# ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

Алгоритмические звенья, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями первого и второго порядка, получили название ***типовых динамических звеньев***.

- Безынерционное звено (усилительное);
- Апериодическое звено;
- Колебательное звено;
- Идеальное дифференцирующее звено;
- Реальное дифференцирующее звено;
- Идеальное интегрирующее звено;
- Реальное интегрирующее звено;
- Форсирующее звено;
- Звено чистого запаздывания

# ТИПОВЫЕ ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ

1) Безынерционное звено (усилительное)

Безынерционное звено является простейшим среди всех типовых звеньев.

Оно передает сигнал с входа на выход мгновенно, без искажений его формы. В звене может происходить только усиление или ослабление мгновенных значений входной величины.

Математическое описание звена

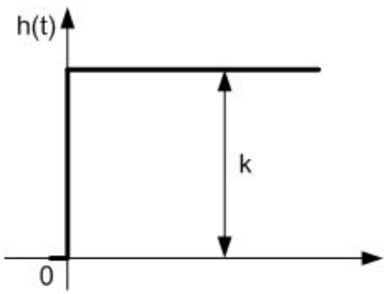
$$y(t) = kx(t).$$

Передаточная функция

$$W(s) = K$$

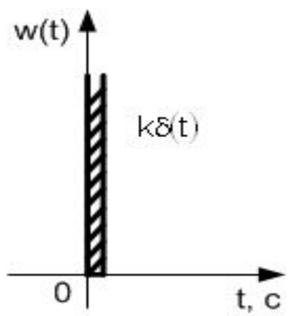
Переходная характеристика

$$h(t) = L^{-1}[W(s)/s] =$$
$$= L^{-1}[K/s] = K \cdot 1(t) = K$$



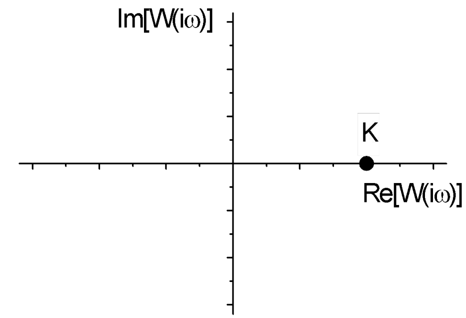

Импульсная характеристика

w(t) = $L^{-1}[W(s)] = K \cdot \delta(t)$



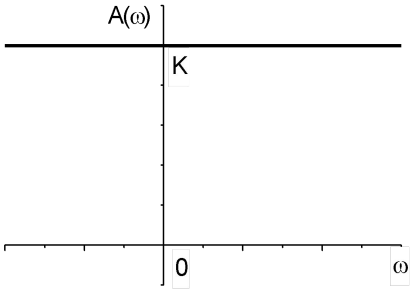

Амплитудно-фазовая характеристика

$$W(j\omega) = K,$$




Амплитудно-частотная характеристика

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = K$$

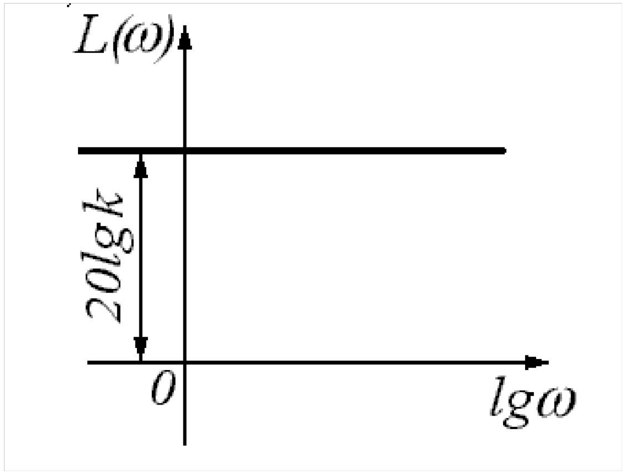



Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \arg W(j\omega) = arctg\left(0/_K\right) = 0$$

# Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

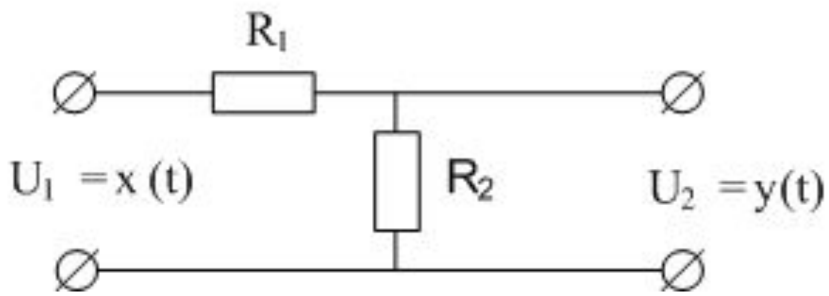
$$L(\omega) = 20\lg A(\omega) = 20\lg K$$




- Сигналы любой частоты (от нуля до бесконечности) проходят через безынерционное звено с одинаковым отношением амплитуд выходной и входной величин, равным *K*.

- Безынерционное звено не создает фазовых сдвигов между входной и выходной величиной.

Примерами таких пропорциональных звеньев могут служить, рычажный механизм, жесткая механическая передача, редуктор, электронный усилитель сигналов на низких частотах, делитель напряжения и др.




$U_1 = (R_1 + R_2)\cdot I$

$U_2 = R_2\cdot I$

$U_2 = [R_2/(R_1 + R_2)]\cdot U_1$

$K = R_2/(R_1 + R_2)$   $y(t) = K\cdot x(t)$

# 2) Апериодическое звено 1-го порядка (инерционное)

Математическое описание звена

$$T \cdot dy(t)/dt + y(t) = K \cdot x(t)$$

Передаточная функция

$$W(s) = K/(Ts + 1)$$

где K – коэффициент усиления;
T – постоянная времени, характеризующая инерционность системы, т.е. продолжительность переходного процесса в ней.

Поскольку *постоянная времени характеризует некоторый временной интервал*, то ее величина должна быть всегда положительной, т.е. (T > 0).

## 2) Апериодическое звено 1-го порядка (инерционное)

**Переходная функция**

$$h(t) = L^{-1}[W(s)\cdot 1/s] =$$

$$= L^{-1}[K/(s\cdot(T\cdot s + 1))] =$$

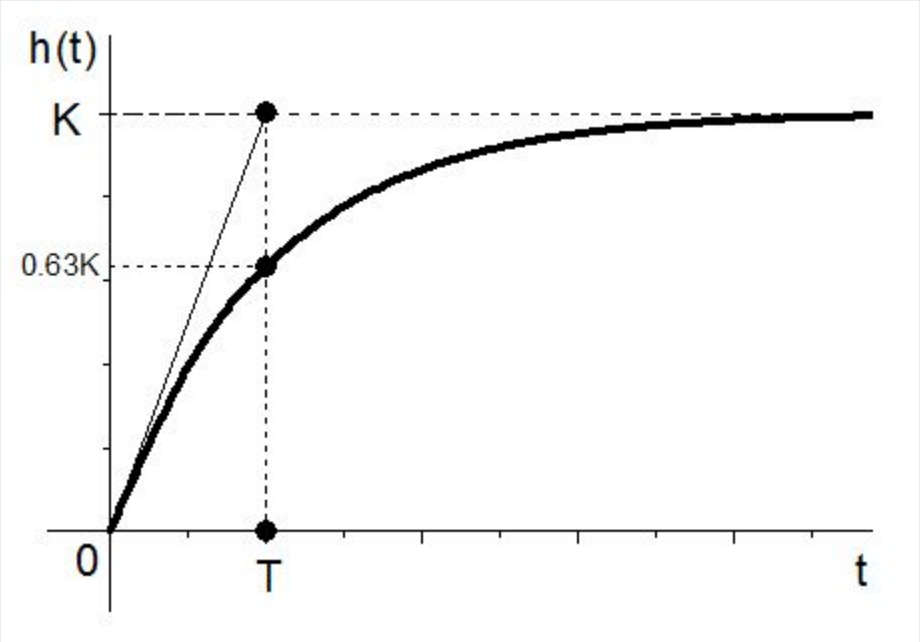
$$= K - K\cdot e^{-t/T} = K\cdot(1 - e^{-t/T})$$

