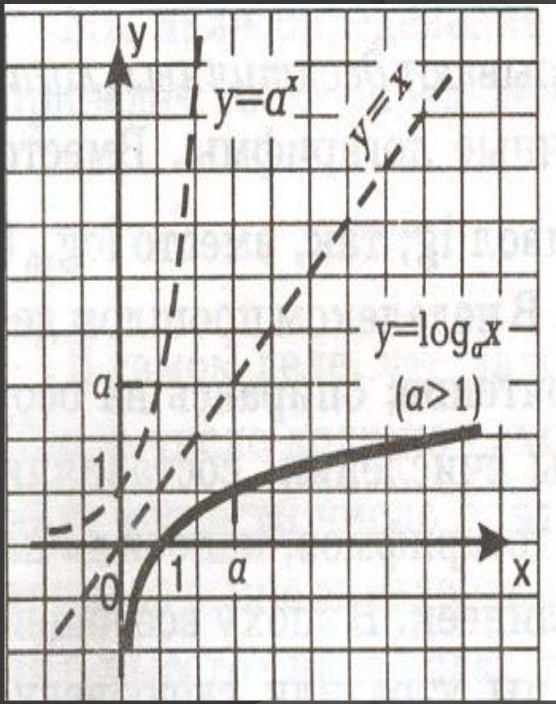
- функционально графический метод ;
- по определению логарифма;
- потенцирование;
- замена переменных;
- логарифмирование

Функционально графический метод

- Пример №1: решите уравнение
- $\text{Log}_5\ x=0$ Решение:

Уравнение $\log_5 x=0$ имеет один корень x=1,поскольку график функции $y=\log_5 x$

пересекает ось x в единственной точке (1;0).



Логарифмические уравнения

Логарифмическими уравнениями называют уравнения вида
$\log_a f(x) = \log_a g(x)$,
где a – положительное число, отличное от 1, и уравнения, сводящиеся к этому виду.

По определению логарифма:

$\log_a x = в$

$x = a^в$, где $a \neq 1$ и $a > 0$

Пример:

$\log_x 16=2$

$$\begin{cases} x^2 =16 \\ x\neq 1 \\ x>0 \\ x_1 = 4 \end{cases}$$

$x_2 = -4$ – не удовлетворяет условию $x>0$

Ответ: 4

Потенцирование

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$$\begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Пример:

$\log_x (x-1) = \log_x (2x-8)$

$$\begin{cases} X-1 = 2x-8, \\ X-1>0, \\ 2x-8>0, \\ x\neq 1, \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=7, \\ x>1, \\ x>4, \\ x\neq 1, \\ x>0 \end{cases}$$

x=7 удовлетворяет всем условиям системы

Ответ: 7

Замена переменных:

$\log_a^2 f(x) + \log_a f(x) + c=0,$

$\log_a f(x) = t, f(x)>0$

$t^2 + t + c = 0$

Далее решаем квадратное уравнение

Д = t - 4*a*c

Находим t_1 и t_2

Подставляем значения t_1 и t_2:

$\log_a f(x)=t_1$

$\log_a f(x)=t_2$

Пример:

$2*\log^{2}_{0,3} – 7*\log_{0,3} -4 = 0$

$\log_{0,3} x = t,\ x>0$

$2t^2 - 7t - 4 = 0,$

$Д = 49 + 32 = 81,$

$t_1 = (7+9) / 4 = 4,$

$t_2 = (7-9) / 4 = -1/2$

$\log_{0,3} x = 4,$ $\log_{0,3} x = -1/2,$

$x_1 = 0{,}0081$ $x_2 = \sqrt{30} / 3$

Ответ: $0{,}0081;\ \sqrt{30} / 3$

Логарифмирование:

$f(x) = g(x)$

$$\begin{cases} f(x)>0, \\ g(x)>0 \\ \log_a f(x) = \log_a g(x) \end{cases}$$

Пример:

$$x^{1-\log_5 x} = 0{,}04$$

Прологарифмируем обе части по основанию 5.

$$\log_5 x^{1-\log_5 x} = \log_5 0{,}04$$

Учтем, что $\log_5 x^r = r^*\log_5 x$ и что $\log_5 0{,}04 = -2$, следовательно уравнение можно привести к следующему виду:

$(1-\log_5 x) * \log_5 x = -2$

$\log_5 x = y$

$(1-y) * y = -2$

$y^2 - y – 2 = 0,$

$\log_5 x = 2,$ $\qquad\qquad$ $\log_5 x = -1$

$x = 25$ $\qquad\qquad$ $x = 1/5$

Ответ: 1/5; 25

Логарифмические системы уравнений

$$\begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ \log_6 x+\log_6 y=1 \end{cases} \quad \begin{cases} \log_5(x+y)=1 \\ \log_6 xy=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+y=5 \\ x*y=6 \end{cases}$$

1) $x=5-y$

2) $(5-y)*y=6$

$5y-y^2-6=0$

$y^2-5y+6=0$

$Д = 25-24=1$

$y_1=(5+1)/2=3$

$y_2=(5-1)/2=2$

3) $x_1=5-3=2$

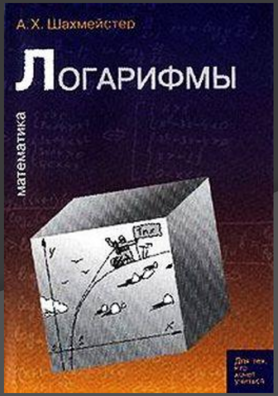
$x_2=5-2=3$

Ответ : (2;3),(3;2).

Логарифмы в жизни

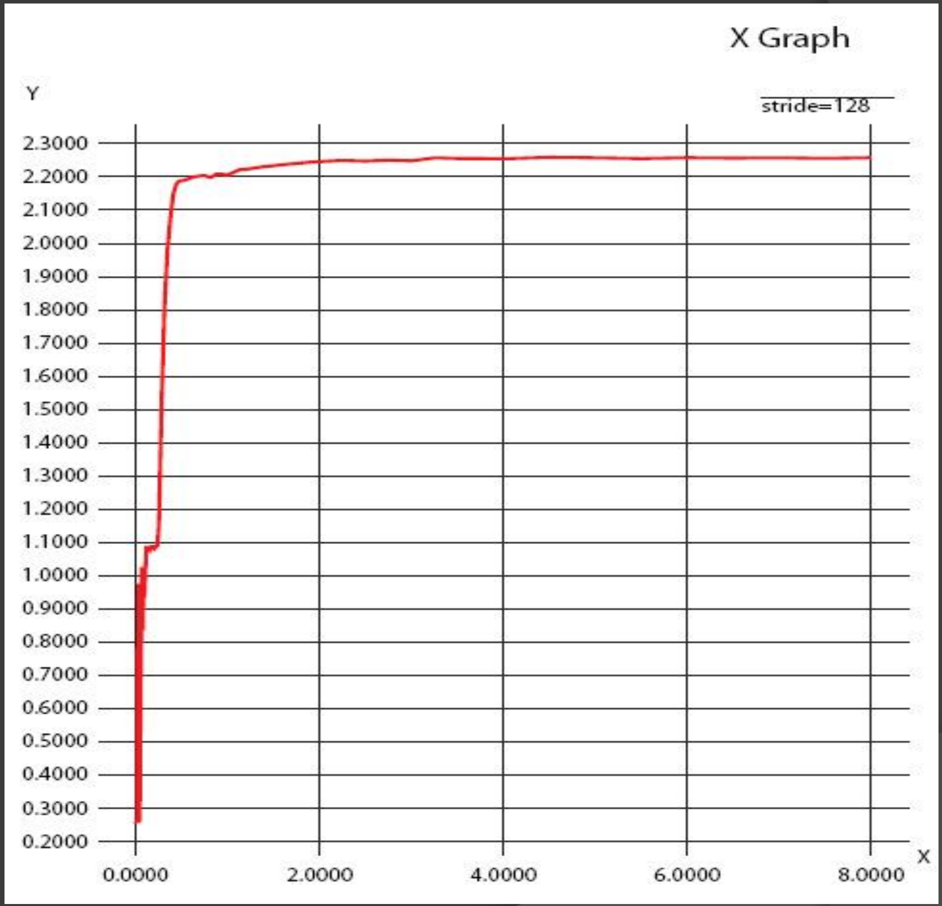
Звезды, шум и логарифмы

Заголовок этот, связывающий столь, казалось бы, несоединимые вещи, не притязает быть пародией на произведения Кузьмы Пруткова; речь в самом деле пойдет о звездах и о шуме в тесной связи с логарифмами.



Звезды, шум и логарифмы

Шум и звезды объединяются здесь потому, что и громкость шума и яркость звезд оцениваются одинаковым образом - по логарифмической шкале.



