Линейная алгебра и аналитическая геометрия
Семинар 25.11.2020 г.
Тема: Уравнение плоскости и прямой в пространстве

ФИО преподавателя:Казанцева Е. А.
e-mail:kanele19@gmail.com

1. ***Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору***

Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\overline{n} = \{A, B, C\}$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

2. ***Уравнение плоскости в «отрезках»***

Если плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz в точках $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$ соответственно, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где $a \neq 0$; $b \neq 0$; $c \neq 0$.

3. ***Уравнение плоскости по трем точкам***

Если плоскость проходит через точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ $(i = \overline{1, 3})$, не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Рассмотрим простейшие задачи.

1. Величина угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos\varphi = \cos(n_1, n_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \qquad (8.8)$$

где $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ - нормальные векторы данных плоскостей.

8. С помощью формулы (8.8) можно получить *условие перпендикулярности* данных *плоскостей*:

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3. Условие параллельности рассматриваемых *плоскостей,* имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

4. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением (8.1) вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

<u>Пример</u>

Составить уравнение плоскости по точке $M(-1;2;-3)$ и векторам $\overline{p}_1(4;3;2), \overline{p}_2(-5;7;1)$.

Решение: Составим уравнение плоскости по точке и двум неколлинеарным векторам:

$$\begin{vmatrix} x-(-1) & 4 & -5 \\ y-2 & 3 & 7 \\ z-(-3) & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + (z+3)\cdot\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 0$$

Раскрываем определители второго порядка:

$$(x+1)\cdot(3-14)-(y-2)\cdot(4+10)+(z+3)\cdot(28+15)=0$$

$$-11\cdot(x+1)-14\cdot(y-2)+43\cdot(z+3)=0$$

На первом месте у нас находится знак «минус». Хорошим тоном считается убрать наглеца, в этих целях меняем знак у каждого слагаемого. Проводим дальнейшие упрощения и получаем уравнение плоскости:

$$11\cdot(x+1)+14\cdot(y-2)-43\cdot(z+3)=0$$

$$11x+11+14y-28-43z-129=0$$

$$11x+14y-43z-146=0$$

Сократить здесь ничего нельзя, поэтому:

Ответ: $11x+14y-43z-146=0$

<u>Пример</u>

Составить уравнение плоскости по точкам $M_0(1;-2;0), M_1(2;0;-1), M_2(0;-1;2)$.

Решение: составим уравнение плоскости по трём точкам. Используем формулу:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2-1 & 0-1 \\ y-(-2) & 0-(-2) & -1-(-2) \\ z-0 & -1-0 & 2-0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+2 & 2 & 1 \\ z & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

Вот теперь и аналитически видно, что всё дело свелось к координатам двух векторов. Раскрываем определитель по первому столбцу, находим уравнение плоскости:

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - (y+2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + z\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(4+1)(x-1)-(2-1)(y+2)+(1+2)z=0$$

$$5(x-1)-(y+2)+3z=0$$

$$5x-5-y-2+3z=0$$

$$5x-y+3z-7=0$$

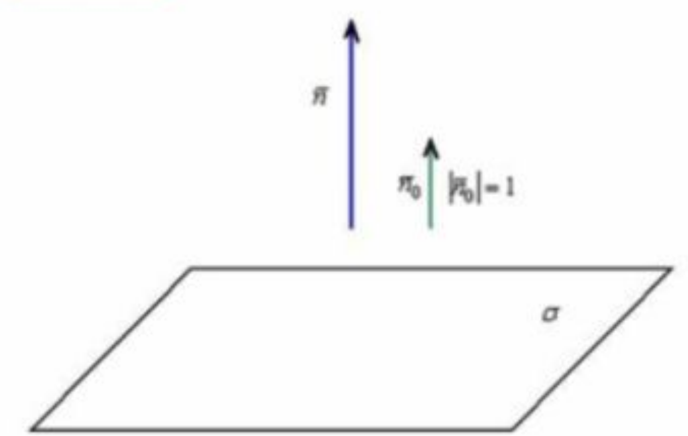
Больше ничего упростить нельзя, записываем:

Ответ: $5x-y+3z-7=0$

Пример

Найти единичный нормальный вектор плоскости $2x-3y+5z+7=0$.

Решение: Единичный вектор – это вектор, длина которого равна единице. Обозначим данный вектор через $\vec{n}_0$. Совершенно понятно, что векторы $\vec{n}$ и $\vec{n}_0$ коллинеарны:



Сначала из уравнения плоскости вектор нормали: $\vec{n}(A;B;C)=\vec{n}(2;-3;5)$.

Как найти единичный вектор? **Для того чтобы найти единичный вектор** $\vec{n}_0$**, нужно** <u>**каждую**</u> **координату вектора** $\vec{n}$ **разделить на длину вектора** $\vec{n}$.