$$h(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

$$t = 0 \quad h(t) = 0$$

$$t = T \quad h(t) = K\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}63K$$

$$t = \infty \quad h(t) = K$$



## Весовая функция

$w(t) = L^{-1}[W(s)] =$

$= L^{-1}[K/(T\cdot s + 1)]$

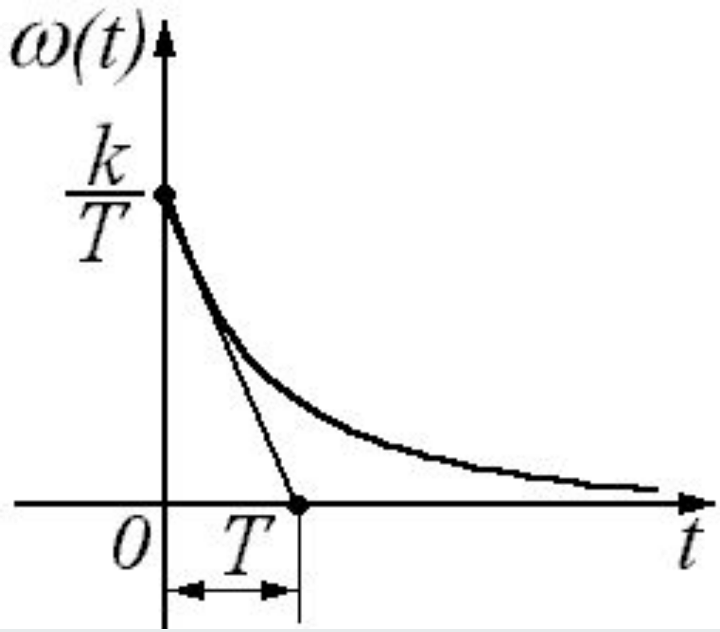
$= (K/T)\cdot e^{-t/T}$

$$\omega(t) = h'(t) = \left( K - Ke^{-\frac{t}{T}} \right)' = \frac{K}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

$$t = 0 \quad \omega(0) = \frac{K}{T}$$

$$t = T \quad \omega(T) = \frac{K}{Te} \approx 0{,}37\,\frac{K}{T}$$

$$t = \infty \quad \omega(\infty) = 0$$



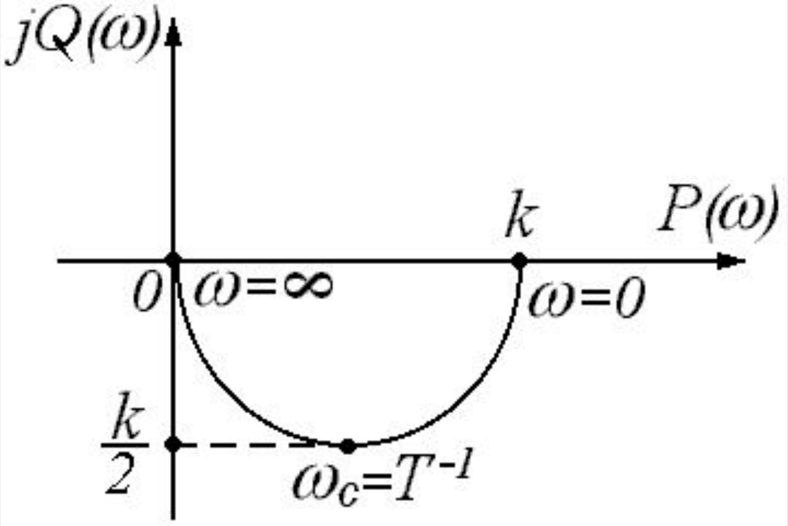
## 2) Апериодическое звено 1-го порядка (инерционное)

