2. Алгебраические и трансцендентные уравнения

Рассмотрим уравнение $f(x) = 0$, где функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором конечном или бесконечном интервале $a < x < b$.

Определение 2.1. ***Корнем*** уравнения $f(x) = 0$ называется значение ξ, обращающее функцию $f(x)$ в нуль, т.е. такое, что $f(\xi) = 0$.

Определение 2.2. Уравнение $f(x) = 0$ называется ***алгебраическим***, если функция $f(x)$ является многочленом $f(x) = P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_1 x + a_0$, в противном случае уравнение $f(x) = 0$ называется ***трансцендентным***.

Встречающиеся на практике уравнения часто не удается решить аналитическими методами. Для решения таких уравнений используются численные методы.

Алгоритм нахождения корня уравнения с помощью численного метода состоит из двух этапов:

а) ***отделение*** или ***локализация*** корня, т.е. установление промежутка $[a, b]$, в котором содержится ровно один корень;

б) ***уточнение*** значения корня методом последовательных приближений.

2.1 Методы локализации корней

2.1.1 Аналитический метод

Теоретической основой алгоритма отделения корней служит теорема Коши о промежуточных значениях непрерывной функции:

Теорема 2.1. *Если функция f*(*x*) *непрерывна на отрезке* [*a, b*] *и f*(*a*) = *A, f*(*b*) = *B, то для любой точки C, лежащей между A и B на этом отрезке существует точка* $\xi \in [a,b]$, что *f*(*ξ*) = *C*.

Следствие. *Если функция f*(*x*) *непрерывна на отрезке* [*a, b*] *и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует хотя бы один корень уравнения f*(*x*) = 0.

Пусть область определения и непрерывности функции является конечным отрезком [a, b]. Разделим отрезок на n частей:

$$a_k = a + kh,\ k = 0,1,\ldots n,\ h = (b-a)/n.$$

Вычисляя последовательно значения функции в точках a_0, a_1, … a_n, находим такие отрезки [a_k, a_{k+1}], для которых выполняется условие

$$f(a_k)\cdot f(a_{k+1}) < 0, \qquad (2.1)$$

т.е. $f(a_k) < 0, f(a_{k+1}) > 0$ или $f(a_k) > 0, f(a_{k+1}) < 0.$ Эти отрезки и содержат хотя бы по одному корню.

Пример 2.1. Отделить корни уравнения $\sin 5x + x^2 - 1 = 0$.

Решение. Построим таблицу значений функции $y = \sin 5x + x^2 - 1$ на отрезке $[-4; 4]$ с шагом изменения аргумента $h = 1$, пользуясь калькулятором или электронными таблицами (табл. 2.1).

Табл. 2.1

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
y	14,087	7,349	3,544	0,958	–1	–0,958	2,455	8,650	15,912

Табл. 2.1 показывает, что данное уравнение имеет корни в интервалах (–1; 0) и (1; 2), так как функция меняет знак в этих промежутках. Пока мы не можем утверждать, что в найденных интервалах содержится ровно по одному корню и, что в других интервалах корней нет. Чтобы уточнить информацию о числе корней можно построить таблицу значений функции с меньшим шагом, например $h = 0,1$.

Теорема 2.2. *Если непрерывная функция f(x) монотонна на отрезке [a, b] и на его концах принимает значения разных знаков, то на этом отрезке существует единственный корень уравнения f(x) = 0.*

Если функция $f(x)$ дифференцируема и её производная сохраняет знак на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ монотонна на этом отрезке.
Если производная $f'(x)$ легко вычисляется и нетрудно определить её корни, то для отделения корней уравнения $f(x) = 0$ можно применить следующий алгоритм:

1) Найти критические точки, т.е. точки, в которых производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, и определить интервалы знакопостоянства производной (на этих интервалах функция $f(x)$ может иметь только по одному корню);
2) Составить таблицу знаков функции $f(x)$, приравнивая переменную x критическим и граничным значениям, или близким к ним;
3) Определить отрезки, на концах которых функция принимает значения разных знаков.

Пример 2.2. Отделить корни уравнения $\sin x + x - 1 = 0$.

Решение. Найдем производную функции $f(x) = \sin x + x - 1$ и её корни:

$$f'(x) = \cos x + 1 = 0, \quad x = \pi + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, ...$$

Функция $f(x) = \sin x + x - 1$ монотонна на отрезках $[-\pi + 2\pi k, \pi + 2\pi k]$.
Очевидно, что лишь отрезок $[-\pi, \pi]$ содержит корень и он единственный, так как при $x > \pi$ $f(x) > 0$; при $x < -\pi$ $f(x) < 0$.

2.1.2 Графический метод

Для отделения корней уравнения зачастую бывает удобно применять графический метод. График функции $y = f(x)$ с учетом ее свойств дает много информации для определения числа корней и отрезков их расположения для уравнения $f(x) = 0$.

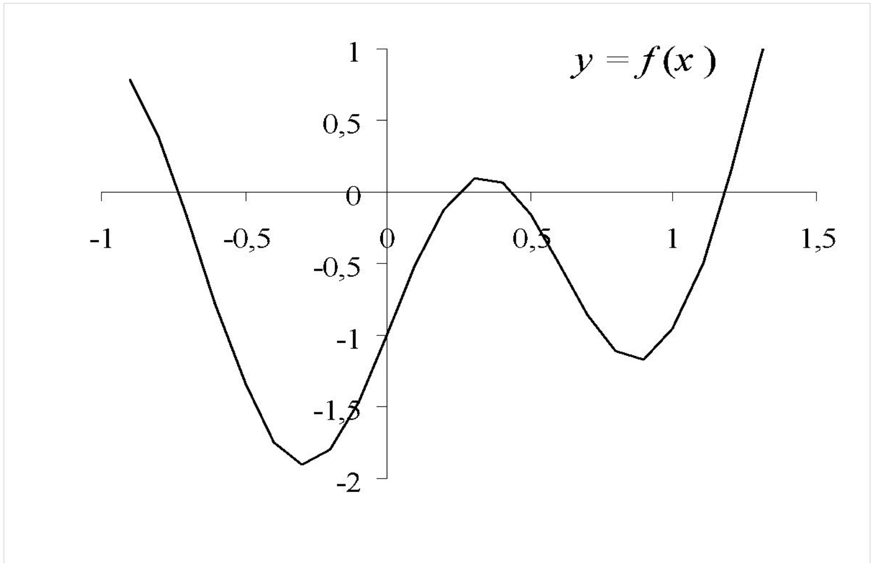

Рис 2.1

Из графика функции $y = \sin 5x + x^2 - 1$ на рис.2.1 видно, что на отрезке [0; 0,5] есть два корня уравнения $\sin 5x + x^2 - 1 = 0$, а на отрезках [–1; –0,5] и [1; 1,5] по одному корню. Чтобы убедиться в том, что больше корней нет, преобразуем уравнение к виду $\sin 5x = 1 - x^2$ и построим графики двух функций $f_1(x) = \sin 5x$ и $f_2(x) = 1 - x^2$. Корням соответствуют абсциссы точек пересечения этих графиков.

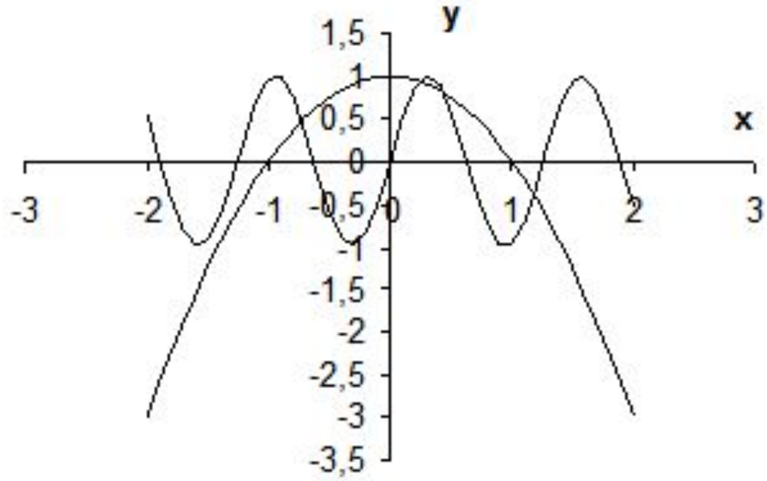

рис 2.2

Из рис. 2.2 видно, что графики пересекаются в четырех точках, и данное уравнение имеет ровно четыре корня, что подтверждает предыдущие выводы.