Звезды, шум и логарифмы

Астрономы распределяют звезды по степеням видимой яркости на светила первой величины, второй величины, третьей и т. д. Последовательные звездные величины воспринимаются глазом как члены арифметической прогрессии. Но физическая яркость их изменяется по иному закону: объективные яркости составляют геометрическую прогрессию со знаменателем 2,5. Легко понять, что «величина» звезды представляет собой не что иное, как логарифм ее физической яркости. Звезда, например, третьей величины ярче звезды первой величины в 2,53-1, т. е. в 6,25 раза.

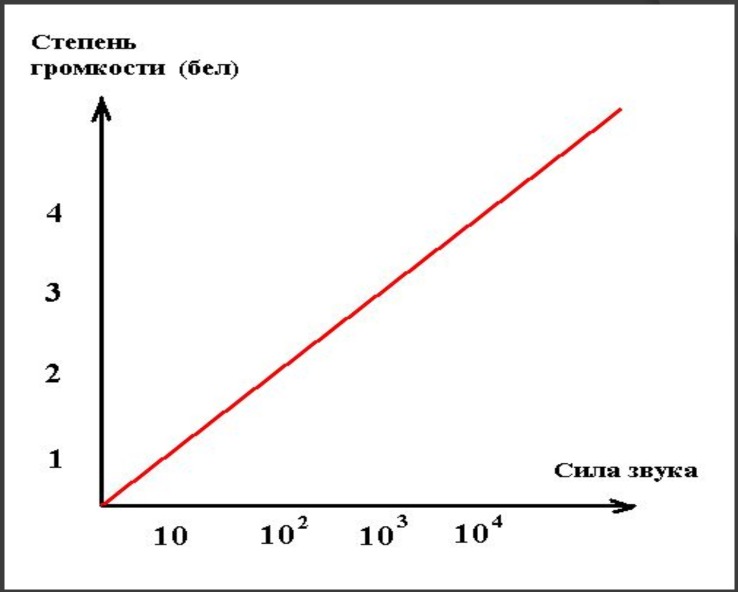
Короче говоря, оценивая видимую яркость звезд, астроном оперирует с таблицей логарифмов, составленной при основании 2,5.

Звезды, шум и логарифмы

Сходным образом оценивается и громкость шума. Вредное влияние шумов на здоровье людей побудило изучению шумов,к их классификации, к созданию определённых стандартов и эталонов. Единицей громкости служит «бел», практически - его десятая доля, «децибел». Последовательные степени громкости - 1 бел, 2 бела и т. д. (практически- 10 децибел, 20 децибел и т. д.)--составляют для нашего слуха арифметическую прогрессию. Физическая же «сила» этих шумов (точнее - энергия) составляет прогрессию геометрическую со знаменателем 10. Разности громкостей в 1 бел отвечает отношение силы шумов 10. Значит, громкость шума, выраженная в белах, равна десятичному логарифму его физической силы.

Звезды, шум и логарифмы

Зависимость величины громкости от его физической характеристики



Формула зависимости

N~lg S,

где N - величина громкости; S – сила звука

Звезды, шум и логарифмы

Шум, громкость которого больше 8 бел, признается вредным для человеческого организма.

Указанная норма на многих заводах превосходится: здесь бывают шумы в 10 и более бел; удары молотка в стальную плиту порождают шум в 11 бел.

Случайность ли то, что и при оценке видимой яркости светил и при измерении громкости шума мы имеем дело с логарифмической зависимостью между величиной ощущения и порождающего его раздражения? Нет, то и другое - следствие общего закона (называемого «психофизическим законом Фехнера»), гласящего: величина ощущения пропорциональна логарифму величины раздражения.

Музыка и логарифмы

Никто и предположить не мог, что музыка и логарифмы связаны между собой. Известный физик Эйхенвальд вспоминал: “Товарищ мой по гимназии любил играть на рояле, но не любил математику. Он даже говорил с оттенком пренебрежения, что музыка и математика друг с другом не имеют ничего общего. “Правда, Пифагор нашел какие-то соотношения между звуковыми колебаниями, - но ведь как раз пифагорова – то гамма для нашей музыки и оказалась неприемлемой”. Представьте же себе, как неприятно был поражен мой товарищ, когда я доказал ему, что, играя по клавишам современного рояля, он играет, собственно говоря, на логарифмах”.

Музыка и логарифмы

Зависимость частоты колебаний ноты «до» в разных октавах:

Номер октавы	Частота
0	n
1	2n
2	$nx2^2$
…	…
m	$nx2^m$

Музыка и логарифмы

Формула для нахождения частоты звука

$$N=nx2^{m}x(^{12}\ 2\ )^{p}$$

где

P – номер ноты хроматической 12-ти звуковой гаммы

m – номер гаммы