26.03.20.

Тема:
Взаимное расположение прямых в пространстве. Параллельность плоскостей.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Теоретическая часть:
Прочитать.
Теоремы и определения
(выделенное жирным шрифтом) – выучить.
Доказательства прочитать и понять.

§ 2 Взаимное расположение прямых в пространстве. Угол между двумя прямыми

7 Скрещивающиеся прямые

Рис. 19

Если две прямые пересекаются или параллельны, то они лежат в одной плоскости. Однако в пространстве две прямые могут быть расположены так, что они не лежат в одной плоскости, т. е. не существует такой плоскости, которая проходит через обе эти прямые. Ясно, что такие прямые не пересекаются и не параллельны.

Определение

Две прямые называются **скрещивающимися**, если они не лежат в одной плоскости.

Наглядное представление о скрещивающихся прямых дают две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (рис. 19).

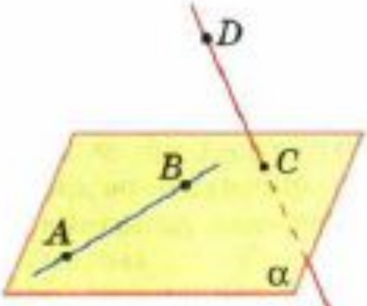
Докажем теорему, которая выражает признак скрещивающихся прямых.

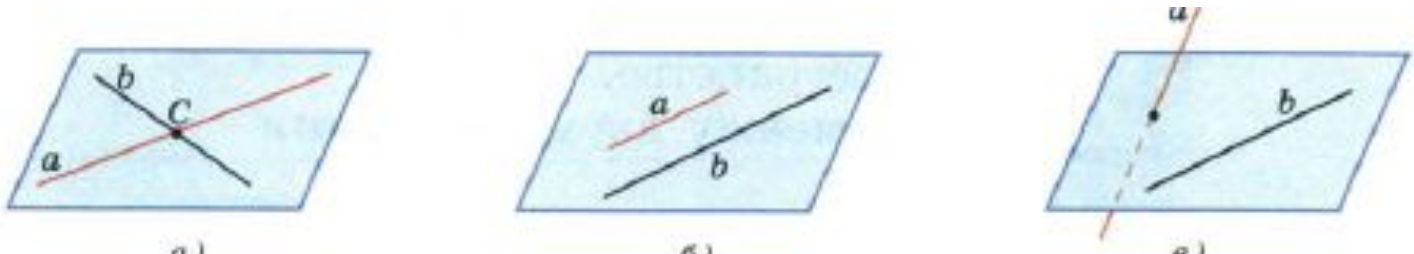
Теорема

Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.

Доказательство

Рассмотрим прямую AB, лежащую в плоскости α, и прямую CD, пересекающую эту плоскость в точке C, не лежащей на прямой AB (рис. 20). Докажем, что AB и CD — скрещивающиеся прямые, т. е. они не лежат в одной плоскости. Действительно, если допустить, что прямые AB и CD лежат в некоторой плоскости β, то плоскость β будет проходить через прямую AB и точку C и поэтому совпадет с плоскостью α. Но это невозможно, так как прямая CD не лежит





а) Пересекающиеся прямые

б) Параллельные прямые

в) Скрещивающиеся прямые

Рис. 21

б) **прямые параллельны,** т. е. лежат в одной плоскости и не пересекаются (рис. 21, *б*);

в) **прямые скрещиваются,** т. е. не лежат в одной плоскости (рис. 21, *в*).

Докажем еще одну теорему о скрещивающихся прямых.

Теорема

Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим скрещивающиеся прямые AB и CD (рис. 22). Докажем, что через прямую AB проходит плоскость, параллельная прямой CD, и такая плоскость только одна.

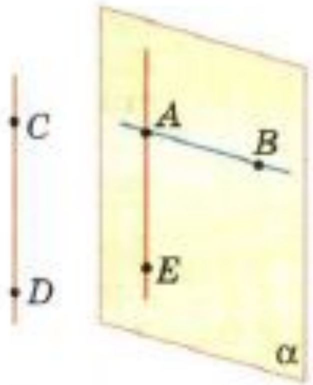


Рис. 22

Проведем через точку A прямую AE, параллельную прямой CD, и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямые AB и AE. Так как прямая CD не лежит в плоскости α и параллельна прямой AE, лежащей в этой плоскости, то прямая CD параллельна плоскости α.

