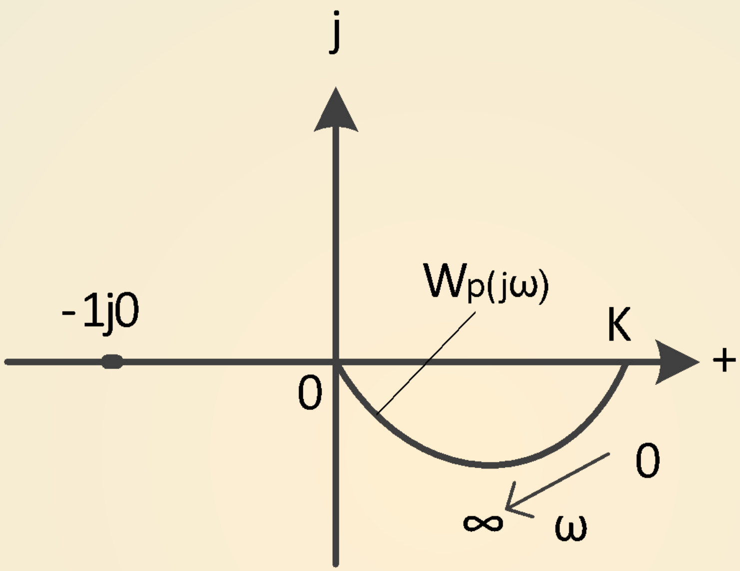
Критерий Найквиста

Лекция №12

Пример 1

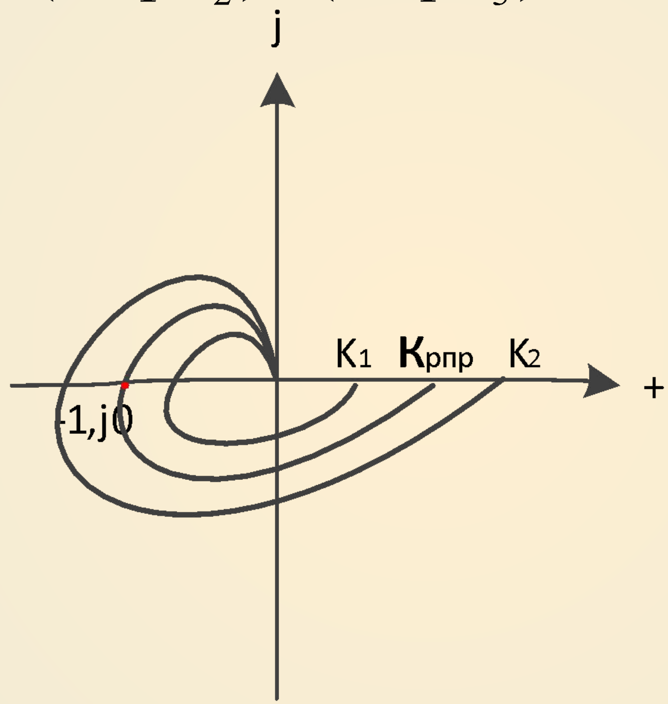
$$W_p(p) = \frac{k}{1 + pT}$$



Система всегда устойчива, так как при любых параметрах К,Т годограф $W_p(j\omega)$ не охватывает точку -1j0, при изменении частоты от нуля до бесконечности.

Пример 2

$$W_p(p) = \frac{k_p}{(1+pT_1)*(1+pT_2)*(1+pT_3)}$$



Система будет устойчива до определенного значения k.

Очевидно существует $К_{рпред}$, где система находится на границе устойчивости.

$К_р=К_{рпред}$,

В этом случае годограф пройдет через точку (-1,j0,) и система будет находиться на границе устойчивости.

$К_{рпред}$ можно найти из системы уравнений:

$$\begin{cases} \left|W_p(j\omega_\pi)\right| = 1 \\ \arg W_p(j\omega_\pi) = -\pi \end{cases}$$

Из второго уравнения находим ω_π, подставляем в первое и находим $К_{рпред}$.