Перепишем вектор нормали в виде $\vec{n}=2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}$ и найдём его длину:

$$|\vec{n}|=\sqrt{2^2+(-3)^2+5^2}=\sqrt{4+9+25}=\sqrt{38}$$

Согласно вышесказанному:

$$\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{2\vec{i}-3\vec{j}+5\vec{k}}{\sqrt{38}}=\frac{2}{\sqrt{38}}\vec{i}-\frac{3}{\sqrt{38}}\vec{j}+\frac{5}{\sqrt{38}}\vec{k}$$

Ответ: $\vec{n}_0\left(\frac{2}{\sqrt{38}};-\frac{3}{\sqrt{38}};\frac{5}{\sqrt{38}}\right)$

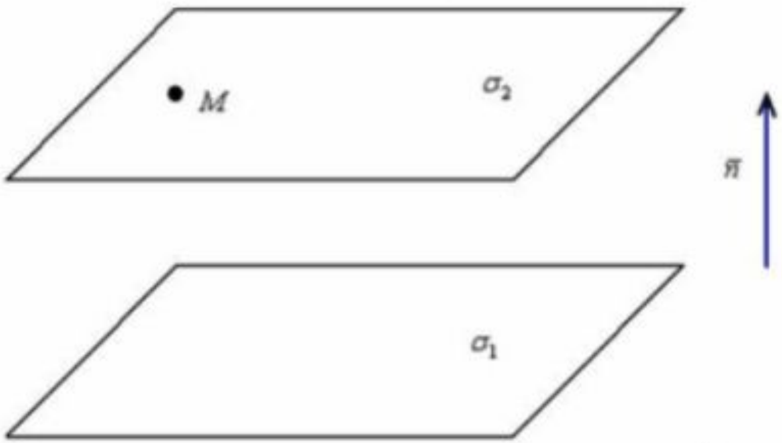
Проверка: $|\vec{n}_0|=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{38}}\right)^2+\left(-\frac{3}{\sqrt{38}}\right)^2+\left(\frac{5}{\sqrt{38}}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{38}+\frac{9}{38}+\frac{25}{38}}=\sqrt{\frac{38}{38}}=\sqrt{1}=1$, что и требовалось проверить.

Задача

Построить плоскость, проходящую через точку $M(2;8;-5)$ параллельно плоскости $3x+y-4z-11=0$.

Решение: Обозначим известную плоскость через $\sigma_1: 3x+y-4z-11=0$. По условию требуется найти плоскость σ_2, которая параллельна плоскости σ_1 и проходит через точку M.

Выполним схематический чертёж, который поможет быстрее разобраться в условии и понять алгоритм решения:



У параллельных плоскостей один и тот же вектор нормали.:

1) Из уравнения $\sigma_1: 3x+y-4z-11=0$ найдём вектор нормали плоскости: $\vec{n}(3;1;-4)$.

2) Уравнение плоскости σ_2 составим по точке $M(2;8;-5)$ и вектору нормали $\vec{n}(3;1;-4)$:

$$3\cdot(x-2)+1\cdot(y-8)-4\cdot(z-(-5))=0$$

$$3(x-2)+(y-8)-4(z+5)=0$$

$$3x-6+y-8-4z-20=0$$

$$3x+y-4z-34=0$$

Ответ: $\sigma_2: 3x+y-4z-34=0$

Взаимное расположение плоскостей

Параллельные плоскости

Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных x, y и z пропорциональны: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, но $D_2 \neq \lambda D_1$.

$$\sigma_1: 3x + y - 4z - 11 = 0$$

$$\sigma_2: 3x + y - 4z - 34 = 0$$

Комментарии, думаю, излишни, всё прекрасно видно. Составим систему:

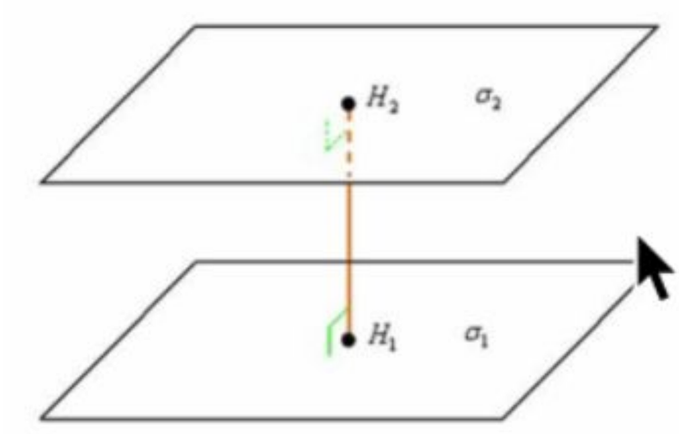
$$\begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 = \lambda C_1 \\ D_2 = \lambda D_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = \lambda \cdot 3 \\ 1 = \lambda \cdot 1 \\ -4 = \lambda \cdot (-4) \\ -34 = \lambda \cdot (-11) \end{cases}$$

Из первых трех уравнений следует, что $\lambda = 1$, а из четвёртого уравнения следует, что $\lambda = \frac{34}{11}$, значит, система несовместна. Но коэффициенты при переменных x, y и z пропорциональны, следовательно, плоскости параллельны.

