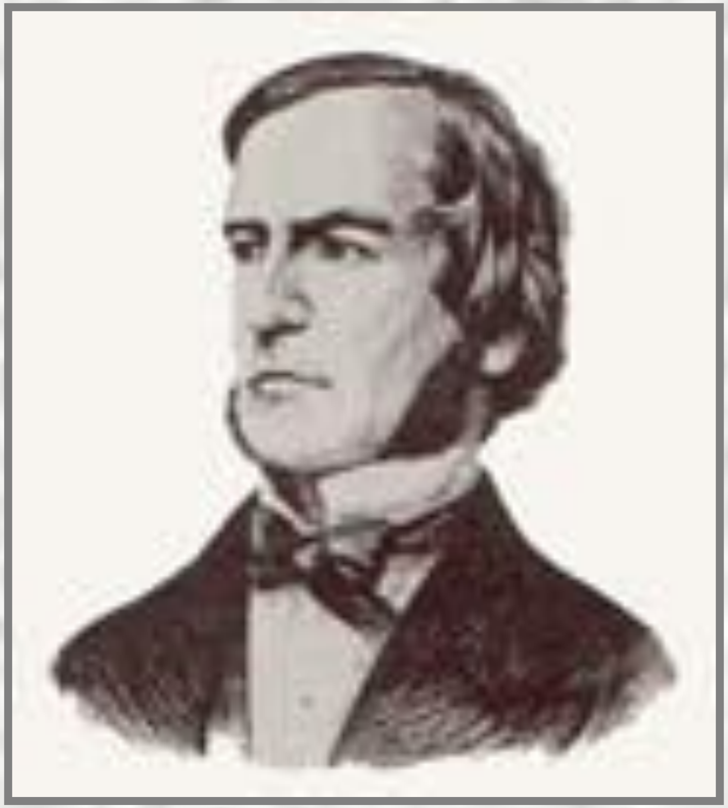
Основы логики

Логика –
это наука
о формах
и способах
мышления



Джордж Буль
(1815-1864)
основоположник
математической логики

Формы мышления

Основные формы мышления:

1. **Понятие**
2. **Высказывание (суждение)**
3. **Утверждение, рассуждение**
4. **Умозаключение**
5. **Логич выражение**

1. Понятие

Понятие – это форма мышления, отражающая основные, наиболее существенные свойства объекта , отличающие его от других предметов (цветы, тетрадь)   (Имеет содержание и объем.)

Совокупность существенных признаков объекта

Совокупность предметов, на которую распространяется понятие

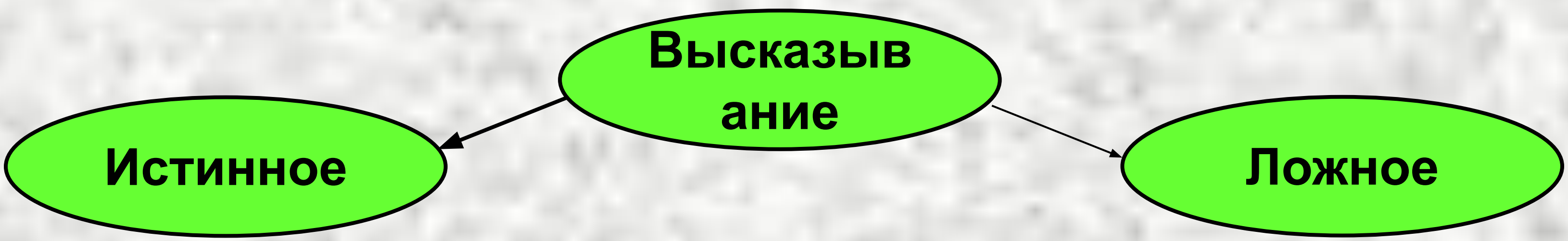
2. Высказывание

Суждение – это форма мышления, в которой что-либо утверждается или отрицается о свойствах реальных предметов и отношениях между ними.

Высказывание – суждение в математической логике

Высказывание может принимать только ***2 значения***: истина ~ ложь, да ~ нет, 1 ~ 0, вкл ~ выкл.

Высказывание является повествовательным предложением.