2. САР неустойчива в разомкнутом виде

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} F(j\omega) = \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} H(j\omega) - \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} B(j\omega)$$

Предположим, что разомкнутая система имеет характеристический многочлен B(p) степени-n, причем m правых корней, (n-m) – левых. Для данного случая изменение аргумента:

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} B(j\omega) = (n-m) * \frac{\pi}{2} - m * \frac{\pi}{2} = (n-2m) * \frac{\pi}{2}$$

Нас интересует устойчивость системы в замкнутом состоянии. Для того что бы она была устойчива, необходимо и достаточно, что бы все корни H(p)=0 располагались в левой полуплоскости:

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} H(j\omega) = n * \frac{\pi}{2}$$

$$\Delta \arg_{0<\omega<\infty} F(j\omega) = n*\frac{\pi}{2} - (n-2m)*\frac{\pi}{2} = -2m*\frac{\pi}{2} = m*n = \frac{m}{2}*2\pi$$

САР неустойчивая в разомкнутом состоянии, будет устойчива в замкнутом, если годограф $W_p(j\omega)$ *охватывает в положительном направлении, точку с координатами -1,j0, m/2 раз при изменении* ω от нуля до бесконечности. *Где m – количество правых корней B(p)=0.*

Пример:

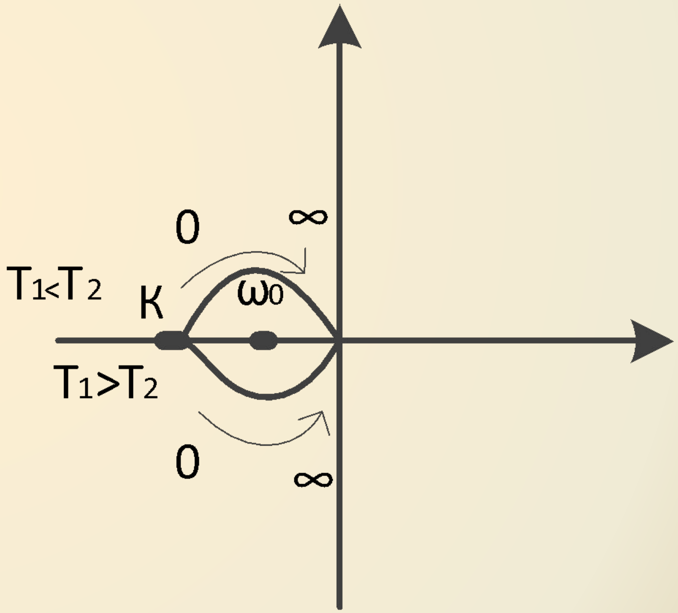
$$W_p(p) = \frac{K}{(-1 + PT_1)(1 + pT_2)}$$

Найти значение параметров К,Т1, Т2, при которых система будет устойчива в замкнутом состоянии.

$$B(p) = (-1 + pT_1)(1 + pT_2) = 0;$$

$$p_1 = 1/T_1;$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T_1)^2} * \sqrt{1 + (\omega T_2)^2}}$$



$$\phi(\omega) = -arctg\omega T_2 - (\pi - arctg\omega T_1)$$

Вывод: при T2>T1 годограф $W_p(j\omega)$ охватывает точку (-1,j0) в отрицательном направлении, значит САР в замкнутом состоянии будет неустойчива.

Если годограф начинается и заканчивается на участке вещественной оси, то будем иметь ½ охвата.

При T1>T2, годограф $W_p(j\omega)$ охватывает точку (-1,j0) 1/2 раза в положительном направлении.

½=1/2, значит САР в замкнутом состоянии устойчива.

Вывод: Если К>1 и T1>T2, то система будет устойчива в замкнутом состоянии.