Как найти расстояние между плоскостями?

Расстояние между двумя параллельными плоскостями $\sigma_1 : Ax+By+Cz+D_1=0$, $\sigma_2 : Ax+By+Cz+D_2=0$ выражается формулой:

$$\rho(\sigma_1;\ \sigma_2)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$



Координаты точек H_1, H_2 нам неизвестны, да их и не нужно знать, поскольку перпендикуляр между плоскостями можно протянуть в любом месте.
Найдём расстояние между параллельными плоскостями Примера № 8:

<u>Пример 10</u>

Найти расстояние между параллельными плоскостями $\sigma_1 : 3x+y-4z-11=0$, $\sigma_2 : 3x+y-4z-34=0$.

Решение: Используем формулу:

$$\rho(\sigma_1;\ \sigma_2)=\frac{|D_2-D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-34-(-11)|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}}=\frac{|-34+11|}{\sqrt{9+1+16}}=\frac{|-23|}{\sqrt{26}}=\frac{23\sqrt{26}}{26}$$

Ответ: $\rho(\sigma_1;\ \sigma_2)=\frac{23\sqrt{26}}{26}$ ед. $\approx 4{,}51$ ед.

$\sigma_1: Ax + By + Cz + D_1 = 0$

У многих наверняка возник вопрос: вот у этих плоскостей $\sigma_2: Ax + By + Cz + D_2 = 0$ – первые три коэффициенты одинаковы, но это же не всегда так! Да, не всегда.

<u>Пример</u>

Найти расстояние между параллельными плоскостями $\sigma_1: 2x - 5y + 6z + 15 = 0$, $\sigma_2: 4x - 10y + 12z + 43 = 0$

Проверим пропорциональность коэффициентов: $\frac{4}{2} = \frac{-10}{-5} = \frac{12}{6} = 2$, но $\frac{D_2}{D_1} = \frac{43}{15} \neq 2$, значит, плоскости действительно параллельны. Первые три коэффициента пропорциональны, но не совпадают. Однако формула-то $\rho(\sigma_1; \sigma_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ предусмотрена для совпадающих коэффициентов!

Есть два пути решения:

1) Найдём какую-нибудь точку, принадлежащую любой из плоскостей. Например, рассмотрим плоскость $\sigma_1: 2x - 5y + 6z + 15 = 0$. Чтобы найти точку, проще всего обнулить две координаты. Обнулим «икс» и «зет», тогда: $-5y + 15 = 0 \Rightarrow y = 3$.

Таким образом, точка $M(0; 3; 0)$ принадлежит данной плоскости. Теперь можно использовать формулу расстояния от точки до плоскости $\rho(M; \sigma_2)$, рассмотренную в предыдущем разделе.

2) Второй способ связан с небольшим трюком, который нужно применить, чтобы таки использовать формулу

$$\rho(\sigma_1; \sigma_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}!$$

Решение: *Разделим все коэффициенты второго уравнения на два:*

$$\sigma_1: 2x - 5y + 6z + 15 = 0$$

$$\sigma_2: 2x - 5y + 6z + \frac{43}{2} = 0$$

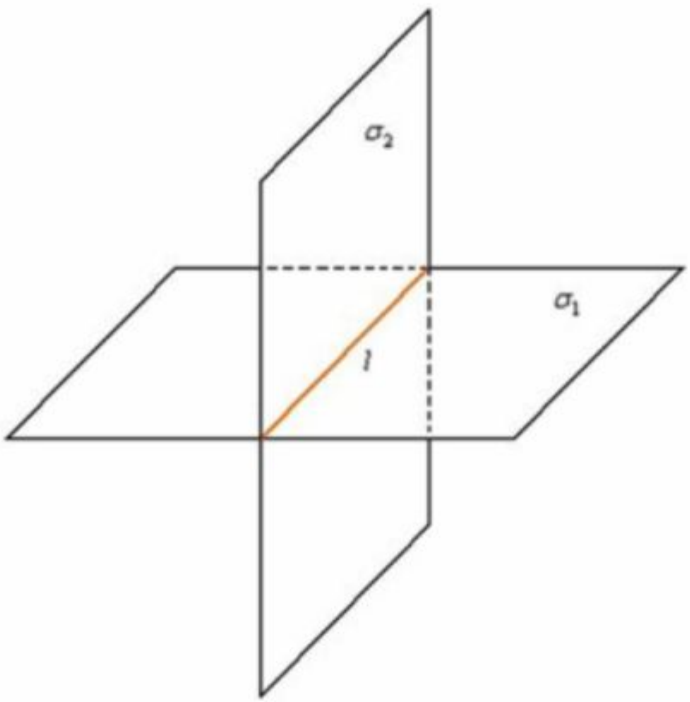
Используем формулу

$$\rho(\sigma_1; \sigma_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{\left|\frac{43}{2} - 15\right|}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 6^2}} = \frac{\left|\frac{13}{2}\right|}{\sqrt{4 + 25 + 36}} = \frac{13}{2\sqrt{65}} = \frac{13\sqrt{65}}{130} = \frac{\sqrt{65}}{10}$$

