# Предел последовательности

Опр $a$ - предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$

Посл-сть, имеющая предел - сходящаяся, иначе - расходящаяся.

Опр. $\{x_n\}$-сх., если $\exists a : \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$

Опр. $\{x_n\}$-расх, если $\forall a \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N : |x_n - a| \geq \varepsilon$

На сх-сть (расх-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа начальных членов.

# Предел последовательности

<u>Опр</u> $a$ – предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$

Посл-сть, имеющая предел – сходящаяся, иначе – расходящаяся.

<u>Опр</u>. $\{x_n\}$ – сх., если $\exists a: \forall \varepsilon > 0 \ \exists N: \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$

<u>Опр</u>. $\{x_n\}$ – расх, если $\forall a \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N: |x_n - a| \geq \varepsilon$

На сх-сть (расх-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа начальных членов.

Примеры 1. $x_n = c \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = 1: \forall n > N \ |x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

# Предел последовательности

Опр $a$ - предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$

Посл-сть, имеющая предел - сходящаяся, иначе - расходящаяся.

Опр. $\{x_n\}$-сх., если $\exists a : \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$

Опр. $\{x_n\}$-расх, если $\forall a \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N : |x_n - a| \geqslant \varepsilon$

На сх-сть (расх-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа начальных членов.

Примеры 1. $x_n = c \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

2. $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = 1 : \forall n > N \ |x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \ \forall n > N$, т.е.

$n \geqslant N + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$

# Предел последовательности

Опр $a$ – предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \quad x_n \to a$

Посл-сть, имеющая предел – сходящаяся, иначе – расходящаяся.

Опр. $\{x_n\}$-сх., если $\exists a : \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$

Опр. $\{x_n\}$-расх, если $\forall a \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N : |x_n - a| \geq \varepsilon$

На сх-сть (расх-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа начальных членов.

Примеры 1. $x_n = c \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

2. $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

T1. Сх-ся посл-сть имеет лишь один предел.

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = 1 : \forall n > N \ |x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \ \forall n > N$, т.е.

$n \geq N + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$

Д-во T1. Пусть не так, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$. ($a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow a = b$ не проходит).

Пусть $a < b$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_1 : \forall n > N_1 \ |x_n - a| < \varepsilon$, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N_2 : \forall n > N_2 \ |x_n - b| < \varepsilon \quad b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0 \Rightarrow$ при $n > N = \max(N_1, N_2)$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow x_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \\ &\Rightarrow x_n > b - \varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}\right\}$$ Противоречие.

Т. доказана

# Предел последовательности

**Опр** $a$ – предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$

Посл-сть, имеющая предел – сходящаяся, иначе – расходящаяся.

**Опр.** $\{x_n\}$ – сх., если $\exists a : \forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$

**Опр.** $\{x_n\}$ – расх, если $\forall a\ \exists \varepsilon > 0\ \forall N\ \exists n > N : |x_n - a| \geq \varepsilon$

На сх-сть (расх-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа начальных членов.

Примеры 1. $x_n = c \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

2. $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

**Т1.** Сх-ся посл-сть имеет лишь один предел.

**Т2.** Сх-ся посл-сть ограничена.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = 1 : \forall n > N\ |x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] > \frac{1}{\varepsilon} - 1\ \forall n > N$, т.е.

$n \geqslant N + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$

Д-во Т1. Пусть не так, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, $a \neq b$. ($a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n = b \Rightarrow a = b$ не проходит).

Пусть $a < b$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n > N_1\ |x_n - a| < \varepsilon$, $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n > N_2\ |x_n - b| < \varepsilon$ $b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0 \Rightarrow$ при $n > N = \max(N_1, N_2)$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow x_n < a + \varepsilon = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \\ &\Rightarrow x_n > b - \varepsilon = b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} \end{aligned}\right\} \text{Противоречие.}$$

Т. доказана.