Ясно, что плоскость α — единственная плоскость, проходящая через прямую AB и параллельная прямой CD. В самом деле, любая другая плоскость, проходящая через прямую AB, пересекается с прямой AE, а значит, пересекается и с параллельной ей прямой CD. Теорема доказана.

Наглядной иллюстрацией этой теоремы служат две дороги, одна из которых проходит по эстакаде, а другая — под эстакадой (см. рис. 19). Нижняя дорога лежит в плоскости земли, параллельной дороге на эстакаде. Ясно, что и через дорогу на эстакаде проходит плоскость, параллельная плоскости земли, а значит, параллельная нижней дороге.

8 Углы с сонаправленными сторонами

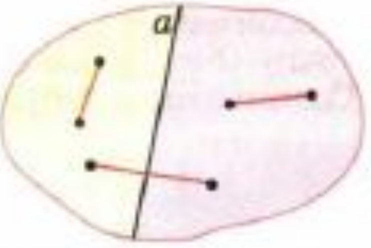


Рис. 23

Согласно одной из аксиом (см. приложение 2) любая прямая a, лежащая в плоскости, разделяет эту плоскость на две части, называемые **полуплоскостями** (рис. 23). Прямая a называется **границей** каждой из этих полуплоскостей. Любые две точки одной и той же полуплоскости лежат по одну сторону от прямой a, а любые две точки разных полуплоскостей — по разные стороны от этой прямой (см. рис. 23).

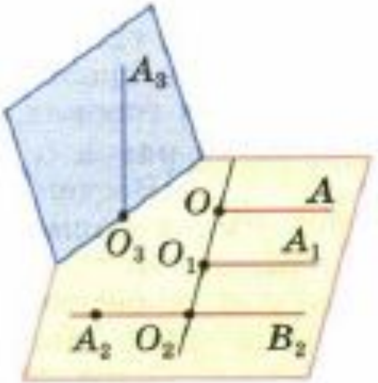


Рис. 24

Два луча OA и O_1A_1, не лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными,** если они параллельны и лежат в одной полуплоскости с границей OO_1. Лучи OA и O_1A_1, лежащие на одной прямой, называются **сонаправленными,** если они совпадают или один из них содержит другой. На рисунке 24 лучи OA и O_1A_1, а также лучи A_2B_2 и O_2B_2 сонаправлены, а лучи OA и O_2A_2, OA и O_3A_3, O_2A_2 и O_2B_2 не являются сонаправленными (объясните почему). Докажем теорему об углах с сонаправленными сторонами.

Теорема

Если стороны двух углов соответственно сонаправлены, то такие углы равны.

Доказательство

Ограничимся рассмотрением случая, когда углы O и O_1 с соответственно сонаправленными сторонами лежат в разных плоскостях, и докажем, что $\angle O = \angle O_1$.

Отметим на сторонах угла O какие-нибудь точки A и B и отложим на соответственных сторонах угла O_1 отрезки $O_1A_1 = OA$ и $O_1B_1 = OB$ (рис. 25). Так как лучи OA и O_1A_1 сонаправлены и $OA = O_1A_1$, то получится параллелограмм OAA_1O_1 и, следовательно, $AA_1 \parallel OO_1$ и $AA_1 = OO_1$. Аналогично получаем: $BB_1 \parallel OO_1$ и $BB_1 = OO_1$. Отсюда следует, что $AA_1 \parallel BB_1$ и $AA_1 = BB_1$, а, значит, ABB_1A_1 — параллелограмм и $AB = A_1B_1$.

Сравним теперь треугольники AOB и $A_1O_1B_1$. Они равны по трем сторонам, и поэтому $\angle O = \angle O_1$. Теорема доказана.

Замечание

При доказательстве мы неявно воспользовались тем, что отрезки AB и A_1B_1 не пересекаются (в противном случае параллелограммом оказалась бы фигура AB_1BA_1, а не ABB_1A_1). Докажем это. Допустим, что отрезки AB и A_1B_1 пересекаются. Тогда плоскости AOB и $A_1O_1B_1$ пересекаются по некоторой прямой a. Поскольку $OA \parallel O_1A_1$, то $OA \parallel A_1O_1B_1$, поэтому $a \parallel OA$ (см. п. 6).