Связь понятий правильно отражает свойства и отношения реальных вещей

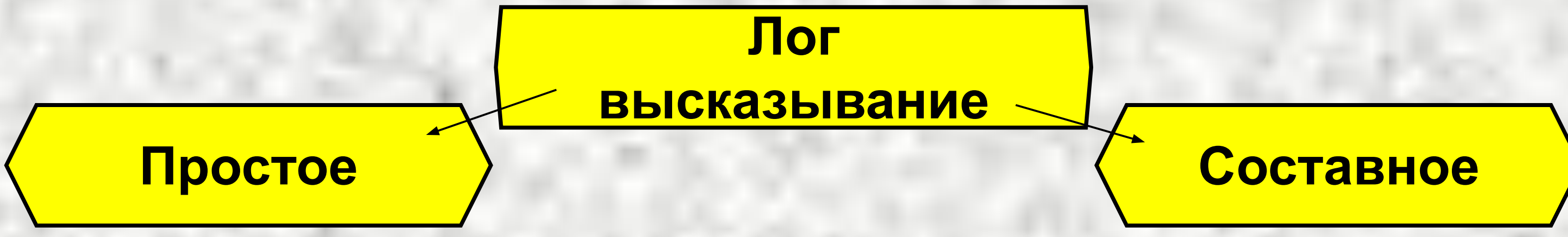
Высказывание не соответствует реальной действительности

Какие из предложений являются высказыванием?

Число 6 четное
Все роботы машины
Кошки дружат с собаками
Все моряки умеют плавать
$X^3 > 3$
Все ананасы вкусные
Гречневая каша самая вкусная
Овсяная каша очень полезная
Весна самое приятное время года
Можно самим сделать золото
Можно сделать вечный двигатель
Тигр ласковое животное
Мой кот забияка

Посмотри на доску
Кто отсутствует
Выразите 1час в минутах
Посмотри направо
Чему равен путь от Земли до М
Надо хорошо подготовиться к экзамену

Простые и сложные высказывания



Обоснование истинности или ложности простых высказываний решается вне алгебры логики, устанавливается законами наук (сумма углов Δ-ка).

Истинность сложных высказываний устанавливает алгебра логики.

<u>*Пример*</u>: Если наступает зима, то природа засыпает.

3. Утверждение

Утверждение – суждение, которое требуется доказать или опровергнуть

Рассуждение – цепочка высказываний или утверждений, определенным образом связанных друг с другом

4. Умозаключение

Умозаключение – это форма мышления, с помощью которой из одного или нескольких суждений (посылок) может быть получено новое суждение (заключение).

Посылки – только истинные суждения.

Примеры:

Литий – металл (=истина),
литий – простое вещество (=истина);
значит металл – это простое вещество.

Самая короткая дорога опасная;
самая длинная дорога безопасная;
значит длинная дорога самая короткая.

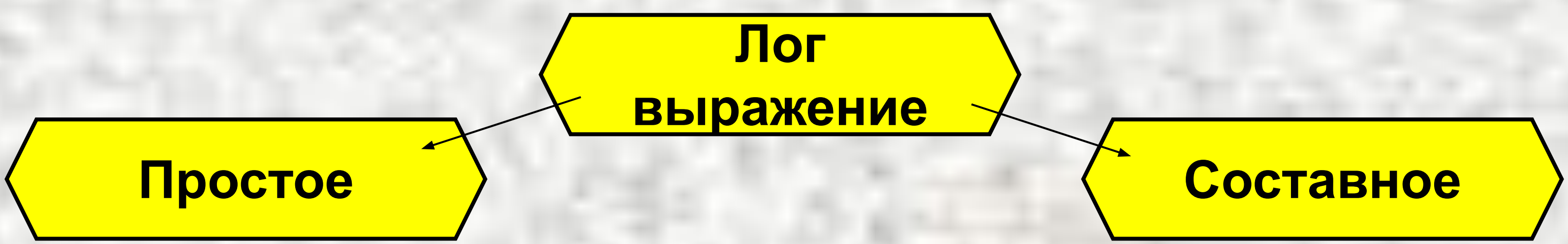
5. Логическое выражение

утверждение, состоящее из постоянных и обязательно переменных величин (объектов).
В зависимости от значений этих переменных логическое выражение может принимать одно из двух возможных значений: ИСТИНА (логическая 1) или ЛОЖЬ (логический 0)

Сложное логическое выражение

состоит из одного или нескольких простых (или сложных) логических выражений, связанных с помощью логических операций.

***<u>Пример</u>*: Если x ≠ 0, то операция деления имеет значение**



Алгебра высказываний

Алгебра высказываний служит для определения истинности или ложности составных высказываний (смысловое содержание простых высказываний не учитывается).

Логическая переменная – логическое высказывание, обозначенное прописными буквами латинского алфавита, которые могут принимать лишь 2 значения: истина(1) и ложь(0)

Например:

A = у кошки 4 ноги;

B = на яблонях растут бананы;

C = не существует лжи во спасение.