Ответ: $\rho(\sigma_1; \sigma_2) = \frac{\sqrt{65}}{10}$ *ед.* $\approx 0{,}81$ *ед.*

Пересекающиеся плоскости

Третий, самый распространённый случай, когда две плоскости пересекаются по некоторой прямой $l = \sigma_1 \cap \sigma_2$:



Две плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда их коэффициенты при переменных x, y и z **НЕ пропорциональны**, то есть НЕ существует такого значения «лямбда», чтобы выполнялись равенства $A_2 = \lambda A_1, \quad B_2 = \lambda B_1, \quad C_2 = \lambda C_1$

Сразу отмечу важный факт: **Если плоскости пересекаются, то система линейных уравнений** $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ **задаёт прямую в пространстве.**

В качестве примера рассмотрим плоскости $\begin{matrix} \sigma_1: x+4y-3z+1=0 \\ \sigma_2: x+4y-9z+1=0 \end{matrix}$. Составим систему для соответствующих коэффициентов:

$$\begin{cases} A_2 = \lambda A_1 \\ B_2 = \lambda B_1 \\ C_2 = \lambda C_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \cdot 1 \\ 4 = \lambda \cdot 4 \\ -9 = \lambda \cdot (-3) \end{cases}$$

Из первых двух уравнений следует, что $\lambda = 1$, но из третьего уравнения следует, что $\lambda = 3$, значит, **система несовместна**, и плоскости пересекаются.

Проверку можно выполнить «по пижонски» одной строкой:

$$\frac{1}{1} = \frac{4}{4} \neq \frac{-9}{-3}$$

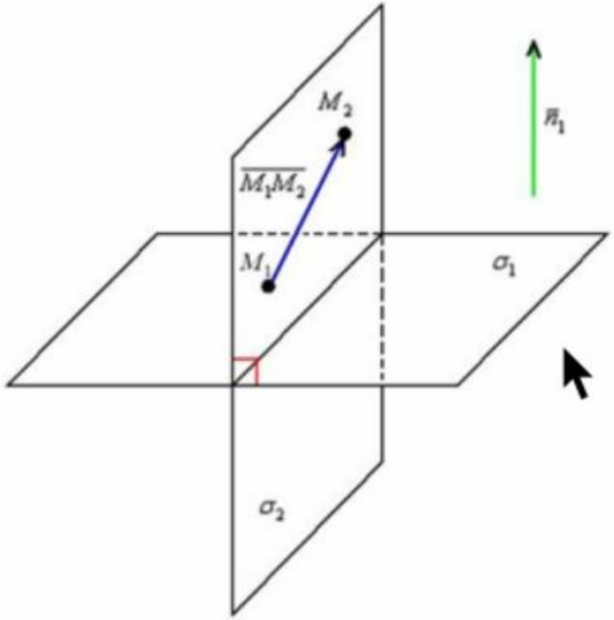
Параллельные плоскости мы уже разобрали, теперь поговорим о перпендикулярных плоскостях. Очевидно, что к любой плоскости можно провести бесконечно много перпендикулярных плоскостей, а для того, чтобы зафиксировать конкретную перпендикулярную плоскость, нужно задать две точки:

Пример

Дана плоскость $\sigma_1: x - y + z + 5 = 0$. Построить плоскость σ_2, перпендикулярную данной и проходящую через точки $M_1(2; 1; -3), M_2(1; 0; 5)$.

Решение: Начинаем анализировать условие. Что мы знаем о плоскости σ_2? Известны две точки. Можно найти вектор $\overline{M_1M_2}$, параллельный данной плоскости. Но этого мало, нужен ещё один. Так как плоскости должны быть перпендикулярны, то вторым вектором следует взять нормальный вектор плоскости σ_1.

Проводить подобные рассуждения помогает схематический чертёж:



Для лучшего понимания задачи отложите вектор нормали $\vec{n}_1$ от точки M_1 в плоскости σ_2.

Кстати, теперь чётко видно, почему одна точка не определит перпендикулярную плоскость – вокруг единственной точки будет «вращаться» бесконечно много перпендикулярных плоскостей. Так же нас не устроит и единственный вектор (без всяких точек). Вектор является свободным и «наштампует» нам бесконечно много перпендикулярных плоскостей (которые, к слову, будут параллельны между собой). В этой связи минимальную жёсткую конструкцию обеспечивают две точки.