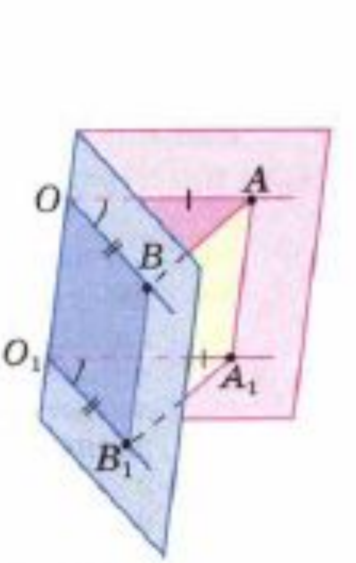


Рис. 25

Аналогично $a \parallel OB$. Но этого не может быть, так как через точку O проходит одна прямая, параллельная прямой a. Следовательно, отрезки AB и A_1B_1 не пересекаются. △

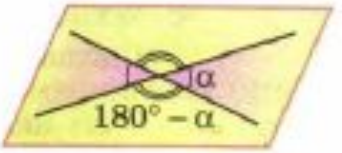


Рис. 26

9 Угол между прямыми

Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и образуют четыре неразвернутых угла. Если известен один из этих углов, то можно найти и другие три угла (рис. 26). Пусть α — тот из углов, который не превосходит любого из трех остальных углов. Тогда говорят, что **угол между пересекающимися прямыми равен α**. Очевидно, $0° < \alpha \leqslant 90°$.

Введем теперь понятие угла между скрещивающимися прямыми. Пусть AB и CD — две скрещивающиеся прямые (рис. 27, *а*). Через произвольную точку M_1 проведем прямые A_1B_1 и C_1D_1, соответственно параллельные прямым AB и CD (рис. 27, *б*).

Если угол между прямыми A_1B_1 и C_1D_1 равен φ, то будем говорить, что **угол между скрещивающимися прямыми AB и CD равен φ**.

Докажем, что угол между скрещивающимися прямыми не зависит от выбора точки M_1. Действительно, возьмем любую другую точку M_2 и проведем через нее прямые A_2B_2 и C_2D_2, соответственно параллельные прямым AB и CD (см. рис. 27, *б*). Так как $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $C_1D_1 \parallel C_2D_2$ (объясните почему), то стороны углов с вершинами M_1 и M_2 попарно сонаправлены (на рис. 27, *б* такими углами являются $\angle A_1M_1C_1$ и $\angle A_2M_2C_2$, $\angle A_1M_1D_1$ и $\angle A_2M_2D_2$ и т. д.). Поэтому эти углы соответственно равны. Отсюда следует, что угол между прямыми A_2B_2 и C_2D_2 также равен φ.

В качестве точки M_1 можно взять любую точку на одной из скрещивающихся прямых. На рисунке 27, *в* на прямой CD отмечена точка M и через нее проведена прямая $A'B'$, параллельная AB. Угол между прямыми $A'B'$ и CD также равен φ.

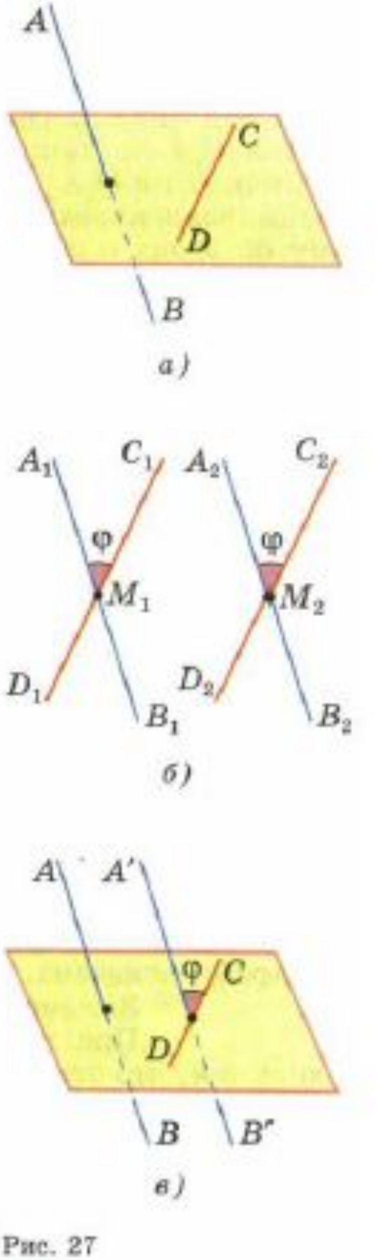


Рис. 27

Допустим, что плоскости α и β не параллельны. Тогда они пересекаются по некоторой прямой c. Мы получили, что плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и пересекает плоскость β по прямой c. Отсюда следует (по свойству 1^0, п. 6), что прямые a и c параллельны.