До настоящего времени графический метод предлагалось применять для нахождения грубого значения корня или нахождения интервала, содержащего корень, и затем применять итерационные методы, т.е. методы последовательных приближений для уточнения значения корня. С появлением математических пакетов и электронных таблиц стало возможным вычислять таблицы значений функции с любым шагом и строить графики с высокой точностью. Это позволяет уточнять очередной знак в приближенном значении корня при помощи следующего алгоритма:

1) Если функция $f(x)$ на концах отрезка $[a, b]$ принимает значения разных знаков, то делим отрезок на 10 равных частей и находим ту часть, которая содержит корень (таким способом мы можем уменьшить длину отрезка, содержащего корень, в 10 раз).

2) Повторим действия предыдущего пункта для полученного отрезка.

Этот процесс можно продолжать до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше заданной погрешности.

Пример 2.3. Вычислить графически с точностью до 0,0001 корень уравнения $\sin 5x + x2 - 1 = 0$, принадлежащий интервалу (0,4; 0,5).

Решение. Построим график функции $y = \sin 5x + x^2 - 1$ на отрезке [0,4; 0,5] с шагом h = 0,01 (делим отрезок на 10 частей) в программе *Excel*:

1) В диапазоне *A*2:*A*12 введем значения переменной *x*. Для этого в ячейке *A*2 запишем 0,40, в ячейке *A*3 — значение 0,41. После этого выделим диапазон *A*2:*A*3 и с помощью маркера заполнения присвоим значения остальным ячейкам до ячейки *A*12.

2) В ячейку *B*2 введем формулу =SIN(5**A*2)+*A*2^2–1 и скопируем *B*2 с помощью маркера заполнения в остальные ячейки до ячейки *B*12.

3) Выделим диапазон *A*2:*B*12 и с помощью мастера диаграмм (тип диаграммы “Точечная”!) построим график функции.

Лист *Excel* отображен на рис. 2.3.

	A	B
1	x	y
2	0,4	0,069297
3	0,41	0,055462
4	0,42	0,039609
5	0,43	0,021799
6	0,44	0,002096
7	0,45	–0,01943
8	0,46	–0,04269
9	0,47	–0,06763
10	0,48	–0,09414
11	0,49	–0,12214
12	0,5	–0,15153
13		
14		

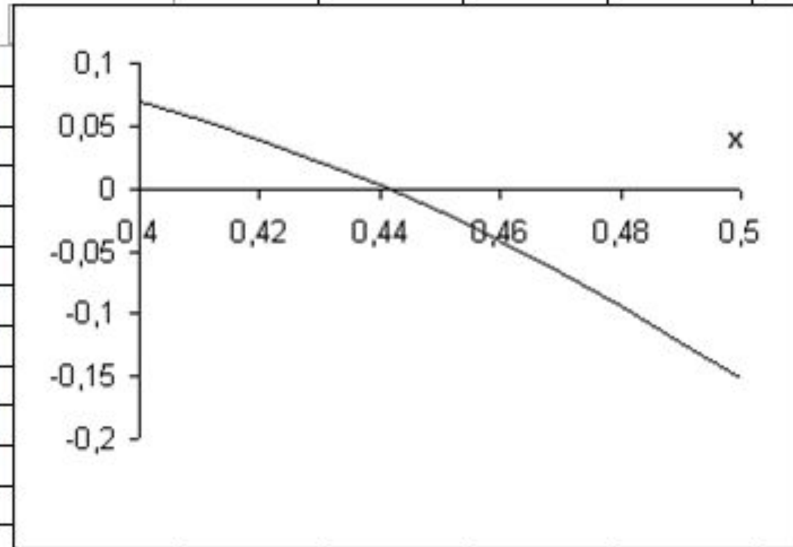

рис 2.3

Рис. 2.3 показывает, что корень находится в интервале (0,44; 0,45), так как функция меняет знак в точках 0,44 и 0,45.

Заменим значения переменной *x* на том же листе в диапазоне *A*2:*A*12, то есть вместо интервала (0,4; 0,5) подставим интервал (0,44; 0,45) с шагом *h* = 0,001. Для этого в ячейке *A*2 запишем 0,440, а в ячейке *A*3 — значение 0,441. Затем выделим диапазон *A*2:*A*3 и с помощью маркера заполнения присвоим значения остальным ячейкам до ячейки *A*12. Формулы в ячейках *B*2:*B*12 не трогаем! В результате этого получим новую таблицу значений функции, из которой получаем уточненный интервал (0,441; 0,442).

Повторив всю процедуру еще раз, заменим в диапазоне *A*2:*A*12 интервал (0,44; 0,45) на интервал (0,441; 0,442) с шагом h = 0,0001. Искомый корень содержится в интервале (0,4410; 0,4411). Длина этого интервала равна 0,0001 и любое число из этого интервала можно принять за приближенное значение корня с погрешностью 0,0001. Выберем середину отрезка, т.е. положим $x \approx$ 0,44105.

В таблице 2.2 приведены все три этапа уточнения корня. Здесь мы не приводим соответствующие графики, так как для отделения корня достаточно рассмотреть таблицу значений функции и найти последовательные значения переменной x, в которых функция изменяет знак.

Аналогично можно уточнить значения других корней данного уравнения.

Для этого достаточно на том же расчетном листе вместо отрезка [0,4; 0,5] рассмотреть любой из оставшихся трех отрезков [– 0,8; – 0,7], [0,2; 0,3], [1,1; 1,2].

Обратите внимание на то, что здесь рассматриваются начальные отрезки длиной 0,1 для того, чтобы после каждого уточнения мы получили уточненную верную десятичную цифру приближенного значения корня.

Табл. 2.2

1–й этап. Интервал (0,4; 0,5)		
	A	B
1	x	y
2	0,4	0,069297
3	0,41	0,055462
4	0,42	0,039609
5	0,43	0,021799
6	**0,44**	**0,002096**
7	**0,45**	**–0,01943**
8	0,46	–0,04269
9	0,47	–0,06763
10	0,48	–0,09414
11	0,49	–0,12214
12	0,5	–0,15153

2-й этап. Интервал (0,44; 0,45)		
	A	B
1	x	y
2	0,44	0,002096
3	**0,441**	**2,48E–05**
4	**0,442**	**–0,00206**
5	0,443	–0,00417
6	0,444	–0,0063
7	0,445	–0,00844
8	0,446	–0,0106
9	0,447	–0,01278
10	0,448	–0,01498
11	0,449	–0,01719
12	0,45	–0,01943

3-й этап. Интервал (0,441; 0,442)		
	A	B
1	x	y
2	**0,441**	**2,48E–05**
3	**0,4411**	**–0,00018**
4	0,4412	–0,00039
5	0,4413	–0,0006
6	0,4414	–0,00081
7	0,4415	–0,00102
8	0,4416	–0,00123
9	0,4417	–0,00144
10	0,4418	–0,00165
11	0,4419	–0,00186
12	0,442	–0,00206

Изложенный метод можно охарактеризовать как метод деления отрезка на 10 частей. Метод применим в случае, когда левая часть уравнения $f(x) = 0$ задана аналитическим выражением через известные функции, непрерывна на данном отрезке, и на концах его принимает значения разных знаков. Этот метод особенно удобен для применения в электронных таблицах.