Д-во Т2. $\{x_n\}$ сх. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon$

$\varepsilon = 1$ $N\big|_{\varepsilon=1} \Rightarrow \forall n > N\ |x_n - a| < 1$, т.е.

$|x_n| = |a + (x_n - a)| \leqslant |a| + |x_n - a| < |a| + 1$

$M = \max(|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|, |a| + 1) > 0$

$$\forall n = 1, 2, \ldots \quad \left.\begin{aligned} &1)\ 1 \leq n \leq N \Rightarrow |x_n| \leq M \\ &2)\ n > N \Rightarrow |x_n| \leq M \end{aligned}\right\} \Rightarrow |x_n| \leq M$$

Т. доказана.

# Предел последовательности

Опр $a$ – предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$

Посл-сть, имеющая предел – сходящаяся, иначе – расходящаяся.

Опр. $\{x_n\}$ – сх., если $\exists a : \forall \varepsilon > 0 \ \exists N : \forall n > N \ |x_n - a| < \varepsilon$

Опр. $\{x_n\}$ – расх, если $\forall a \ \exists \varepsilon > 0 \ \forall N \ \exists n > N : |x_n - a| \geq \varepsilon$

На сх-сть (расх-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа начальных членов.

Примеры 1. $x_n = c \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$

2. $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

T1. Сх-ся посл-сть имеет лишь один предел.

T2. Сх-ся посл-сть ограничена.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Установим, что ограниченная посл-сть $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $x_n = (-1)^n$ – расход.

$\forall a$. Рассмотрим 3 случая

1) $|a| \neq 1$. $\exists \varepsilon = |1 - |a|| > 0 \ \forall N$

$\exists n = N + 1 > N : |x_n - a| \geq$

$\geq \big| |x_n| - |a| \big| = |1 - |a|| = \varepsilon$

2) $a = 1 \quad \varepsilon = 2 \quad \forall N \ \exists n = 2N + 1 > N$

$|x_n - a| = |(-1)^{2N+1} - 1| = 2 = \varepsilon$

3) $a = -1 \quad \varepsilon = 2 \quad \forall N \ \exists n = 2N > N$

$|x_n - a| = |(-1)^{2N} - (-1)| = |1 + 1| = 2 = \varepsilon$

Т3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$

Д-во т3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n > N_1\ \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n > N_2 :\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N} = \max(N_1, N_2) : \underline{\forall n > N}$

$\underline{|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)|} = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq$

$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Т. доказана

T3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$.

T4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, $\{y_n\}$ – огр. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

Д-во Т3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n > N_1\ \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n > N_2 :\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N} = \max(N_1, N_2) \underline{: \forall n > N}$

$\underline{|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)|} = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq$

$\leq |x_n - a| + |y_n - b| \underline{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}$.

Т. доказана

Д-во Т4. $\{y_n\}$ – огр., т.е. $\exists M > 0 : \forall n \geq 1\ |y_n| \leq M$

$x_n \to 0$, т.е. $\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N}\ \ |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

Но тогда $\underline{|x_n \cdot y_n - 0|} = |x_n| \cdot |y_n| \underline{<} \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \underline{\varepsilon}$,

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. Теорема д-зана.

$\underline{T3.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$

$\underline{T4.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \{y_n\}$ – огр. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

$\underline{T5.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

$\underline{Сл.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} c x_n = ca$

Д-во Т3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n > N_1\ \ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n > N_2 :\ |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N} = \max(N_1, N_2)\ \underline{: \forall n > N}$

$\underline{|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)|} = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq$

$\leq |x_n - a| + |y_n - b| \underline{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}.$

Т. доказана

Д-во Т4. $\{y_n\}$ – огр., т.е. $\exists M > 0 : \forall n \geq 1\ |y_n| \leq M$

$x_n \to 0$, т.е. $\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N}\ \ |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

Но тогда $\underline{|x_n \cdot y_n - 0|} = |x_n| \cdot |y_n| \underline{<} \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \underline{\varepsilon}$,

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. Теорема д-зана.