A=1, B=0, C=1.

Высказывания могут быть простыми и сложными.

Опр.: Высказывание является простым, если никакая его часть сама по себе не является высказыванием.

Пр.:

ПК состоит из системного блока, монитора, УВВ.

$X^3 > 3$

Опр.: сложные высказывания (выражения) состоят из простых (или сложных) высказываний, объединенных логическими операциями.

Основные логические операции:
И, ИЛИ, НЕ (если то, тогда и только тогда, не смотря на, только, если то и не).

Пр:

Простые высказывания –

А=Петров - врач, В=Петров - шахматист.

Составные высказывания -

С=А*В= Петров - врач и шахматист

С=А+В= Петров - врач, хорошо играющий в шахматы.

С=А⇨В= Если Петров врач, то он играет в шахматы.

Логические операции

2.1. Логическое умножение (конъюнкция)

2.2. Логическое сложение (дизъюнкция)

2.3. Логическое отрицание (инверсия)

2.4. Логическое следование (импликация)

2.5. Логическое равенство (эквивалентность)

2.6. Логическое сложение по модулю 2

Логические операции задаются таблицами истинности и иллюстрируются диаграммами Эйлера-Венна.

1. Логическое умножение (конъюнкция)

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «**и**».
Составное высказывание истинно только тогда, когда истинны оба простых высказывания.

Соответствует союзу И. В алгебре множеств это пересечение

Обозначение *, & , ^, и, and **F = A * B**

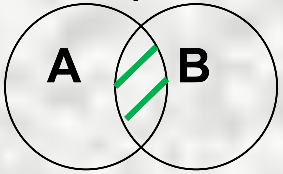


Таблица истинности

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пр.:

● А = высота шкафа меньше высоты двери,
В = ширина шкафа меньше ширины двери,
С = шкаф можно внести в дверь, если А=В=1 ~шкаф нельзя внести в дверь, если ~А~В=0

● Число 6 делится на 2 и на 3 = 1, на 5 и на 3 = 0

2. Логическое сложение (дизъюнкция)

Объединение двух (или нескольких) высказываний в одно с помощью союза «**или**».
Составное высказывание истинно только тогда, когда истинно хотя бы одно из двух простых высказывания.

Соответствует союзу ИЛИ В алгебре множеств это объединение

Обозначение +, V, ИЛИ, or **F = A + B**

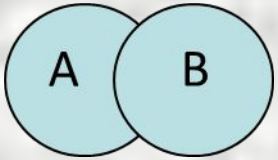


Таблица истинности

A	B	AvB
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Пр.: ●C=A∨B = в дверь видно более 2х сторон шкафа, если ~A~B~АилиB=1
●Если проводник из меди или железа, то он проводит ток .

3. Логическое отрицание (инверсия)

Присоединение частицы «не» к высказыванию.
Инверсия делает истинное высказывание ложным и, наоборот.

Соответствует союзу НЕ

Обозначение $\bar{A}$, ¬A, НЕ, not A

F = ¬ A

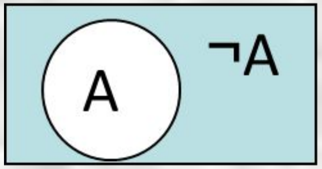


Таблица истинности

A	**$\bar{A}$**
0	1
1	0

Пр:

- С = ¬A = высота шкафа больше высоты двери
- А=завтра будет снег → С=завтра не будет снега.

4. Логическое следование (импликация)

Импликация образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «если…, то…».
Импликация ложна только тогда, когда из истинного первого высказывания (предпосылки) следует ложный вывод (второе высказывание).

Соответствует обороту Если…, то… (из А следует В)

Обозначение →, ⇨ В языках программирования if … then …

F = A → B

Таблица истинности

A	**B**	**A→B**
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

<u>Пр.</u>:

● С= (А) если идет дождь, то (В) на небе тучи.

● Импликация несимметрична, А⇨В≠В⇨А , - если на небе тучи, то необязательно идет дождь

● Все пожилые люди пенсионеры, но не все пенсионеры пожилые люди

5. Логическое равенство (эквивалентность)

Эквивалентность образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «… тогда и только тогда, когда …».

Составное высказывание, образованное с помощью логической операции эквивалентности истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания имеют одинаковое значение истинности - одновременно либо ложны, либо истинны.

Соответствует обороту **тогда и только тогда, когда …**

Обозначение **≡, ⇔, ~** **F = A ≡ B**

Таблица истинности

A	B	A~B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Пр:
3 больше 2 (**A**), а тигры полосатые (**B**).