2.2 Методы уточнения корней

После того как найден интервал, содержащий корень, применяют методы ***последовательных приближений***, или ***итерационные*** методы вычисления корня с заданной точностью.

2.2.1. Метод половинного деления

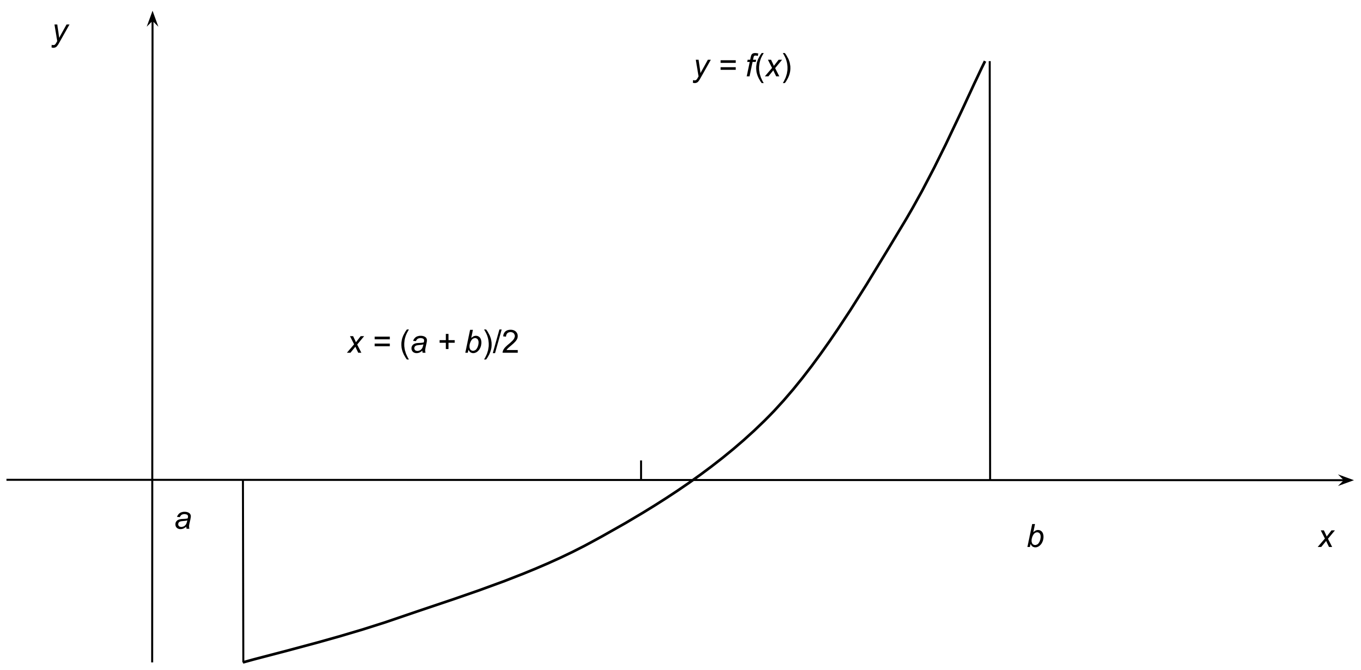

рис. Метод половинного деления

Метод ***половинного деления*** (другие названия: ***метод бисекций***, ***метод дихотомии***) для решения уравнения $f(x) = 0$ заключается в следующем. Пусть известно, что функция непрерывна и принимает на концах отрезка $[a, b]$ значения разных знаков, тогда корень содержится в интервале (a, b). Разделим интервал на две половины и дальше будем рассматривать ту половину, на концах которой функция принимает значения разных знаков. Этот новый отрезок снова делим на две равные части и выбираем из них ту, которая содержит корень. Этот процесс продолжается до тех пор, пока длина очередного отрезка не станет меньше требуемой величины погрешности.

Более строгое изложение алгоритма метода половинного деления:

1) Вычислим $x = (a + b)/2$; вычислим $f(x)$;

2) Если $f(x) = 0$, то переходим к пункту 5;

3) Если $f(x) \cdot f(a) < 0$, то $b = x$, иначе $a = x$;

4) Если $|b – a| > \varepsilon$, переходим к пункту 1;

5) Выводим значение x;

6) Конец.

Пример 2.4. Уточнить методом бисекций с точностью до 0,01 корень уравнения $(x - 1)^3 = 0$, принадлежащий отрезку [0,95; 1,1].

Решение в программе *Excel*:

1) В ячейках *A*1:*F*4 введем обозначения, начальные значения и формулы, как показано в таблице 2.3.

2) Каждую формулу скопируем в нижние ячейки маркером заполнения до десятой строки, т.е. *B*4 — до *B*10, *C*4 — до *C*10, *D*3 — до *D*10, *E*4 — до *E*10, *F*3 — до *F*10.

Таблица 2.3

	A	B	C	D	E	F
1		f(a)=	=(1-B3)^3			
2	k	a	x	f(x)	b	b-a
3	1	0,95	=(B3+E3)/2	=(1-C3)^3	1,1	=E3-B3
4	2	=ЕСЛИ(D3=0;C3; ЕСЛИ(C$1*D3<0;B3;C3))			=ЕСЛИ(C$1*D3>0; E3;C3)	

Результаты расчетов приведены в табл. 2.4. В столбце *F* проверяем значения длины интервала *b* – *a*. Если значение меньше чем 0,01, то в данной строке найдено приближенное значение корня с заданной погрешностью. Потребовалось 5 итераций для достижения требуемой точности. Приближенное значение корня с точностью до 0,01 после округления до трех знаков равно 1,0015625 ≈ 1,00.

Таблица 2.4

	A	B	C	D	E	F
1		f(a)=	0,000125			
2	k	a	x	f(x)	b	b-a
3	1	0,95	1,025	-2E-05	1,1	0,15
4	2	0,95	0,9875	2E-06	1,025	0,075
5	3	0,9875	1,00625	-2E-07	1,025	0,0375
6	4	0,9875	0,996875	3,1E-08	1,00625	0,0187
7	5	0,996875	1,0015625	-4E-09	1,00625	0,0094
8	6	0,996875	0,9992188	4,8E-10	1,0015625	0,0047
9	7	0,99921875	1,0003906	-6E-11	1,0015625	0,0023
10	8	0,99921875	0,9998047	7,5E-12	1,000390625	0,0012

Приведенный алгоритм учитывает возможный случай «попадания в корень», т. е. равенство $f(x)$ нулю на очередном этапе. Если в примере 2.3 взять отрезок [0,9; 1,1], то на первом же шаге попадаем в корень $x = 1$. Действительно, запишем в ячейке *B*3 значение 0,9. Тогда таблица результатов примет вид 2.5 (приведены только 2 итерации).

Таблица 2.5

	A	B	C	D	E	F
1		f(a)=	0,001			
2	k	a	x	f(x)	b	b-a
3	1	0,9	1	0	1,1	0,2
4	2	1	1	0	1	0

Создадим в программе *Excel* пользовательские функции f(x) и bisect(a, b, eps) для решения уравнения методом половинного деления, пользуясь встроенным языком *Visual Basic*. Их описания приведены ниже:

```
Function f(x)
  f = (x - 1) ^ 3
End Function
Function bisect(a, b, eps)
 1  x = (a + b) / 2
 If f(x) = 0 Then GoTo 5
 If f(x) * f(a) < 0 Then
   b = x
  Else
  a = x
 End If
 If Abs(a - b) > eps Then GoTo 1
 5  bisect = x
End Function
```

Функция *f(x)* определяет левую часть уравнения, а функция *bisect(a, b, eps)* вычисляет методом половинного деления корень уравнения f(x) = 0. Обратим внимание на то, что в функции *bisect(a, b, eps)* используется обращение к функции *f(x)*.