Д-во Т5. $x_n y_n = ab + x_n y_n - x_n b + x_n b - ab =$

$= \underbrace{ab}_{\text{пост.}} + \underbrace{x_n}_{\text{огр}} \cdot \underbrace{(y_n - b)}_{\to 0} + \underbrace{b}_{\text{огр}} \cdot \underbrace{(x_n - a)}_{\to 0} \to 0$ Т. д-зана

Д-во сл. $\underbrace{c}_{\text{пост.}} \cdot \underbrace{x_n}_{\to a} \to ca.$

$\underline{Т3.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$

$\underline{Т4.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \{y_n\}$ – огр. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

$\underline{Т5.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

$\underline{Сл.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} c x_n = ca$

$\underline{Л.}$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0. \Rightarrow \exists \left\{\frac{1}{y_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – огр.

Д-во т3. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n > N_1\ |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N} = \max(N_1, N_2) : \underline{\forall n > N}$

$\underline{|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)|} = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leqslant$

$\leqslant |x_n - a| + |y_n - b| \underline{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \underline{\varepsilon}.$

Т. доказана

Д-во т4. $\{y_n\}$ – огр., т.е. $\exists M > 0 : \forall n \geqslant 1\ |y_n| \leqslant M$

$x_n \to 0$, т.е. $\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N}\ |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

Но тогда $\underline{|x_n \cdot y_n - 0|} = |x_n| \cdot |y_n| \underline{<} \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \underline{\varepsilon}$,

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$. Теорема д-зана.

Д-во т5. $x_n y_n = ab + x_n y_n - x_n b + x_n b - ab =$

$= \underbrace{ab}_{\text{пост.}} + \underbrace{x_n}_{\text{огр}} \cdot \underbrace{(y_n - b)}_{\to 0} + \underbrace{b}_{\text{огр}} \cdot \underbrace{(x_n - a)}_{\to 0} \to 0$ Т. д-зана

Д-во сл. $\underbrace{c}_{\text{пост.}} \cdot \underbrace{x_n}_{\to a} \to ca.$

Д-во леммы. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ |y_n - b| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0\quad N\Big|_{\varepsilon = \frac{|b|}{2}}.\quad n_0 = N + 1\quad \forall n \geqslant n_0,$

т.е. $n > N\quad |y_n| = |b - (b - y_n)| \geqslant \big||b| - |y_n - b|\big| >$

$> |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}$, т.е. $y_n \neq 0\ \forall n \geqslant n_0\ \left(\exists \left\{\frac{1}{y_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}\right)$

При этом $\left|\frac{1}{y_n}\right| \leqslant \frac{2}{|b|} \equiv M$, т.е. огр. Л. д-зана

Т3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$

Т4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \{y_n\}$ – огр. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

Т5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

Сл. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} c x_n = ca$

Л. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0. \Rightarrow \exists \left\{\frac{1}{y_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – огр.

Т6. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Д-во Т6. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b x_n - a y_n}{b y_n} =$

$= \underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{пост.}} + \underbrace{\frac{1}{b y_n}}_{\text{огр}} \cdot \underbrace{(b x_n - a y_n)}_{\to 0} \longrightarrow \frac{a}{b}$

Т. д-зана.

Т3. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$

Т4. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \{y_n\}$ – огр. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

Т5. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

Сл. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}\ \ \exists \lim\limits_{n\to\infty} c x_n = ca$

Л. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0. \Rightarrow \exists \left\{\frac{1}{y_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – огр.

Т6. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

Т7. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$

Д-во Т6. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b x_n - a y_n}{b y_n} =$

$$= \underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{пост.}} + \underbrace{\frac{1}{b y_n}}_{\text{огр}} \cdot \underbrace{(b x_n - a y_n)}_{\to 0} \to \frac{a}{b}$$

Т. д-зана.