Задача разобрана, решаем:

1) Найдём вектор $\overline{M_1M_2} = (1-2; 0-1; 5-(-3)) = (-1; -1; 8)$.

2) Из уравнения $\sigma_1 : x - y + z + 5 = 0$ найдем вектор нормали: $\overline{n}_1(1; -1; 1)$.

3) Уравнение плоскости σ_2 составим по точке $M_2(1; 0; 5)$ (можно было взять и M_1) и двум неколлинеарным векторам $\overline{M_1M_2}(-1; -1; 8), \overline{n}_1(1; -1; 1)$:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 1 \\ y-0 & -1 & -1 \\ z-5 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} - y\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} + (z-5)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1+8)(x-1) - (-1-8)y + (1+1)(z-5) = 0$$

$$7(x-1) + 9y + 2(z-5) = 0$$

$$7x - 7 + 9y + 2z - 10 = 0$$

Ответ: $\sigma_2 : 7x + 9y + 2z - 17 = 0$

Проверка состоит из двух этапов:

1) Проверяем, действительно ли плоскости будут перпендикулярны. Если две плоскости перпендикулярны, то их векторы нормали будут ортогональны. Логично. Из полученного уравнения $\sigma_2 : 7x + 9y + 2z - 17 = 0$ снимаем вектор нормали $\overline{n}_2(7; 9; 2)$ и рассчитываем скалярное произведение векторов:

$$\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 1\cdot 7 - 1\cdot 9 + 1\cdot 2 = 7 - 9 + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2$$

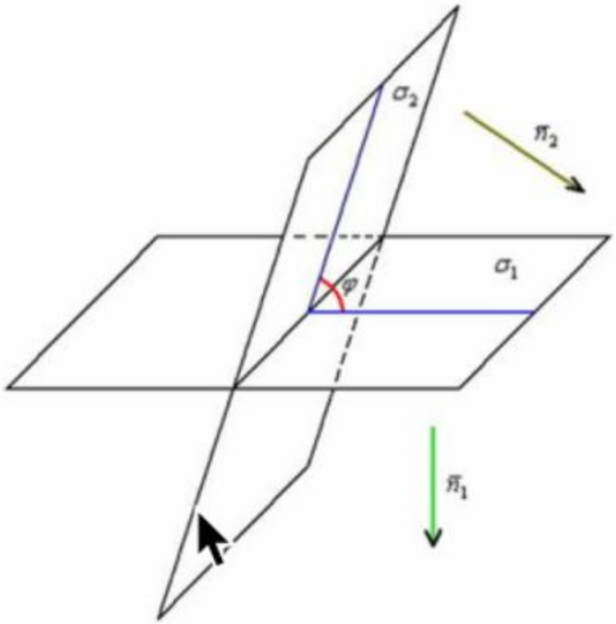
Таким образом, $\sigma_1 \perp \sigma_2$

2) В уравнение плоскости $\sigma_2 : 7x + 9y + 2z - 17 = 0$ подставляем координаты точек $M_1(2; 1; -3), M_2(1; 0; 5)$. Обе точки должны «подойти».

Как найти угол между плоскостями?

Две пересекающиеся плоскости $\sigma_1: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\sigma_2: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ образуют четыре двухгранных угла и любой из этих углов называют углом между плоскостями.

Обозначим угол между плоскостями через $\varphi = \angle(\sigma_1; \sigma_2)$:



Наклон плоскости однозначно определяется её вектором нормали, поэтому **угол между плоскостями можно найти через угол между нормальными векторами данных плоскостей**. А угол между векторами рассчитывается с помощью обыденной формулы:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

Распишем формулу в коэффициентах:

$$\cos\varphi = \frac{A_1 \cdot A_2 + B_1 \cdot B_2 + C_1 \cdot C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

Пример

$$\sigma_1 : 5y - z - 3 = 0$$

Найти угол между плоскостями $\sigma_2 : 4x + z = 0$

Решение: *Обозначим* $\varphi = \angle(\sigma_1; \sigma_2)$. *Используем формулу:*

$$\cos\varphi = \frac{0\cdot 4 + 5\cdot 0 - 1\cdot 1}{\sqrt{0^2+5^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{4^2+0^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{442}}$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{442}}\right) \approx 1{,}62\ рад \approx 93^\circ$$

За угол между плоскостями примем острый угол: $\pi - \varphi = \pi - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{442}}\right) \approx 1{,}52\ рад \approx 87^\circ$

Ответ:

$$\pi - \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{442}}\right) \approx 1{,}52\ рад. \approx 87^\circ$$

Задача На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $A(9, -2, 2)$ и от плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