2.2.2 Метод итераций

Метод простых итераций для уравнения $f(x) = 0$ заключается в следующем:

1) Исходное уравнение преобразуют к виду, удобному для итераций:

$$x = \varphi(x); \qquad (2.2)$$

2) Выбирают начальное приближение x_0 и вычисляют последующие приближения по итерационной формуле

$$x_k = \varphi(x_{k-1}),\ k = 1, 2, \ldots \qquad (2.3)$$

Если существует предел итерационной последовательности $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$, то он является корнем уравнения $f(x) = 0$, то есть $f(\xi) = 0$.

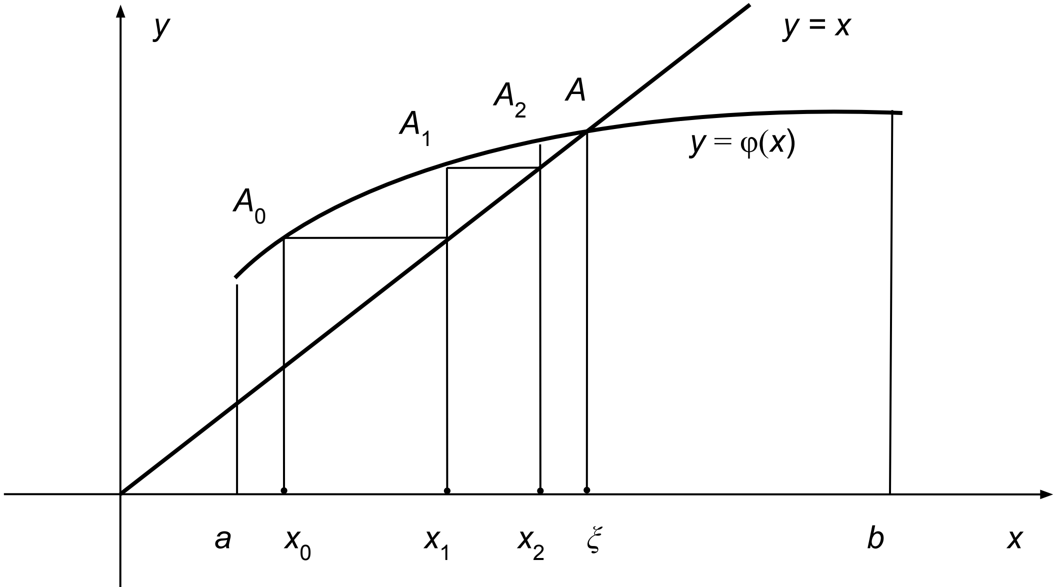

Рис. 2.4. Сходящийся процесс итераций

На рис. 2.4 показан процесс получения очередного приближения по методу итераций. Последовательность приближений сходится к корню ξ.

Теоретические основы для применения метода итераций дает следующая теорема

Теорема 2.3. Пусть выполняются условия:

корень уравнения $x = \varphi(x)$ принадлежит отрезку $[a, b]$;

все значения функции $\varphi(x)$ принадлежат отрезку $[a, b]$, т.е. $a \le \varphi(x) \le b$;

существует такое положительное число $q < 1$, что производная $\varphi'(x)$ во всех точках отрезка $[a, b]$ удовлетворяет неравенству $|\varphi'(x)| \le q$.

Тогда:

Итерационная последовательность $x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ сходится при любом $x_0 \in [a, b]$.

Предел итерационной последовательности является корнем уравнения $x = \varphi(x)$, т.е. если $\lim_{k\to\infty} x_k = \xi$, то $\xi = \varphi(\xi)$.

Справедливо неравенство, характеризующее скорость сходимости итерационной последовательности

$$|\xi - x_k| \le (b-a)\cdot q^k \qquad (2.4)$$

Как мы видим, эта теорема ставит довольно жесткие условия, которые необходимо проверить перед применением метода итераций. Если производная функции *φ(x)* по модулю больше единицы, то процесс итераций расходится (рис.2.5).

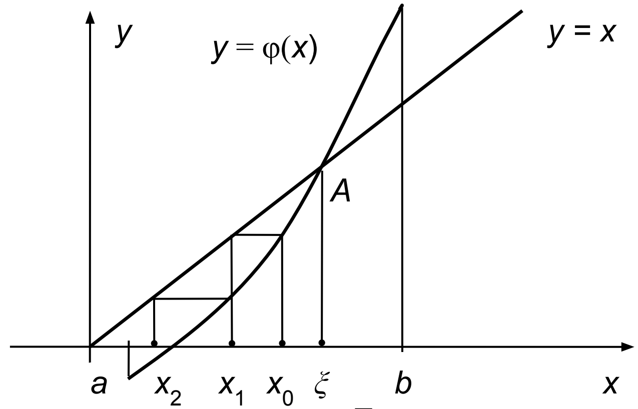

рис. 2.5

Пример 2.5. Найти корень уравнения $\sin 5x + x^2 - 1 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$ методом итераций, используя найденный выше отрезок [0,2; 0,3].

Решение. Преобразуем уравнение $f(x) = 0$ к виду $x = \varphi(x)$:

$\sin 5x + x^2 - 1 = 0$, => $\sin 5x = 1 - x^2$, => $x = \arcsin(1 - x^2)/5$

$\varphi(x) = \arcsin(1 - x^2)/5$

Проверим условия теоремы. Так как функция $\varphi(x)$ монотонна на отрезке [0,2; 0,3], то нетрудно показать, что верны следующие неравенства:

$$\frac{1}{5}\arcsin(1-0{,}3^2) \approx 0{,}229 < \varphi(x) < \frac{1}{5}\arcsin(1-0{,}2^2) \approx 0{,}257$$

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{2x}{5\sqrt{1-(1-x^2)^2}}\right| < \left|\frac{2\cdot 0{,}3}{5\sqrt{1-(1-0{,}3^2)^2}}\right| \approx 0{,}289 < 1$$

Все условия теоремы выполнены, мы можем применить метод итераций. Выполним вычисления в программе *Excel*:

1) Вводим в ячейки обозначения и формулы, как показано в табл.2.6;

2) Ячейку *B*3 с помощью маркера заполнения копируем вниз до ячейки *B*6; аналогично копируем ячейку *C*2 до ячейки C6, ячейку *D*2 — до ячейки *D*6; Выделим диапазон A2:A3 и с помощью маркера заполнения копируем вниз, до ячейки A6.

Таблица 2.6

	A	B	C	D
1	k	x(k)	fi(x)	|x(k) – x(k-1)|
2	1	0,2	=ASIN(1-B2^2)/5	=ABS(C2-B2)
3	2	=C2		

Результаты расчетов приведены в табл. 2.7.

Таблица 2.7

	A	B	C	D
1	k	xk–1	xk = φ (xk–1)	|xk – xk–1|
2	1	0,2	0,2574	0,0574
3	2	0,2574	0,240947	0,01645
4	3	0,240947	0,245675	0,004728
5	4	0,245675	0,244318	0,00136
6	5	0,244318	0,244707	0,00039

В качестве условия сходимости итерационных методов часто используется неравенство

$$|x_k - x_{k-1}| \leq \varepsilon. \qquad (2.5)$$

По этому критерию приближенным значением с точностью $\varepsilon = 0{,}001$ является $x_5 = 0{,}244707 \approx 0{,}245$.

Создадим в программе *Excel* функции для решения уравнения методом итераций.

Приведем текст программы-функции *iter* для решения уравнения методом итераций в программе *Mathcad* и результат вычисления корня:

$$
\mathrm{iter}(\phi, x0, \varepsilon) := \left\|
\begin{array}{l}
x1 \leftarrow \phi(x0) \\
\text{while } |x1 - x0| > \varepsilon \\
\quad \left\| \begin{array}{l} x0 \leftarrow x1 \\ x1 \leftarrow \phi(x0) \end{array} \right. \\
x1
\end{array}
\right.
\qquad
\phi(x) := \frac{\mathrm{asin}\left(1 - x^2\right)}{5}
$$

$$
\mathrm{iter}(\phi, 0.2, 0.0001) = 0.244627588
$$

Параметры программы *iter(φ, x0, ε)*:

φ — имя функции в правой части уравнения $x = \varphi(x)$;

x_0 — начальное приближение;

ε — точность приближения соответствующая формуле (2.4.3).