3. САР в разомкнутом состоянии на границе устойчивости: $W_p(p) = \frac{A(p)}{B(p)*p^s}$

В общем виде:

где s –степень астатизма САР

Рассмотрим случай, при s=1:

$$W_p(p) = \frac{A(p)}{B(p)*p}$$

В данном случае принципы аргумента не работают, т.к он неприменим при Pi=0.

Для использования принципа необходимо произвести сдвиг нулевого корня либо в левую, либо в правую полуплоскость. И исходная функция ищется как предел вновь полученной функции.

Рассмотрим данный случай на следующем примере:

$$W_p(p) = \frac{K}{p(1+pT_1)*(1+pT_2)}$$

$p_1=0$; $p_2=-1/T_1$; $p_3=-1/T_2$;

Произведем сдвиг нулевого корня в левую полуплоскость, т.е.: $p_1=-\alpha$;

В этом случае вновь полученная передаточная функция будет иметь вид:

$$W_p'(p) = \frac{K}{(\alpha+p)*(1+pT_1)*(1+pT_2)}$$

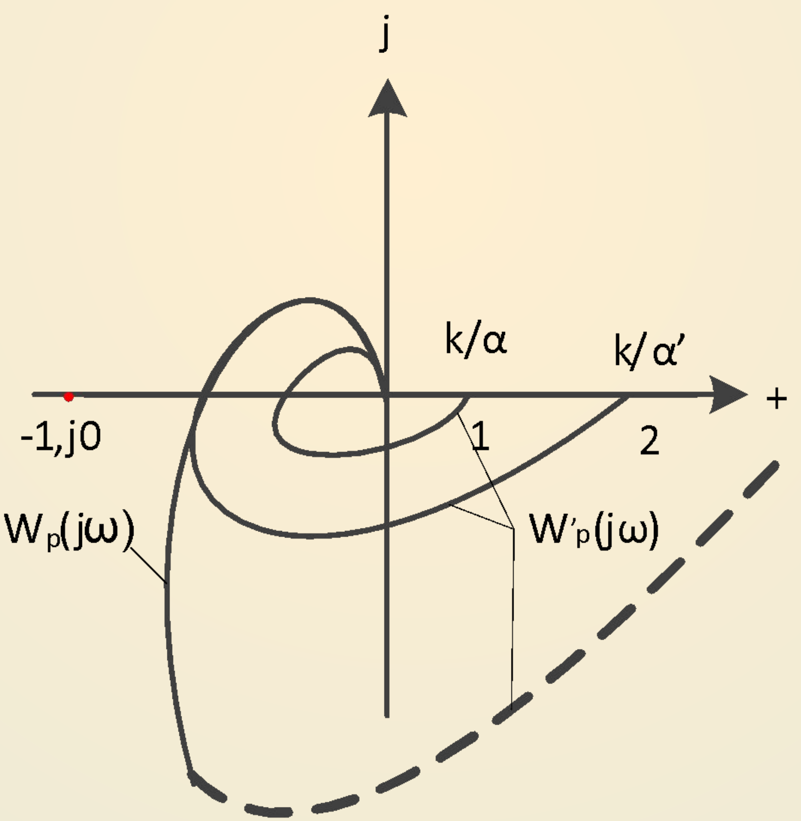
А $W_p(p)$ может быть получена в предельном переходе при α стремящейся к нулю.

$$W_p(p) = \lim_{a\to 0} W_p'(p)$$

Что бы перейти к стандартной форме нужно поделить числитель и знаменатель на α.

$$W_p'(p) = \frac{\frac{K}{\alpha}}{(1+\frac{p}{\alpha})*(1+pT_1)*(1+pT_2)};$$ где T'=1/ α.