6. Логическое сложение по модулю (исключающее ИЛИ)

Исключающее ИЛИ образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «… или один, или другой, но не оба вместе …».
Составное высказывание, образованное с помощью логической операции исключающее ИЛИ истинно тогда и только тогда, когда истинно только одно высказывание.

Соответствует обороту **или один, или др, но не оба вместе**

Обозначение **□, XOR,** **F = A□B**

Таблица истинности

A	B	A□B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Пр:
Петя (**A**) или Вася(**B**) открыли квартиру.

Логические выражения

Логическое выражение – формула, в которую входят логические переменные и знаки логических операций.

Пример: $F = (A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})$

Порядок (приоритет) выполнения логических операций в сложном логическом выражении:

1. инверсия ¬
2. конъюнкция &
3. дизъюнкция V
4. импликация →
5. эквивалентность ≡

!!! Для изменения указанного порядка выполнения операций используются **скобки**

Найдите значения логических выражений

F = (0 v 0) v (1 v 1)	
F = (1 v 1) v (1 v 0)	
F = (0 & 0) & (1 & 0)	
F = ¬1 &(1 v 1) v (¬0 & 1)	
F = (¬1 v 1) & (1 &¬1) &(¬1 V 0)	

Таблицы истинности

Для логического выражения можно построить ***таблицу истинности***, которая определяет его истинность или ложность при всех возможных комбинациях исходных значений простых высказываний.

Построение таблицы истинности

1. Подсчитать кол-во переменных в выражении =n.
2. Число строк в таблице = 2^n + заголовок.
3. Кол-во столбцов = n + кол-во операций.
4. Ввести названия столбцов: сначала переменные, затем операции в соответствии с приоритетом.
5. Ввести наборы значений переменных.
6. Вычислить значения операций для всех наборов переменных.

Алгоритм заполнения *значений переменных*:

1. Разделить колонку 1ой переменной пополам, 1я часть = 0, 2я = 1.
2. Разделить колонку 2ой переменной на 4 ч и заполнить их 0,1,0,1
3. Продолжать деление последующих колонок соответственно на 8, 16, 32 … части и заполнять части последовательно 0, 1, 0, 1, …

ПРИМЕР: составить таблицу истинности для

сложного логического выражения

$$F = (A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})$$

1. Кол-во строк таблицы 2^2 +1 = 5, т.к. в формуле две переменные А и В – два простых высказывания.
2. Кол-во столбцов: 2 переменные + 5 лог. операций =7

A	B	$A \vee B$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$	$(A \vee B) \& (\overline{A} \vee \overline{B})$
0	0	0	1	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	0	0

<u>ПРИМЕР</u>: составить таблицу истинности для сложного логического выражения

D = не A & (B+C)

1. Кол-во строк = 2^3 +2 = 10 (n=3, т.к. на входе три элеманта A, B, C) – три простых высказывания.
2. Кол-во столбцов: 3 переменные + 3 лог операции =6

A	B	C	E = не A	F = B+C	D = E&F
1	1	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0
1	о	1	0	1	0
1	о	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	0	0

Равносильные логические выражения

Равносильные логические выражения - у которых последние столбцы таблиц истинности совпадают.

Обозначают “=“. A*B = B*A

Докажите равносильность выражений: $\overline{A}\,\&\,\overline{B}$ и $\overline{A \vee B}$

Таблица истинности для $\overline{A \vee B}$

A	B	AvB	$\overline{A \vee B}$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

Таблица истинности для $\overline{A}\,\&\,\overline{B}$

A	B	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A}\,\&\,\overline{B}$
0	0			
0	1			
1	0			
1	1			

Докажите равносильность выражений:

$A+B+C=B+C+A$

$ABC=BCA$

$A \Leftrightarrow B=\neg A \Leftrightarrow \neg B$

$(A+B)C=AC+BC$

$AB+C=(A+C)(B+C)$

$\neg(A+B)=\neg A\neg B$

$\neg(AB)=\neg A+\neg B$

$AB+\neg AB=B$

$(A+B)(\neg A+B)=B$

$\neg A(A+B)=\neg AB$

$A+\neg AB=A+B$

Тождественные логические выражения

Выражение называется **тождественно ложным (истинным)**, если оно принимает значение 0 (1) на всех наборах, входящих в него простых высказываний.