Результат расчета 0,244627588 ≈ 0,2446 с начальным значением 0,2 и точностью 0,0001 содержит больше верных знаков, чем корень, полученный в программе *Excel* с меньшей точностью 0,001.

2.2.3 Метод хорд

Метод хорд заключается в замене кривой $y = f(x)$ отрезком прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (см. рис. 2.6). Абсцисса точки пересечения прямой с осью OX принимается за очередное приближение.

Чтобы получить расчетную формулу метода хорд, запишем уравнение прямой, проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ и, приравнивая y нулю, найдем x:

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a}, \quad \Rightarrow \quad x = a - \frac{f(a)(b - a)}{f(b) - f(a)}.$$

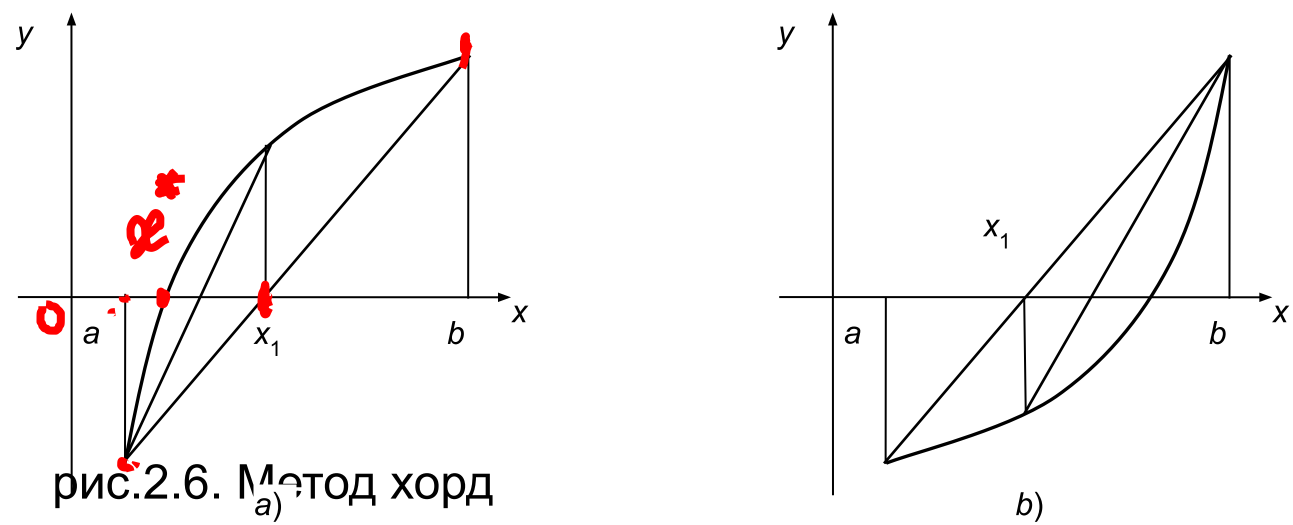

рис.2.6. Метод хорд

Алгоритм метода хорд:

1) Пусть $k = 0$;

2) Вычислим следующий номер итерации: $k = k + 1$; Найдем очередное k-ое приближение по формуле: $x_k = a - f(a)(b - a)/(f(b) - f(a))$; Вычислим $f(x_k)$.

3) Если $f(x_k) = 0$ (корень найден), то переходим к 5).

Если $f(x_k)f(b)>0$, $b = x_k$, иначе — переменной $a = x_k$.

4) Если $|x_k - x_{k-1}| > \varepsilon$, то переходим к шагу 2);

5) Выводим значение корня x_k.

6) Конец.

Замечание. Действия третьего пункта аналогичны действиям метода половинного деления. Однако в методе хорд на каждом шаге может сдвигаться один и тот же конец отрезка (правый или левый), если график функции в окрестности корня выпуклый вверх (рис. 2.6, *a*)) или вогнутый вниз (рис. 2.6, *b*)). Поэтому в критерии сходимости используется разность соседних приближений.

Пример 2.6. Применим метод хорд к уравнению $\sin 5x + x^2 - 1 = 0$ и отрезку [0,2; 0,3] для определения корня с точностью до $\varepsilon = 0{,}001$.

Решение. Проведем расчеты в программе *Excel*:

1) В ячейки A1:H1 запишем заголовки столбцов как в табл. 2.6;
2) В ячейку B3 запишем формулу =ЕСЛИ(C2*E2<0;B2;D2) и затем ячейку B3 протянем маркером заполнения до ячейки B10;
3) В ячейку C2 запишем формулу =SIN(5*B2)+B2^2-1 и затем ячейку C2 протянем маркером заполнения до ячейки C10;
4) В ячейку D2 запишем формулу =B2-C2*(F2-B2)/(G2-C2) и затем ячейку D2 протянем маркером заполнения до ячейки D10;
5) В ячейку E2 запишем формулу =SIN(5*D2)+D2^2-1 и затем ячейку E2 протянем маркером заполнения до ячейки E10;
6) В ячейку F3 запишем формулу =ЕСЛИ(C2*E2<0;D2;F2) и затем ячейку F3 протянем маркером заполнения до ячейки F10;
7) В ячейку G2 запишем формулу =SIN(5*F2)+F2^2-1 и затем ячейку G2 протянем маркером заполнения до ячейки G10;
8) В ячейку H2 запишем формулу =ABS(F2-B2) и затем ячейку H2 протянем маркером заполнения до ячейки H10;

В таблице 2.8 приведены результаты. Необходимая точность достигается на шаге $k = 4$.

Таблица 2.8

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	k	a	f(a)	x	f(x)	b	f(b)	|b-a|
2	1	0,2	-0,11853	0,25753165	0,026506	0,3	0,0874949	0,1
3	2	0,2	-0,11853	0,24701739	0,005194	0,25753165	0,026506	0,01051
4	3	0,2	-0,11853	0,24504339	0,000926	0,24701739	0,0051944	0,00197
5	4	0,2	-0,11853	0,24469436	0,000162	0,2450434	0,0009256	0,00035

Решение в программе ***Mathcad***:

$$
\mathrm{hord}(f,a,b,\varepsilon) := \left|\begin{array}{l}
x0 \leftarrow a \\
x1 \leftarrow b \\
\text{while } |x1 - x0| > \varepsilon \\
\quad \left|\begin{array}{l}
x0 \leftarrow x1 \\
x1 \leftarrow a - f(a)\cdot\dfrac{(b-a)}{f(b)-f(a)} \\
fx1 \leftarrow f(x1) \\
\text{break if } fx1 = 0 \\
b \leftarrow x1 \ \text{ if } \ fx1\cdot f(b) > 0 \\
a \leftarrow x1 \ \text{ otherwise}
\end{array}\right. \\
x1
\end{array}\right.
$$

$$\mathrm{hord}(f,-0.8,-0.7,0.001) = -0.726632387$$

$$\mathrm{hord}(f,0.4,0.5,0.001) = 0.4409419587$$

$$\mathrm{hord}(f,1.1,1.2,0.001) = 1.177346521$$

$$\mathrm{hord}(f,0.2,0.3,0.001) = 0.2446943652$$

Как видим, результаты расчетов согласуются с предыдущими ответами.

2.2.4 Метод Ньютона (метод касательных)

Пусть найдено приближенное значение корня уравнения $f(x) = 0$, обозначим его x_n. Расчетная формула ***метода Ньютона*** для определения очередного приближения x_{n+1} может быть получена двумя способами.

