

Предел последовательности

Опр a - предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \rightarrow a$

Посл-сть, имеющая предел - сходящаяся,
иначе - расходящаяся.

Опр. $\{x_n\}$ -сх., если $\exists a: \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Опр. $\{x_n\}$ -рассх., если $\forall a \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N: |x_n - a| \geq \varepsilon$

На сх-сть (рассх-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа начальных элементов.

Предел последовательности

$$\exists \varepsilon > 0 \exists N = 1 : \forall n > N \quad |x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

Опр a - предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \rightarrow a$

Посл-сть, имеющая предел - сходящаяся,

никак - расходящаяся.

Опр. $\{x_n\}$ -сх., если $\exists a : \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Опр. $\{x_n\}$ -рассх., если $\forall a \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N : |x_n - a| \geq \varepsilon$

На сх-сть (рассх-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа начальных элементов.

Примеры 1. $x_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

Предел последовательности

Опр α -предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |x_n - \alpha| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$, $x_n \rightarrow \alpha$

Посл-сть, имеющая предел - сходящаяся,
никак - расходящаяся.

Опр. $\{x_n\}$ -сх., если $\exists \alpha: \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |x_n - \alpha| < \varepsilon$

Опр. $\{x_n\}$ -рассх., если $\forall \alpha \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N: |x_n - \alpha| \geq \varepsilon$

На сх-сть (рассх-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа начальных элементов.

Примеры 1. $x_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

2. $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = 1: \forall n > N \quad |x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 \quad \forall n > N, \text{ т.е.}$$

$$n \geq N + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Предел последовательности

Опр a - предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \rightarrow a$

Посл-сть, имеющая предел - сходящаяся,
иначе - расходящаяся.

Опр. $\{x_n\}$ -сх., если $\exists a: \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$

Опр. $\{x_n\}$ -рассх., если $\forall a \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N: |x_n - a| \geq \varepsilon$

На сх-сть (рассх-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или умножение конечного числа начальных членов.

Примеры 1. $x_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

2. $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Т1. Сх-ся посл-сть имеет лишь один предел.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = 1: \forall n > N |x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \forall n > N, \text{ т.е.}$$

$$n \geq N + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Д-во Т1. Пусть не так, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$,
 $a \neq b$. ($a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \Rightarrow a = b$ не пройдет).

Пусть $a < b$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 |x_n - a| < \varepsilon, a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2 |x_n - b| < \varepsilon, b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{b - a}{2} > 0 \Rightarrow \text{при } n > N = \max(N_1, N_2)$$

$$\Rightarrow x_n < a + \varepsilon = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}$$

$$\Rightarrow x_n > b - \varepsilon = b - \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}$$

Противо-
речие.

Т. доказано

Предел последовательности

Опр a - предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \rightarrow a$

Посл-сть, имеющая предел - сходящаяся,
иначе - расходящаяся.

Опр. $\{x_n\}$ - с.к., если $\exists a: \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$

Опр. $\{x_n\}$ - раск., если $\forall a \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N: |x_n - a| \geq \varepsilon$

На с.к-сть (раск-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа членов.

Примеры 1. $x_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

2. $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

Т1. С.к-ся посл-сть имеет лишь один предел.

Т2. С.к-ся посл-сть ограничена.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = 1: \forall n > N |x_n - c| = |c - c| = 0 < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \forall n > N, \text{ т.е.}$$

$$n \geq N + 1 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \right] + 1 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |x_n - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon.$$

Д-во Т1. Пусть не так, т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b$,
 $a \neq b$. ($a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \Rightarrow a = b$ не противоречит).

Пусть $a < b$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 |x_n - a| < \varepsilon, a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2 |x_n - b| < \varepsilon, b - \varepsilon < x_n < b + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{b - a}{2} > 0 \Rightarrow \text{при } n > N = \max(N_1, N_2)$$

$$\Rightarrow x_n < a + \varepsilon = a + \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}$$

$$\Rightarrow x_n > b - \varepsilon = b - \frac{b - a}{2} = \frac{a + b}{2}$$

Противо-
речие.

Т. доказана.

Д-во Т2. $\{x_n\}$ с.к. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = 1 \quad N \Big|_{\varepsilon=1} \Rightarrow \forall n > N |x_n - a| < 1, \text{ т.е.}$$

$$|x_n| = |a + (x_n - a)| \leq |a| + |x_n - a| < |a| + 1$$

$$M = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_N|, |a| + 1) > 0$$

$$\forall n = 1, 2, \dots \quad \left. \begin{array}{l} 1) 1 \leq n \leq N \Rightarrow |x_n| \leq M \\ 2) n > N \Rightarrow |x_n| \leq M \end{array} \right\} \Rightarrow |x_n| \leq M$$

Т. доказана.

Предел последовательности

Опр a - предел $\{x_n\}$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$$

Обозначение: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $x_n \rightarrow a$

Посл-сть, имеющая предел - сходящаяся,
иначе - расходящаяся.