В результате $W_p'(p)$ описывает статическую систему третьего порядка. Для такой системы годограф $W_p'(p)$ имеет вид:



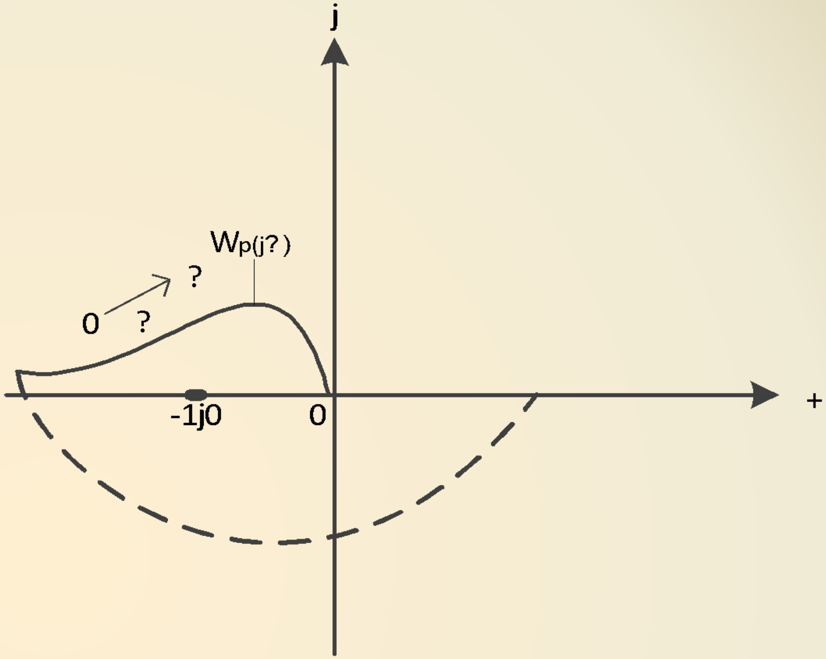
При уменьшении α годограф $W_p'(j\omega)$ будет начинаться правее предшествующего и следовательно годограф $W_p'(j\omega)$ будет совпадать с годографом $W_p(j\omega)$ практически на всех частотах, кроме низких частот. В пределе при $\alpha=0$ оба годографа будут отличаться только на частоте $\omega=0$ и совпадать на всех других частотах. Дополнив годограф $W_p(j\omega)$ дугой бесконечного радиуса на угол $\pi/2$ в положительном направлении, мы получим годограф $W_p'(j\omega)$. Таким образом для анализа устойчивости необходимо исходный годограф дополнить дугой бесконечного радиуса на угол $\pi/2$.

Формулировка

САР, имеющая нулевые корни(находящая на границе устойчивости в разомкнутом состоянии) будет устойчива в замкнутом, если годограф $W_p(j\omega)$, дополненный дугой бесконечного радиуса на угол $(s*\pi/2)$, не охватывает точку с координатами (-1j0), при изменении частоты от нуля до бесконечности.

Пример: $$W_p(p) = \frac{K}{p^2(1+pT)};$$

$$W_p(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^2(1+j\omega T)};$$



$$\nu = 2;$$

$$A(\omega) = \frac{K}{\omega^2\sqrt{1+(\omega T)^2}};$$

$$\varphi(\omega) = -\pi - arctg\omega T.$$

Дополненный годограф всегда охватывает точку (-1,j0), следовательно при любых параметрах системы она будет неустойчива в замкнутом состоянии.