Первый способ выражает геометрический смысл метода Ньютона и состоит в том, что вместо точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью OX, мы ищем точку пересечения с осью OX касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_n, f(x_n))$ как показано на рис. 2.6. Уравнение касательной имеет вид $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$.

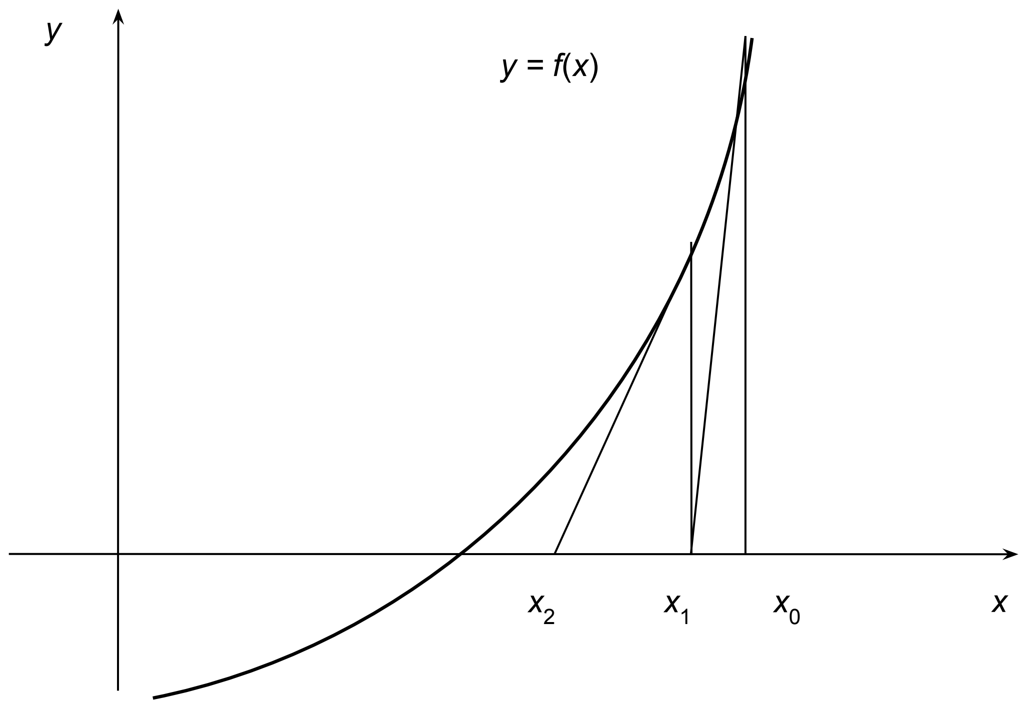

Рис. 2.7. Метод Ньютона (касательных)

В точке пересечения касательной с осью *OX* переменная $y = 0$. Приравнивая y нулю, выразим x и получим формулу ***метода касательных***:

$$(2.6)\quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

<u>Второй способ</u>. Разложим функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x = x_n$:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{f''(x_n)}{2!}(x - x_n)^2 + \ldots$$

Ограничимся линейными относительно $(x - x_n)$ слагаемыми, приравняем нулю $f(x)$ и, выразив из полученного уравнения неизвестное x и обозначив его через x_{n+1}, мы получим формулу (2.6).

Приведем достаточные условия сходимости метода Ньютона.

Теорема 2.4. Пусть на отрезке $[a, b]$ выполняются условия:

1) функция $f(x)$ и ее производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны;

2) производные $f'(x)$ и $f''(x)$ отличны от нуля и сохраняют определенные постоянные знаки;

3) $f(a)\cdot f(b)<0$ (функция меняет знак на отрезке).

Тогда существует отрезок $[\alpha, \beta]$ содержащий искомый корень уравнения $f(x)=0,$ на котором итерационная последовательность сходится. Если в качестве нулевого приближения x_0 выбрать ту граничную точку $[\alpha, \beta]$, в которой знак функции совпадает со знаком второй производной, т.е. $f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$, то итерационная последовательность сходится монотонно (рис.2.8).

Доказательство. Так как $f(x)$ непрерывна, меняет знак и монотонна на $[a, b]$, то $[a, b]$ — интервал изоляции корня. Обозначим искомый корень через $\overline{x}$.
Рассмотрим функцию $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ и найдем ее производную

$$\varphi'(x)=1-\frac{(f'(x))^2-f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}=\frac{f(x)\cdot f''(x)}{(f'(x))^2}$$

Итак, $\varphi'(x)$ непрерывна на $[a, b]$, обращается в нуль в точке $\overline{x}$, так как в этой точке обращается в нуль $f(x)$. Следовательно, существует такой отрезок $[\alpha, \beta]$ ($\overline{x}\in[\alpha, \beta]$), что $|\varphi'(x)|\le q<1$. Если возьмем ту часть отрезка, где $f(x)\cdot f''(x)>0$, то

$\varphi'(x) \geq 0$, следовательно, функция $\varphi(x)$ возрастающая, но тогда последовательность $\{x_n\}$ является монотонной.

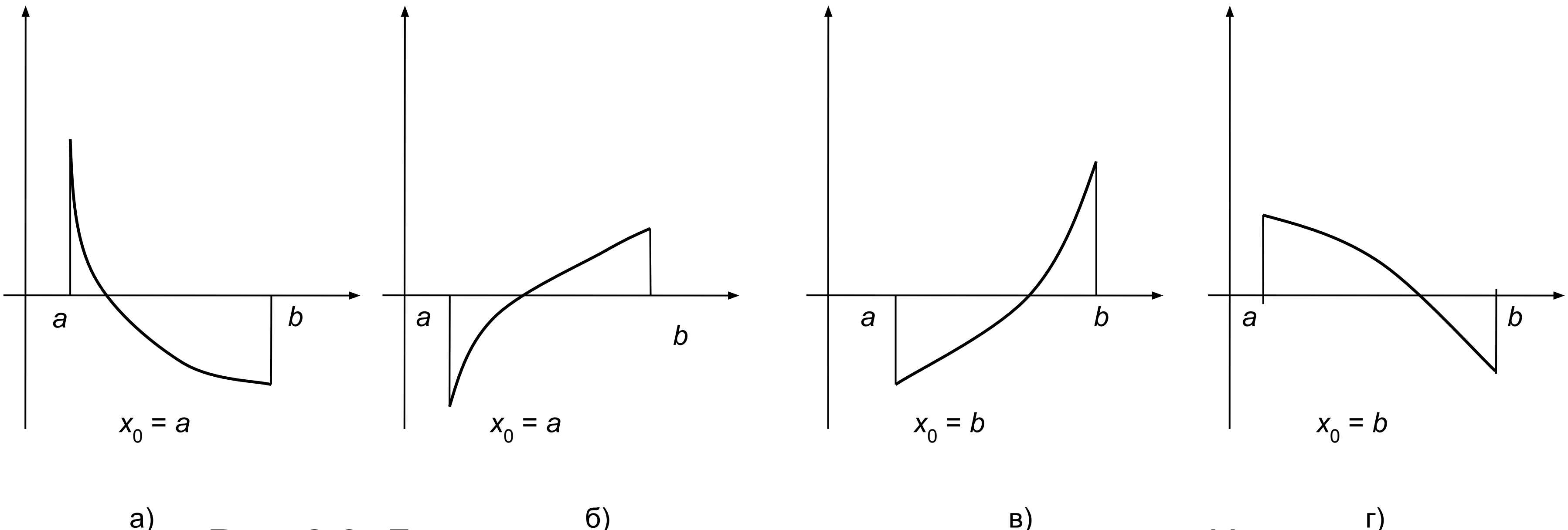

Рис. 2.8. Достаточные условия сходимости метода Ньютона

Замечание. Отметим, что метод хорд как раз идет с противоположной стороны, и оба этих метода т.о. могут друг друга дополнять, а возможен и комбинированный ***метод хорд-касательных***.