Решение. Пусть $M(x, 0, 0)$ - искомая точка ($y = 0$, $z = 0$, так как точка лежит на оси Ox). Находим расстояние от этой точки до данной плоскости и от точки A:

$$d_1 = \frac{|3 \cdot x - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{|3x - 3|}{7};$$

$$d_2 = MA = \sqrt{(9 - x)^2 + (-2)^2 + 2^2}.$$

В соответствии с условием имеем $d_1 = d_2$, поэтому

$$\sqrt{(9 - x)^2 + 8} = \frac{|3x - 3|}{7} \text{ или } 7\sqrt{x^2 - 18x + 89} = 3|x - 1|.$$

Возведя в квадрат обе части последнего уравнения и приводя подобные члены, получим

$$5x^2 - 108x + 544 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим $x_1 = 8$, $x_2 = 13{,}6$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(8, 0, 0)$ и $M_2(13{,}6; 0; 0)$.

Ответ. $M_1(8, 0, 0)$ и $M_2(13{,}6; 0; 0)$.

Задача Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $4x-4y+2z-3=0$ и отстоящей от нее на 5 единиц.

Решение. Уравнение искомой плоскости запишем так:

$4x-4y+2z+D=0$.

Найдем расстояние между плоскостями, для чего возьмем произвольную точку первой плоскости и определим ее расстояние до второй. Положив $x=0$, $y=0$, из уравнения $4x-4y+2z-3=0$ найдем $z=\frac{3}{2}$; получим точку $M\left(0,0,\frac{3}{2}\right)$. Расстояние этой точки до плоскости $4x-4y+2z+D=0$ определяется формулой

$$d=\frac{\left|4\cdot 0-4\cdot 0+2\cdot\frac{3}{2}+D\right|}{\sqrt{16+16+4}}=\frac{|3+D|}{6}.$$

Так как по условию $d=5$, то для определения D имеем уравнение

$$5=\frac{|3+D|}{6} \text{ или } 30=\pm(3+D),$$

откуда

$D_1=27$, $D_2=-33$.

Подставляя в искомое уравнение найденные значения D получим две плоскости

$4x-4y+2z+27=0$ и $4x-4y+2z-33=0$.

Ответ. $4x-4y+2z+27=0$ и $4x-4y+2z-33=0$.

Прямая в пространстве

В зависимости от способа задания прямой в пространстве можн рассматривать различные ее уравнения.

Параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$$

которые называются параметрическими уравнениям и прямой.

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}.$$

Зная одно из уравнений , легко получить другие уравнения.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Общее уравнение прямой в пространстве

Две пересекающиеся плоскости

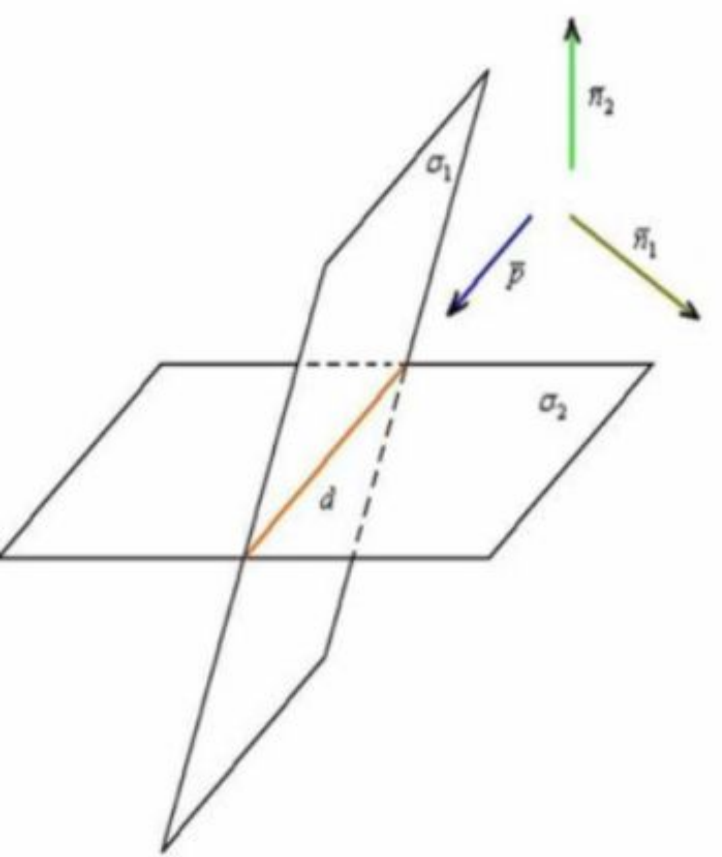
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1Z + D_1 = 0, & \overline{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \\ A_2x + B_2y + C_2Z + D_2 = 0, & \overline{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}. \end{cases}$$

где $\overline{n}_1 \nparallel \overline{n}_2$, определяют прямую. Уравнение называются *общим уравнением прямой в пространстве*.