Опр. $\{x_n\}$ - с.к., если $\exists a: \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N |x_n - a| < \varepsilon$

Опр. $\{x_n\}$ - раск., если $\forall a \exists \varepsilon > 0 \forall N \exists n > N: |x_n - a| \geq \varepsilon$

На с.к-сть (раск-сть) и величину предела не влияет добавление, отбрасывание или изменение конечного числа начальных членов.

Примеры 1. $x_n = c \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$

2. $x_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

T1. С.к-ся посл-сть имеет лишь один предел.

T2. С.к-ся посл-сть ограничена.

Обратное, вообще говоря, неверно.

Установим, что ограниченная посл-сть

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, где $x_n = (-1)^n$ - раск.д.

$\forall a$. Рассмотрим 3 случая

1) $|a| \neq 1$. $\exists \varepsilon = |1 - |a|| > 0 \forall N$

$$\exists n = N+1 > N: |x_n - a| \geq$$

$$\geq ||x_n| - |a|| = |1 - |a|| = \varepsilon$$

2) $a = 1$ $\varepsilon = 2 \forall N \exists n = 2N+1 > N$

$$|x_n - a| = |(-1)^{2N+1} - 1| = 2 = \varepsilon$$

3) $a = -1$ $\varepsilon = 2 \forall N \exists n = 2N > N$

$$|x_n - a| = |(-1)^{2N} - (-1)| = |1 + 1| = 2 = \varepsilon$$

Т3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$ $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \in \mathbb{N} : \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \in \mathbb{N} : \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) : \forall n > N$$

$$|(x_n \pm y_n) - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq$$

$$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Т. доказана

T3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$

T4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \{y_n\} - \text{огр.} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2: |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2): \forall n > N$

$| (x_n \pm y_n) - (a \pm b) | = | (x_n - a) \pm (y_n - b) | \leq$

$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Т. доказана

$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0: \forall n \geq 1 \quad |y_n| \leq M$

$x_n \rightarrow 0, \text{ т.е. } \forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

Но тогда $|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$ Теорема δ -зана.

T3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$

T4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \{y_n\} - \text{огр.} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$

T5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

Сл. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c a$

До-во т3. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 < N_2 : \forall n > N_2 \quad |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 : \forall n > N_2 : |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) : \forall n > N$

$|x_n \pm y_n - (a \pm b)| = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq$

$\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Т. доказана

До-во т4. $\{y_n\} - \text{огр.}, \text{т.е.} \exists M > 0 : \forall n \geq 1 \quad |y_n| \leq M$

$x_n \rightarrow 0, \text{т.е.} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \quad |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

Но тогда $|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$ Теорема доказана.

До-во т5. $x_n y_n = ab + x_n y_n - x_n b + x_n b - ab =$

$= \underbrace{ab}_{\text{const.}} + \underbrace{x_n \cdot (y_n - b)}_{\text{огр.} \rightarrow 0} + \underbrace{b \cdot (x_n - a)}_{\text{огр.} \rightarrow 0} \rightarrow 0$

Т. доказана

До-во сл. $\underbrace{c x_n}_{\text{огр.} \rightarrow a} \rightarrow c a.$

T3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$

T4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \{y_n\} - \text{огр.} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$

T5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

Сл. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c a$

Л. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists \left\{ \frac{1}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty} - \text{огр.}$

Д-во T3. $\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n > N_1 |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n > N_2 |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2) : \forall n > N$

$| (x_n \pm y_n) - (a \pm b) | = | (x_n - a) \pm (y_n - b) | \leq$
 $\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Т. доказана

Д-во T4. $\{y_n\} - \text{огр.}, \text{т.е.} \exists M > 0 : \forall n \geq 1 |y_n| \leq M$

$x_n \rightarrow 0, \text{т.е.} \forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$

Но тогда $|x_n \cdot y_n - 0| = |x_n| \cdot |y_n| \leq \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon,$

т.е. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0.$ Теорема Д-зана.

Д-во T5. $x_n y_n = ab + x_n y_n - x_n b + x_n b - ab =$

$= \underbrace{ab}_{\text{посл.}} + \underbrace{x_n \cdot (y_n - b)}_{\text{огр.} \rightarrow 0} + \underbrace{b \cdot (x_n - a)}_{\text{огр.} \rightarrow 0} \rightarrow 0$ Т. Д-зана

Д-во сл. $\lim_{n \rightarrow \infty} c x_n \rightarrow c a.$

Д-во леммы. $\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N |y_n - b| < \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{|b|}{2} > 0 \quad N \Big|_{\varepsilon = \frac{|b|}{2}} n_0 = N + 1 \quad \forall n \geq n_0,$

т.е. $n > N \quad |y_n| = |b - (b - y_n)| \geq |b| - |y_n - b| >$

$> |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}, \text{т.е. } y_n \neq 0 \quad \forall n \geq n_0 \left(\exists \left\{ \frac{1}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty} \right)$