Пример 2.7. Уточнить до 0,000001 методом Ньютона корень уравнения *sin 5x* + x^2 – 1 = 0*.* За начальное значение принять x_0 = – 0,7.

Решение. Найдем производную $f'(x) = 5\cos 5x + 2x$.

В программе Excel введем расчетные формулы:

1) Введем формулы и обозначения в ячейках диапазона *A*1:*D*3 и скопируем вниз маркером заполнения ячейки с формулами: *B*3 — до *B*5, *C*2 — до *C*5, *D*2 — до *D*5;

Таблица 2.9

	A	B	C	D
1	k	x	f(x)	f'(x)
2	1	–0,7	=SIN(5*B2)+B2^2–1	=5*COS(5*B2)+2*B2
3	2	=B2–C2/D2		

Результаты расчетов приведены в таблице 2.10. Получено значение корня – 0,726631609 ≈ – 0,726632 с погрешностью 0,000001.

Таблица 2.10

	A	B	C	D	A
1	k	x	f(x)	f'(x)	
2	1	-0,7	-0,159216772	-6,082283436	
3	2	-0,726177138	-0,002664771	-5,865681044	0,026177138
4	3	-0,726631437	-1,00787E-06	-5,861240228	0,000454299
5	4	-0,726631609	-1,45328E-13	-5,861238543	1,71955E-07

2.2.5 Метод секущих

Метод секущих может быть получен из метода Ньютона при замене производной приближенным выражением — разностной формулой:

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})} \quad (2.7)$$

В формуле (2.7) используются два предыдущих приближения x_n и x_{n-1}. Поэтому при заданном начальном значении x_0 необходимо вычислить следующее приближение x_1 каким-нибудь методом, например, методом Ньютона с приближенной заменой производной по формуле

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n + \varepsilon) - f(x_n)}{\varepsilon}, \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)\cdot\varepsilon}{f(x_n + \varepsilon) - f(x_n)}$$

Алгоритм метода секущих:

1) Заданы начальное значение x_0 и погрешность ε. Вычислим $x_1 = x_0 - f(x_0)\varepsilon/(f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0))$;

2) Для n = 1, 2, … пока выполняется условие $|x_n - x_{n-1}| > \varepsilon$ вычисляем x_{n+1} по формуле (2.7):

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n)x_{n-1} - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

2.3 Системы нелинейных уравнений

Система n нелинейных уравнений с n неизвестными имеет вид

$$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad 1 \le k \le n. \qquad (2.8)$$

Систему двух нелинейных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x, y) = 0, \\ f_2(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (2.9)$$

можно решить приближенно графическим способом. Для этого достаточно преобразовать систему к виду

$$\begin{cases} y = y_1(x), \\ y = y_2(x), \end{cases} \qquad (2.10)$$

построить графики функций $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ и найти координаты точек пересечения графиков (рис. 2.9). При использовании электронных таблиц или математических пакетов решение можно уточнить графически, сужая отрезок $[a, b]$ около корня x_s.

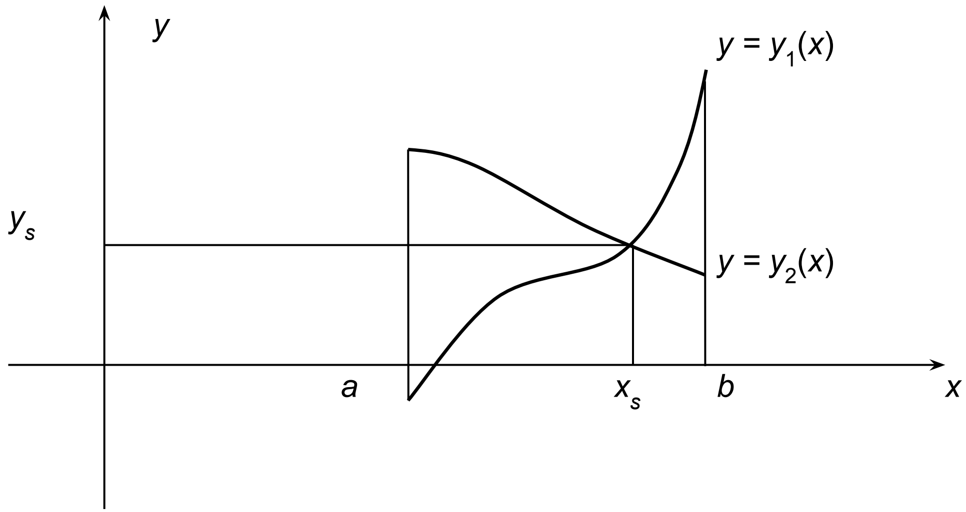

Рис. 2.9. Графическое решение системы двух уравнений

Пример 2.8. Решить графически систему двух уравнений

$$\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ \cos x - y = 0. \end{cases}$$

Решение. Сначала приведем алгоритм определения решения системы двух уравнений графическим методом:

1) Преобразуем систему $\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ \cos x - y = 0. \end{cases}$ к виду $\begin{cases} y = \sqrt{x}, \\ y = \cos x \end{cases}$.

2) Построим графики функций $y = \sqrt{x}$ и $y = \cos x$, подбирая отрезок [*a*, *b*] изменения переменной *x* так, чтобы графики пересекались.

3) Изменяя, т.е. уменьшая отрезок [a, b], уточняем решение (x_s, y_s).

Решение в программе *Excel*. Так как область определения функции $y = \sqrt{x}$ задается условием $x \geq 0$, выберем для построения графиков отрезок [0; 1] с шагом изменения 0,1. Если графики не будут пересекаться, то вместо отрезка [0; 1] возьмем отрезок [1; 2] и т.д.

1) В ячейки *A*2, *A*3 запишем соответственно 0 и 0,1; выделим диапазон *A*2:*A*3 и маркером заполнения протянем вниз до ячейки *A*12.

2) В ячейку *B*2 запишем формулу = корень(*A*2); выделим *B*2 и маркером заполнения протянем вниз до ячейки *B*12.

3) В ячейку *C*2 запишем формулу =cos (*A*2); выделим *C*2 и маркером заполнения протянем вниз до ячейки *C*12.

4) Выделим диапазон *A*2:*C*12 и построим диаграмму «Точечная». Графики, как видим, пересекаются. Проведем настройку диаграммы.

Щелкнем правой кнопкой мыши по диаграмме и выберем «параметры диаграммы», вкладку «Легенда» и снимем флажок с параметра «показать легенду».

Щелкнем правой кнопкой мыши по диаграмме и выберем «параметры диаграммы», вкладку «линии сетки», отметим «промежуточные линии» оси *X* и «промежуточные линии» оси *Y*.

Щелкнем правой кнопкой мыши по оси *X* диаграммы и выберем «формат оси», в появившемся окне выберем вкладку «Шкала» и введем «минимальное значение — 0», «максимальное значение — 1», «цена основных делений — 0,1», «цена промежуточных делений — 0,1».

Аналогично, для оси *Y* диаграммы выберем «цена основных делений — 0,1», «цена промежуточных делений — 0,1». Полученная диаграмма приведена на рис.2.10.