Направляющий вектор $\overline{s}$ прямой, заданной уравнениями определяется по формуле

$$\overline{s} = \overline{n}_1 \times \overline{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

а координаты какой-либо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой прямой, можно найти как решение системы . Тогда уравнения данной прямой можно записать в канонической форме .



Направляющий вектор нашей прямой ортогонален нормальным векторам плоскостей. А если $\bar{p} \perp \bar{n}_1$ и $\bar{p} \perp \bar{n}_2$, то вектор «пэ» найдём как **векторное произведение** векторов нормали: $\bar{p} = [\bar{n}_1 \times \bar{n}_2]$.

Из уравнений плоскостей $\sigma_1: 2x - y + 3z + 4 = 0$, $\sigma_1: x + 5y - 3z - 7 = 0$ находим их векторы нормали:

$\bar{n}_1(2; -1; 3), \bar{n}_2(1; 5; -3)$

И находим направляющий вектор прямой:

$$\bar{p} = [\bar{n}_1 \times \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$= (3-15) \cdot \bar{i} - (-6-3) \cdot \bar{j} + (10+1) \cdot \bar{k} = -12\bar{i} + 9\bar{j} + 11\bar{k}$$

3) Составим канонические уравнения прямой по точке $M(1; 0; -2)$ и направляющему вектору $\bar{p} = -12\bar{i} + 9\bar{j} + 11\bar{k}$:

$$\frac{x-1}{-12} = \frac{y-0}{9} = \frac{z-(-2)}{11}$$

Ответ: $d: \dfrac{x-1}{-12} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z+2}{11}$

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве или скрещивающиеся, или пересекаются, или параллельные, или совпадают. В любом случае они образуют некоторый угол (между их направляющими векторами $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$). Если прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1} \text{ и } \frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2},$$

то величина угла φ между ними определяется из формулы

$$\cos\varphi=(\widehat{\bar{s}_1,\bar{s}_2})=\frac{\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2}{|\bar{s}_1||\bar{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности прямых:

$\bar{s}_1\cdot\bar{s}_2=0$ или $m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0$.

Условие параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}.$$

Необходимое и достаточное условие пересечения непараллельных прямых ($\bar{s}_1 \nparallel \bar{s}_2$), заданных уравнениями :

$$\overline{M_1M_2}\cdot\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2=0 \text{ или } \begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix}=0.$$

Если условие не выполняется, то прямые – скрещивающиеся.

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой , проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\bar{s}=\{m, n, p\}$, вычисляется по формуле

$$d=\frac{|\bar{s}\cdot\overline{M_0M_1}|}{|\bar{s}|}.$$

Пример

Составить параметрические уравнения следующих прямых:

а) $\frac{x}{8}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{-1}$

б) $y+1=0;\quad z-5=0$

в) Прямая проходит через точки $A(1;\,3;\,3)$, $B(3;\,-3;\,3)$

Пример ***Решения и ответы:***

а) $\begin{cases} x=8t \\ y=-2t+1 \\ z=-t \end{cases}$ *б)* $\begin{cases} x=t \\ y=-1 \\ z=5 \end{cases}$

в) Найдём направляющий вектор прямой: $\overline{AB}=(3-1;\,-3-3;\,3-3)=(2;\,-6;\,0)$. *Параметрические уравнения прямой составим по точке* $A(1;\,3;\,3)$ *(можно выбрать точку «бэ») и направляющему вектору* $\overline{AB}(2;\,-6;\,0)$:

$$\begin{cases} x=2t+1 \\ y=-6t+3 \\ z=3 \end{cases}$$

Пример

Записать канонические уравнения прямой $d:\begin{cases}2x-y+3z+4=0\\ x+5y-3z-7=0\end{cases}$

Решение: Чтобы составить канонические уравнения прямой, нужно знать точку и направляющий вектор. А у нас даны уравнения двух плоскостей...

1) Сначала найдём какую-либо точку, принадлежащую данной прямой. В системе уравнений нужно обнулить какую-нибудь координату. Пусть $y=0$, тогда получаем систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}2x+3z+4=0\\ x-3z-7=0\end{cases}$$