$A \Rightarrow A = 1$

$A \land \neg A = 0$

$A \lor \neg A = 1$

$\neg(x \lor y) \land (x \land \neg y) = 0$

$\neg xy \lor \neg(x \lor y) \lor x = 1$

Основные понятия ЛОГИКИ ПРЕДИКАТОВ

- В алгебре логики высказывания рассматриваются как единый объект с точки зрения истинности или ложности. Структура и содержание высказываний не рассматриваются.
- Однако на практике для построения полноценного логического вывода важно иметь представление о структуре и содержании используемых в выводе высказываний.
- Поэтому логика предикатов является, по сути, расширением логики высказывания, которую включает в себя в качестве составной части.

- <u>Определение</u>. **<u>Одноместным предикатом</u>** P(x) называется произвольная функция переменной x, определенная на множестве M и принимающая значение из множества

  .

- <u>Определение</u>. **<u>Предикатом</u>** P называется n-местная функция, определенная на производном множестве M и принимающая в качестве значений элементы из двухэлементного множества $\{0, 1\}$, где 0 и 1 интерпретируются как ложь и истина соответственно.
- Выражение вида $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ можно трактовать так, что переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$ связаны отношением P.

Используя функциональную форму записи для предикатов, можно сказать, что предикатом $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется функция

$$P: M^n \rightarrow B,$$

где *B* – двоичное множество, а *M* – произвольное множество.

Таким образом, *n*-местный предикат, – это двузначная функция от *n* аргументов, определенная на произвольном множестве *M*, принимающая значение *0* или *1* (которые интерпретируются как ложь и истина соответственно).

Область определения *M* называется *предметной областью* предиката, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *предметными переменными*.

Возможность описывать с помощью предикатов не только функции, но и отношения, определяется следующим:

а) если $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **– элементы множества** M**, то каждому** n **- местному отношению** R **соответствует предикат** P **такой, что**

$P(a_1, a_2, \ldots, a_n)=1$ **тогда и только тогда, когда**

$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in R$ **;**

б) всякий предикат $P(x_1, x_2, \ldots\ x_n)$ **определяет отношение** R**, такое, что** $(a_1, a_2 \ldots a_n) \in R$**, если и только если** $P(a_1, a_2, \ldots a_n) = 1$**.**

При этом R **задает область истинности предиката** P**.**

Таким образом, в общем случае предикат *P* – двоичная переменная, то есть **переменное высказывание**, истинность которого определяется значениями аргументов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, а аргументы x_i – чаще **нелогические переменные.**

После подстановки вместо x_i конкретных элементов множества *M* предикат $P(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ перестает быть переменной и принимает одно из двух возможных значений (*0* или *1*).

Примеры.

1.Рассмотрим утверждение *«x – целое число»*. Введем предикат I, обозначающий отношение «*быть целым числом*», тогда в виде предикатного выражения утверждение может быть записано так : $I(x)$.

2. Рассмотрим утверждение $x < y$. Введем предикат S с двумя аргументами, первый из которых меньше второго, тогда $S(x,y)$ соответствует введенному утверждению.

3. Элементы x_i **множества** *M* **– города. Предикат** *P(x)* **устанавливается таким образом:** *«x – это столица Франции».* **Тогда** *P (Воронеж)=0*, **а** *P(Париж)=1*.

4. Задана функция *z=x+y*, **где** *x, y, z* **– действительные числа. Пусть предикат** *P(x, y,z)* **соответствует этой функции.**

Тогда *P(2, 3, 5)=1*, **а** *P(7, 3, 8)=0.*

Пример (для предикатов определенных в предыдущем примере).

Пусть в обоих случаях предикаты определены на множестве *R* – действительных чисел. Тогда

1) если $x = 5$, **то предикат** $I(5) = 1$;

если $x = 7.3$; **то** $I(7.3) = 0$;

2) если $x = 5$; $y = 10.5$, то $S(5; 10.5) = 1$;

если $x = 27.1$; $y = 4.3$, то $S(27.1; 4.3) = 0$.

Предикат называется ***тождественно истинным***, **если на любом наборе аргументов он принимает значение 1.**

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1$$

Предикат называется ***тождественно ложным***, **если на любом наборе аргументов он принимает значение 0.**

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

Квантор всеобщности (∀).

Пусть $P(x)$ это предикат, определенный на множестве M. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ понимается высказывание, которое истинно для любого элемента $x \in M$.

Соответствующее этому высказыванию предложение можно сформулировать так:

«Для любого x выражение $P(x)$ истинно».

Квантор существования (∃).

Пусть $P(x)$ это предикат, определенный на множестве M.

Тогда под выражением $\exists x P(x)$ понимается высказывание, которое истинно, если существует элемент $x \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложно в противном случае.

Соответствующее ему предложение:

«Существует x, при котором значение $P(x)$ истинно».