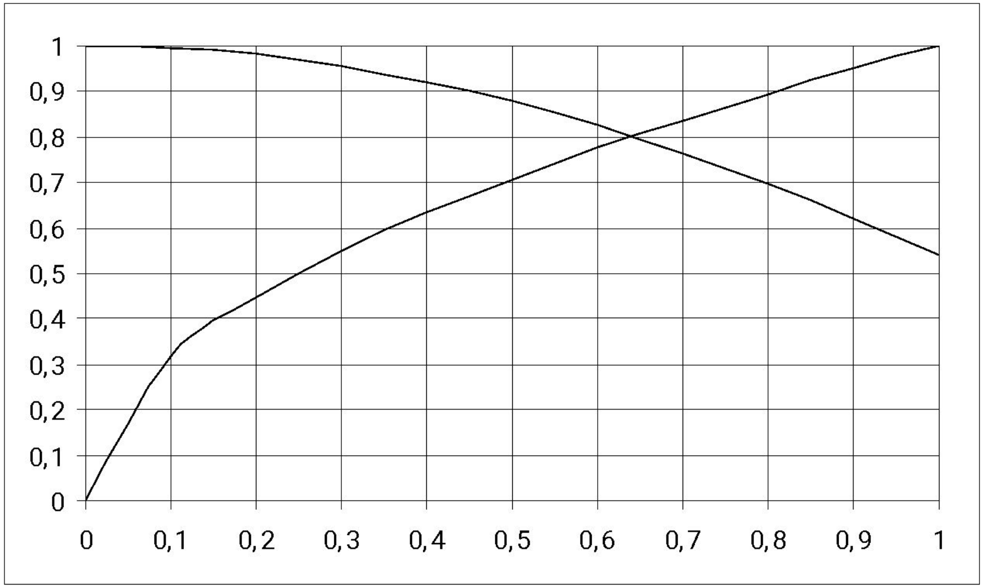

Рис.2.10. Графическое решение системы двух уравнений

5) На диаграмме увидим, что графики пересекаются между значениями $x = 0{,}6$ и $x = 0{,}7$. Заменим отрезок [0; 1] на отрезок [0,6; 0,7], для чего введем в ячейки *A*2, *A*3 числа 0,60 и 0,61, выделим диапазон *A*2:*A*3 и маркером заполнения протянем вниз до ячейки *A*12. Графики изменятся. Щелкнем правой кнопкой мыши по оси *X* диаграммы и выберем «формат оси», в появившемся окне выберем вкладку «Шкала» и введем «минимальное значение — 0,6», «максимальное значение — 0,7», «цена основных делений — 0,01», «цена промежуточных делений — 0,01». И для оси *Y* диаграммы внесем изменения: «цена основных делений — 0,01», «цена промежуточных делений — 0,01». Теперь мы увидим, что графики пересекаются между значениями $x = 0{,}64$ и $x = 0{,}65$.

6) Аналогичными действиями заменим отрезок [0,6; 0,7] на новый отрезок [0,64; 0,65] с шагом изменения 0,01. Получим $x \approx 0{,}641$; $y \approx 0{,}801$.

Процесс уточнения можно продолжать и дальше. Погрешность полученного решения составляет приблизительно 0,001 для обеих неизвестных.

Для уточнения решения (x_s, y_s) можно также применить метод итераций или метод Ньютона, которые рассматриваются ниже.

2.3.1 Метод итераций

Приведем систему (2.8) к виду, удобному для итераций

$$x_k = \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad 1 \le k \le n. \qquad (2.11)$$

Выберем начальное приближение к корню $(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и последующие приближения вычислим по формулам

$$x_k^{s+1} = \varphi_k(x_1^s, x_2^s, \ldots, x_n^s), \qquad 1 \le k \le n,\ s = 0, 1, 2, \ldots \qquad (2.12)$$

Приведем без доказательства достаточные условия сходимости метода итераций. Обозначим точное решение системы (2.8) $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Назовем ε-окрестностью точки $\bar{\boldsymbol{x}} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ множество точек $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяющих условиям $\|\bar{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}\| = \max_i |\bar{x}_i - x_i| \le \boldsymbol{\varepsilon}$

Теорема 2.5. Пусть в некоторой ε-окрестности точного решения $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ частные производные $\partial\varphi_k(x_1, \ldots, x_n)/\partial x_i$ существуют и удовлетворяют одному из трех неравенств

$$\sum_{i=1}^{n} M_{ki} < 1, \qquad \sum_{k=1}^{n} M_{ki} < 1, \qquad \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} M_{ki}^2 < 1. \qquad (2.13)$$

где $M_{ki} = \max |\partial\varphi_k(x_1, \ldots, x_n)/\partial x_i|$. Если начальное приближение $\boldsymbol{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ принадлежит ε-окрестности точного решения, то метод простой итерации (2.12) сходится к точному решению.

2.3.2 Метод Ньютона

Строгие формулировки теорем об условиях сходимости метода Ньютона достаточно громоздки, на практике часто ограничиваются следующим рассуждением.

Пусть для системы нелинейных уравнений

$f_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad 1 \le k \le n,$

в некоторой ε-окрестности точного решения не равен нулю определитель матрицы частных производных (матрицы Якоби):

$$\det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \neq 0$$

Тогда существует начальное приближение $\boldsymbol{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, принадлежащее ε-окрестности точного решения (достаточно близкое к точному решению), что метод Ньютона сходится к точному решению.

$$x^{k+1} = x^k - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x^k)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x^k)}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n(x^k)}{\partial x_n} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x^k) \\ f_2(x^k) \\ \cdots \\ f_n(x^k) \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots \qquad (2.14)$$

Пример 2.10. Решить методом Ньютона систему нелинейных уравнений из примера 2.7

$$\begin{cases} x - y^2 = 0, \\ \cos x - y = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем определитель матрицы Якоби:

$$f_1(x, y) = x - y^2; \; f_2(x, y) = \cos x - y;$$

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -\sin x & -1 \end{pmatrix} = -1 - 2y\sin x.$$

Очевидно, что в некоторой окрестности точки (0,641; 0,801) определитель матрицы Якоби не равен нулю. Найдем матрицу, обратную к матрице Якоби:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2y \\ -\sin x & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-1-2y\sin x} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2y \\ \sin x & 1 \end{pmatrix}$$

Теперь для данной системы метод Ньютона можно записать в виде итерационных формул:

$$\begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + \frac{1}{1+2y^{(k)}\sin x^{(k)}} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2y^{(k)} \\ \sin x^{(k)} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^{(k)} - \left(y^{(k)}\right)^2 \\ \cos x^{(k)} - y^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

В следующей таблице приведены результаты расчетов по этим формулам с начальным приближением (0,5; 0,5):

k	x^k	y^k
0	0,5	0,5
1	0,586237906918075	0,836237906918075
2	0,642171611104366	0,802083615782865
3	0,641713916176861	0,801071121263283
4	0,641714370872886	0,801070765209299
5	0,641714370872883	0,801070765209218
6	0,641714370872883	0,801070765209218

Третий шаг итераций дает результаты, совпадающие до трех цифр с решением примера 2.7, а пятый и шестой шаги дают значения, совпадающие друг с другом точно. Это говорит о том, что достигнута максимальная точность. Эти результаты объясняются высокой скоростью сходимости метода Ньютона.

- Контрольные вопросы.
- 1. Как определяется понятие «корень уравнения»?
- 2. Какие уравнения называются алгебраическими?
- 3. Какие уравнения называются трансцендентными?
- 4. В чем заключается процедура отделения корней уравнения?
- 5. В чем суть аналитического метода отделения корней?
- 6. В чем суть графического метода отделения корней?
- 7. На какой теореме математического анализа основан алгоритм отделения корней уравнения?
- 8. Перечислите методы уточнения корней?
- 9. В чем суть метода половинного деления?
- 10. В чем суть метода простых итераций?
- 11. В чем суть метода Ньютона?
- 12. В чем суть метода секущих?
- 13. В чем суть метода хорд?
- 14. Как оценивается погрешность метода половинного деления?
- 15. Как оценивается погрешность метода итераций?

- 16. Как оценивается погрешность метода Ньютона?
- 17. Как оценивается погрешность метода хорд?
- 18. Как оценивается погрешность метода секущих?
- 19. Какими методами можно найти приближенной решение системы нелинейных уравнений?
- 20. В чем суть метода простых итераций для системы нелинейных уравнений?
- 21. В чем суть метода Ньютона для системы нелинейных уравнений?
- 22. В каких математических пакетах реализованы численные методы решения уравнений?
- 23. Можно ли приближенно решить уравнение в электронных таблицах?