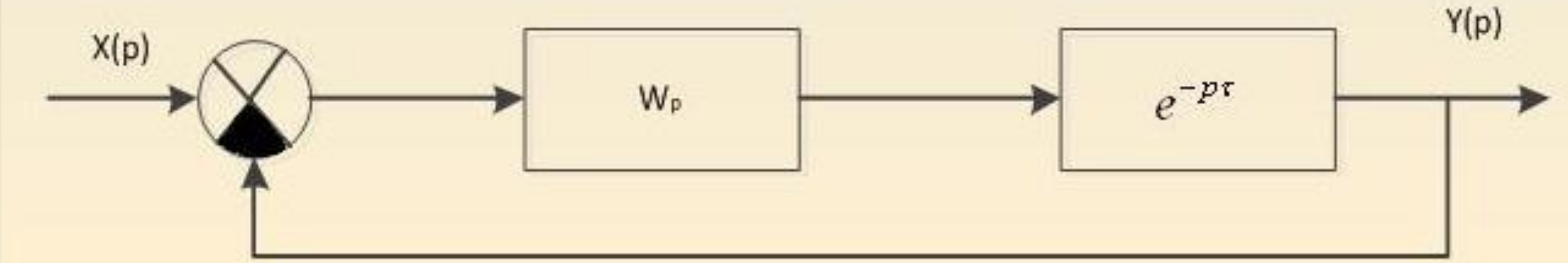
Анализ устойчивости САР с запаздыванием

$$Wp(p) = W_1(p) * e^{-p\tau} = \frac{A(p)}{B(p)} * e^{-p\tau}$$

$$H(p) = A(p) * e^{-p\tau} + B(p)$$

Алгебраические интерпретации для таких систем неприемлемы, однако частичные критерии, основанные на принципе аргумента можно использовать.

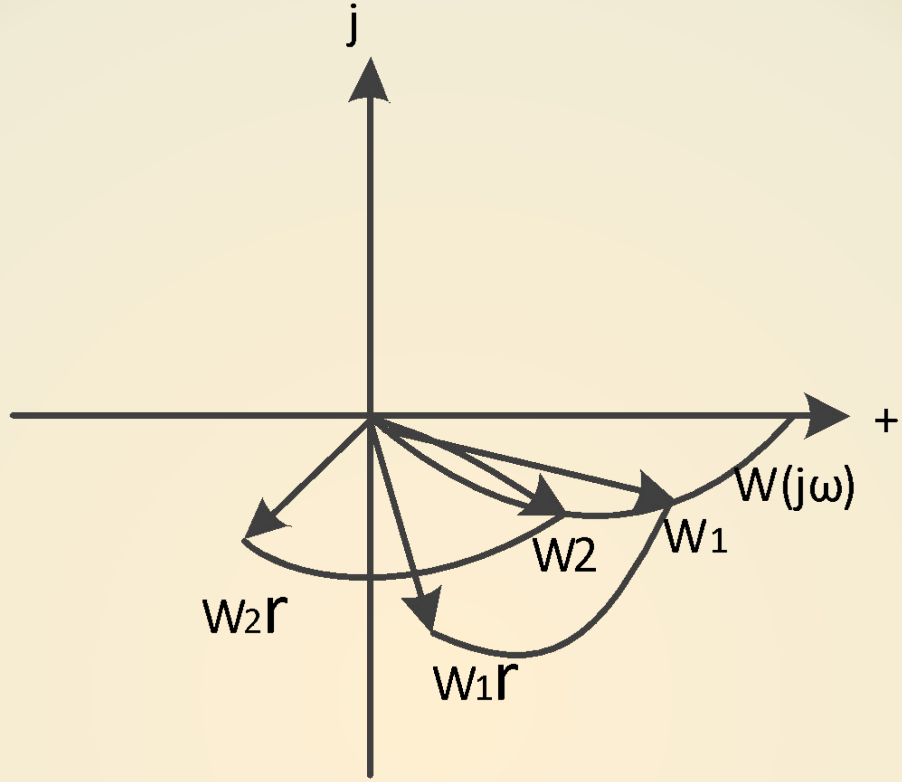
Структурная схема САР имеет вид:



Пусть $W_p(p) = \dfrac{K}{1 + pT};$

Тогда $W_p(p) = \dfrac{K}{1 + pT} e^{-p\tau};$

Следовательно $A(\omega) = \dfrac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} * 1.$



Для построения годографа системы изначально строится годограф W(jω), а затем вектор соответствующий данному годографу не изменяясь по длине поворачивается на угол $\omega\tau$.

Из построения очевидно, что при некотором τ годограф может охватить точку с координатами -1j0 следовательно даже САР первого порядка с запаздыванием может быть неустойчива.