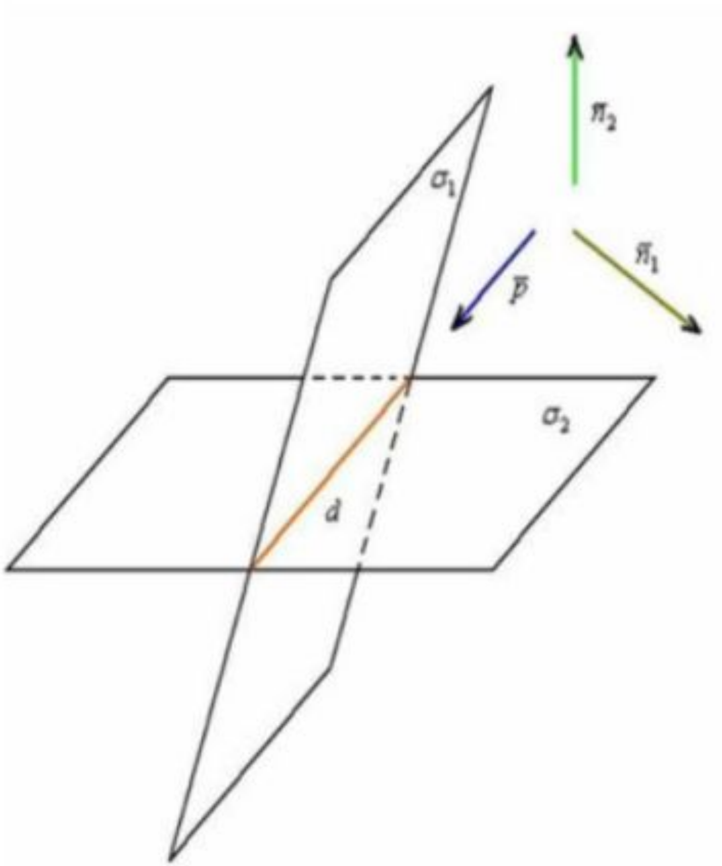
2) . Почленно складываем уравнения и находим решение системы:

$$\begin{cases}2x+3z+4=0\\ x-3z-7=0\end{cases}\Rightarrow 3x-3=0\Rightarrow x=1; z=-2$$

Таким образом, точка $M(1;0;-2)$ принадлежит данной прямой

Выполним проверку: подставим координаты точки $M(1;0;-2)$ в исходную систему уравнений: $\begin{cases}2\cdot1-0+3\cdot(-2)+4=0\\ 1+5\cdot0-3\cdot(-2)-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2-6+4=0\\ 1+6-7=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=0\\ 0=0\end{cases}$. Получены верные равенства, значит, действительно $M\in d$.

2) Как найти направляющий вектор прямой? Его нахождение наглядно демонстрирует следующий схематический чертёж:



Направляющий вектор нашей прямой ортогонален нормальным векторам плоскостей. А если $\overline{p} \perp \overline{n}_1$ и $\overline{p} \perp \overline{n}_2$, то вектор «пэ» найдём как **векторное произведение** векторов нормали: $\overline{p} = [\overline{n}_1 \times \overline{n}_2]$.

$$\sigma_1 : 2x - y + 3z + 4 = 0$$

Из уравнений плоскостей $\sigma_1 : x + 5y - 3z - 7 = 0$ находим их векторы нормали:

$\overline{n}_1(2; -1; 3), \overline{n}_2(1; 5; -3)$

И находим направляющий вектор прямой:

$$\overline{p} = [\overline{n}_1 \times \overline{n}_2] = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} \cdot \overline{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \cdot \overline{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot \overline{k} =$$

$$= (3 - 15) \cdot \overline{i} - (-6 - 3) \cdot \overline{j} + (10 + 1) \cdot \overline{k} = -12\overline{i} + 9\overline{j} + 11\overline{k}$$

3) Составим канонические уравнения прямой по точке $M(1; 0; -2)$ и направляющему вектору $\overline{p} = -12\overline{i} + 9\overline{j} + 11\overline{k}$:

$$\frac{x-1}{-12} = \frac{y-0}{9} = \frac{z-(-2)}{11}$$

Ответ: $d : \dfrac{x-1}{-12} = \dfrac{y}{9} = \dfrac{z+2}{11}$

Пример

Составить уравнения прямой, проходящей через точки $M_1(2; -3; 6), M_2(4; -3; -10)$.

Решение: Найдём направляющий вектор прямой:

$\overline{M_1M_2} = (4-2; -3-(-3); -10-6) = (2; 0; -16)$

Уравнения прямой составим по точке $M_1(2; -3; 6)$ (можно было выбрать точку M_2) и направляющему вектору $\overline{M_1M_2}(2; 0; -16)$:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{z-6}{-16}; \quad y-(-3)=0$$

Ответ: $\dfrac{x-2}{2} = \dfrac{z-6}{-16}; \quad y+3=0$

Задача Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(5, -1, -4)$ в каждом из следующих случаев:

1) прямая параллельна прямой $x = 3 + 6t$, $y = 2 - 4t$, $z = 7 - t$;
2) прямая параллельна оси Ox;
3) прямая перпендикулярна плоскости $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

Решение. 1) Так как прямая параллельна прямой $x = 3 + 6t$, $y = 2 - 4t$, $z = 7 - t$, то они имеют один и тот же направляющий вектор $\overline{a} = \{o, -4, -1\}$. Подставляя значения $x_0 = 5$, $y_0 = -1$, $z_0 = -4$ и координаты вектора $\overline{a}$ в формулы , получим параметрические уравнения прямой

$x = 5 + 6t$, $y = -1 - 4t$, $z = -4 - t$.