Но плоскость α проходит также через прямую b, параллельную плоскости β. Поэтому $b \parallel c$. Таким образом, через точку M проходят две прямые a и b, параллельные прямой c. Но это невозможно, так как по теореме о параллельных прямых через точку M проходит только одна прямая, параллельная прямой c. Значит, наше допущение неверно и, следовательно, $\alpha \parallel \beta$. Теорема доказана.

11 Свойства параллельных плоскостей

Рассмотрим два свойства параллельных плоскостей.

1^0. Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.

Наглядным подтверждением этого факта служат линии пересечения пола и потолка со стеной комнаты — эти линии параллельны.

Для доказательства данного свойства рассмотрим прямые a и b, по которым параллельные плоскости α и β пересекаются с плоскостью γ (рис. 30). Докажем, что прямые a и b параллельны. Эти прямые лежат в одной плоскости (в плоскости γ) и не пересекаются. В самом деле, если бы прямые a и b пересекались, то плоскости α и β имели бы общую точку, что невозможно, так как эти плоскости параллельны.

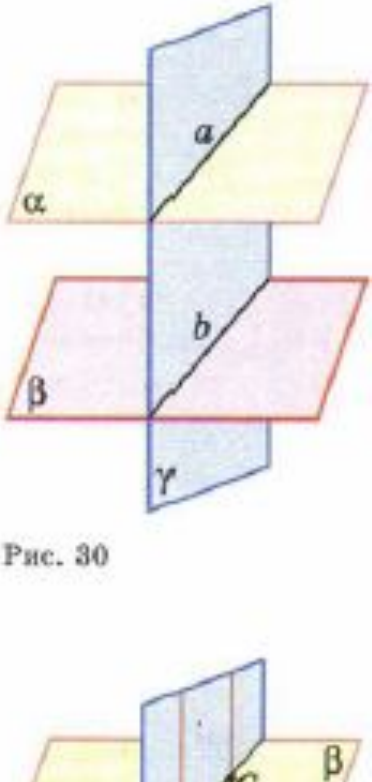


Рис. 30

Итак, прямые a и b лежат в одной плоскости и не пересекаются, т. е. прямые a и b параллельны.

2^0. Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.

Для доказательства этого свойства рассмотрим отрезки AB и CD двух параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями α и β (рис. 31). Докажем, что $AB = CD$. Плоскость γ, проходящая через параллельные прямые AB и CD, пересекается с плоскостями α и β по параллельным прямым AC и BD (свойство 1^0). Таким образом, в четырехугольнике $ABDC$ противоположные стороны попарно параллельны, т. е. $ABDC$ — параллелограмм. Но в параллелограмме противоположные стороны равны, поэтому отрезки AB и CD равны.

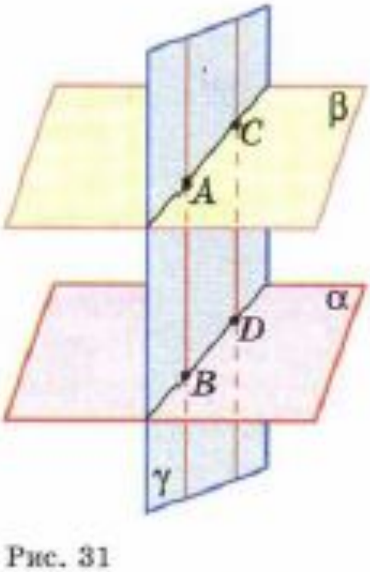


Рис. 31

Практическая часть.

34 Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M, N и P — середины отрезков DA, DB и DC соответственно, точка K лежит на отрезке BN. Выясните взаимное расположение прямых: а) ND и AB; б) PK и BC; в) MN и AB; г) MP и AC; д) KN и AC; е) MD и BC.

44 Прямые OB и CD параллельные, а OA и CD — скрещивающиеся прямые. Найдите угол между прямыми OA и CD, если: а) $\angle AOB = 40°$; б) $\angle AOB = 135°$; в) $\angle AOB = 90°$.

49 Прямая m пересекает плоскость α в точке B. Существует ли плоскость, проходящая через прямую m и параллельная плоскости α?

54 Точка B не лежит в плоскости треугольника ADC, точки M, N и P — середины отрезков BA, BC и BD соответственно.
а) Докажите, что плоскости MNP и ADC параллельны.
б) Найдите площадь треугольника MNP, если площадь треугольника ADC равна 48 см^2.