Д-во Т7. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N\quad |x_n - a| < \varepsilon$

Но тогда $\big||x_n| - |a|\big| \leqslant |x_n - a| < \varepsilon$

Т. д-зана

**Т3.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b.$

**Т4.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0,\ \{y_n\}$ – огр. $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$

**Т5.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

**Сл.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R}\ \exists \lim\limits_{n\to\infty} c x_n = ca$

**Л.** $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0. \Rightarrow \exists \left\{\frac{1}{y_n}\right\}_{n=n_0}^{\infty}$ – огр.

**Т6.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

**Т7.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |a|$

**Опр** $\forall x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{sgn} x \equiv \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

**Т8.** $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0$

$$\operatorname{sgn} x_n = \operatorname{sgn} a.$$

Д-во Т6. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b x_n - a y_n}{b y_n} =$

$$= \underbrace{\frac{a}{b}}_{\text{пост.}} + \underbrace{\frac{1}{b y_n}}_{\text{огр}} \cdot \underbrace{(b x_n - a y_n)}_{\to 0} \longrightarrow \frac{a}{b}$$

Т. д-зана.

Д-во Т7. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Но тогда $\big||x_n| - |a|\big| \leq |x_n - a| < \varepsilon$

Т. д-зана

Д-во Т8. $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ |x_n - a| < \varepsilon,$

т.е. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0 \quad N\Big|_{\varepsilon = \frac{|a|}{2}} \quad n_0 = N + 1,$

т.е. $\forall n \geq n_0 \quad a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}$

1) $a > 0 \Rightarrow x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$

2) $a < 0 \Rightarrow x_n < a + \frac{-a}{2} = \frac{a}{2} < 0$

Т. доказана

T9 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $x_n \leq y_n \Rightarrow a \leq b$

Д-во Т9. Пусть $a > b$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 :\ \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 :\ \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon$

$\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0 \qquad N = max(N_1, N_2),\ n > N$

$$\frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < x_n < a + \frac{a-b}{2}$$

$$b - \frac{a-b}{2} < y_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$\Rightarrow x_n > y_n$ (противор.) Т. д-зана

$\underline{Т9}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $x_n \le y_n \Rightarrow a \le b$

$\underline{Сл 1}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \le b \Rightarrow a \le b$

$\underline{Сл 2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, $x_n \in [a, b] \Rightarrow c \in [a, b]$

Д-ть самостоят.

Д-во Т9. Пусть $a > b$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 :\ \forall n > N_1\quad |x_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 :\ \forall n > N_2\quad |y_n - b| < \varepsilon$

$\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0 \qquad N = \max(N_1, N_2),\ n > N$

$$\frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < x_n < a + \frac{a-b}{2}$$

$$b - \frac{a-b}{2} < y_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$\Rightarrow x_n > y_n$ (противор.) Т. д-зана

Д-во сл. 1 $y_n = b$ - пост. и Т8

Т9 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, $x_n \le y_n \Rightarrow a \le b$

Сл 1 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \le b \Rightarrow a \le b$

Сл 2 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = c$, $x_n \in [a, b] \Rightarrow c \in [a, b]$

Д-ть самостоят.

Т10 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, $x_n \le y_n \le z_n$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} y_n = a$$

Д-во Т9. Пусть $a > b$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1 : \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2 : \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon$

$\varepsilon = \dfrac{a-b}{2} > 0 \qquad N = \max(N_1, N_2),\ n > N$

$$\frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < x_n < a + \frac{a-b}{2}$$

$$b - \frac{a-b}{2} < y_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$\Rightarrow x_n > y_n$ (противор.) Т. д-зана

Д-во сл. 1 $y_n = b$ – пост. и Т8

Д-во Т10.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_1\ \forall n > N_1 \quad -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N_2\ \forall n > N_2 \quad -\varepsilon < z_n - a < \varepsilon$

$\Rightarrow \underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists N} = \max(N_1, N_2) \underline{:\ \forall n > N}$

$\underline{-\varepsilon <} x_n - a \le \underline{y_n - a} \le z_n - a \underline{< \varepsilon}$,

т. е. $|y_n - a| < \varepsilon$, следов. $\exists \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$

Т. доказана