При этом $\left| \frac{1}{y_n} \right| \leq \frac{2}{|b|} \equiv M, \text{т.е. огр.}$ Л. Д-зана

$$\underline{T3.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

$$\underline{T4.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \{y_n\} - \text{огр.} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$$

$$\underline{T5.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$$

$$\underline{C\Delta.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \quad \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c a$$

$$\underline{\Omega.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0. \Rightarrow \exists \left\{ \frac{1}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty} - \text{огр.}$$

$$\underline{T6.} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

$$\text{D-Bo T6.} \quad \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{bx_n - ay_n}{by_n} =$$
$$= \frac{a}{b} + \underbrace{\frac{1}{by_n}}_{\text{огр.}} \cdot \underbrace{(bx_n - ay_n)}_{\rightarrow 0} \rightarrow \frac{a}{b} \quad \text{T. 2-зана.}$$

T3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$

T4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \{y_n\} - \text{огр.} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$

T5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

CA. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c a$

Л. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists \left\{ \frac{1}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty} - \text{огр.}$

T6. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

T7. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$

Д-во T6. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b x_n - a y_n}{b y_n} =$

$= \frac{a}{b} + \frac{1}{\text{огр.}} \cdot \frac{1}{\text{огр.}} \cdot (b x_n - a y_n) \rightarrow \frac{a}{b}$
T. 2-гома.

Д-во T7. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Но тогда $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon$
T. 2-гома

T3. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$

T4. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \{y_n\} - \text{orp.} \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n y_n = 0$

T5. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$

CA. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \forall c \in \mathbb{R} \exists \lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c a$

Л1. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0. \Rightarrow \exists \left\{ \frac{1}{y_n} \right\}_{n=n_0}^{\infty} - \text{orp.}$

T6. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \neq 0 \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$

T7. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n| = |a|$

Onp $\forall x \in \mathbb{R} \operatorname{sgn} x \equiv \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$

T8. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0 \Rightarrow \exists n_0: \forall n \geq n_0$
 $\operatorname{sgn} x_n = \operatorname{sgn} a.$

D-Bo T6. $\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b} + \frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b} = \frac{a}{b} + \frac{b x_n - a y_n}{b y_n} =$

$= \frac{a}{b} + \frac{1}{\text{ноч.}} \cdot \frac{b y_n}{\text{orp}} \cdot \frac{(b x_n - a y_n)}{\rightarrow 0} \rightarrow \frac{a}{b}$
T. 2-зана.

D-Bo T7. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon$

Ho тогдa $||x_n| - |a|| \leq |x_n - a| < \varepsilon$
T. 2-зана

D-Bo T8. $\forall \varepsilon > 0 \exists N: \forall n > N \quad |x_n - a| < \varepsilon,$

T.e. $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{|a|}{2} > 0 \quad N \Big|_{\varepsilon = \frac{|a|}{2}} \quad n_0 = N + 1,$

T.e. $\forall n \geq n_0 \quad a - \frac{|a|}{2} < x_n < a + \frac{|a|}{2}$

1) $a > 0 \Rightarrow x_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0$

2) $a < 0 \Rightarrow x_n < a + \frac{-a}{2} = \frac{a}{2} < 0$

T. 2-зана

T9 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, x_n \leq y_n \Rightarrow a \leq b$ Д-во Т9. Пусть $a > b$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0 \quad N = \max(N_1, N_2), \quad n > N$$

$$\frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < x_n < a + \frac{a-b}{2}$$

$$b - \frac{a-b}{2} < y_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$\Rightarrow x_n > y_n$ (противор.) Т. 2-завис

T9 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, x_n \leq y_n \Rightarrow a \leq b$

C1.1 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \leq b \Rightarrow a \leq b$

C1.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c, x_n \in [a, b] \Rightarrow c \in [a, b]$
D-тв совокупности.

D-во т9. Пусть $a > b$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0 \quad N = \max(N_1, N_2), \quad n > N$$

$$\frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < x_n < a + \frac{a-b}{2}$$

$$b - \frac{a-b}{2} < y_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow x_n > y_n \text{ (противор.)} \quad \text{T. 2-зав}$$

D-во с.1 $y_n = b - \text{нес.} \text{ и т.д.}$

T9 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, x_n \leq y_n \Rightarrow a \leq b$

C1 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, x_n \leq b \Rightarrow a \leq b$

C2 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c, x_n \in [a, b] \Rightarrow c \in [a, b]$
D-тб совокупности.

T10 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a, x_n \leq y_n \leq z_n$
 $\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$

D-во T9. Пусть $a > b$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1: \forall n > N_1 \quad |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2: \forall n > N_2 \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0 \quad N = \max(N_1, N_2), n > N$$

$$\frac{a+b}{2} = a - \frac{a-b}{2} < x_n < a + \frac{a-b}{2}$$

$$b - \frac{a-b}{2} < y_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow x_n > y_n \text{ (противор.)} \quad \text{T. 2-го}$$

D-во с.1 $y_n = b$ - нест. и т.д.

D-во T10.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_1 \forall n > N_1 \quad -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N_2 \forall n > N_2 \quad -\varepsilon < z_n - a < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = \max(N_1, N_2): \forall n > N$$

$$-\varepsilon < x_n - a \leq y_n - a \leq z_n - a < \varepsilon,$$

т.е. $|y_n - a| < \varepsilon$, следов. $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$

T. доказана