**АФЧХ**
**(Амплитудная фазочастотная характеристика)**

$$W(j\omega)=\frac{K}{Tj\omega+1}=\frac{K(1-jT\omega)}{(1+jT\omega)(1-jT\omega)}=$$

$$=\frac{k-jKT\omega}{1+T^2\omega^2}=\mathrm{Re}(\omega)+\mathrm{Im}(\omega)=$$

$$=\frac{K}{1+T^2\omega^2}-j\frac{KT\omega}{1+T^2\omega^2}$$



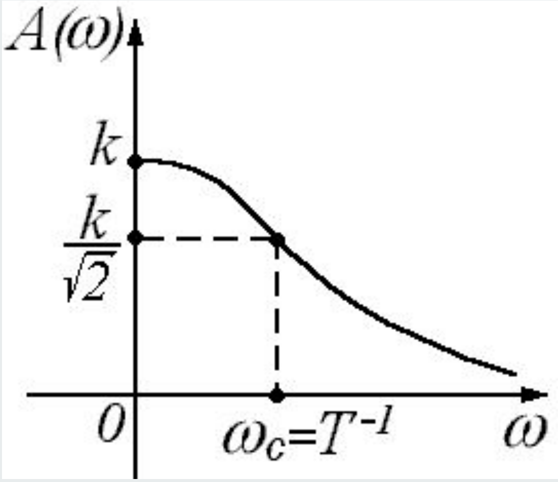
## 2) Апериодическое звено 1-го порядка (инерционное)

**АЧХ**

$$A(\omega)=\sqrt{\mathrm{Re}^2+\mathrm{Im}^2}=$$

$$=\sqrt{\frac{K^2}{\left(1+T^2\omega^2\right)}+\frac{K^2T^2\omega^2}{\left(1+T^2\omega^2\right)}}=$$

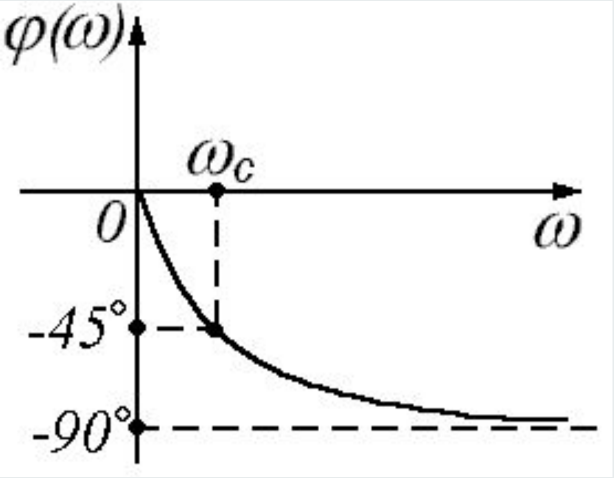
$$=\frac{K\sqrt{1+T^2\omega^2}}{1+T^2\omega^2}=\frac{K}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}$$




**ФЧХ**

$$\varphi(\omega)=arctg\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}=arctg\frac{-kT\omega}{k}=$$

$$=arctg(-T\omega)=-arctg(T\omega)$$

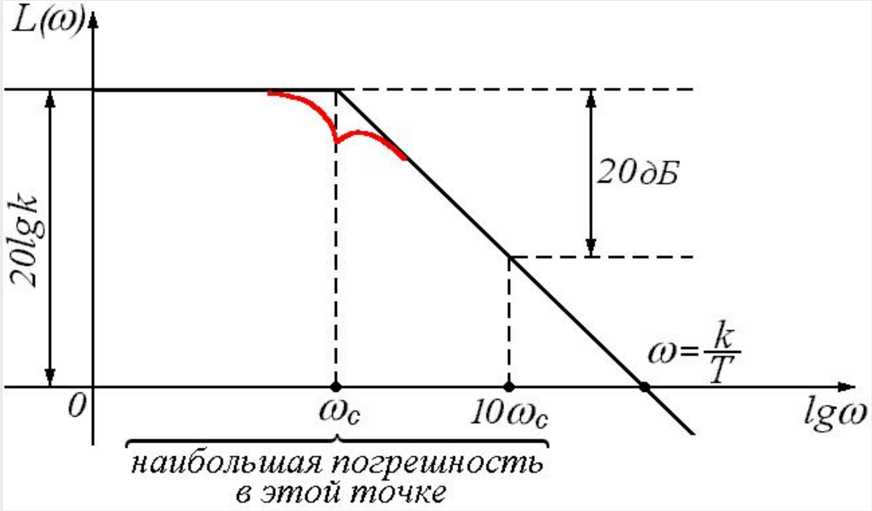


## 2) Апериодическое звено 1-го порядка (инерционное)

- Чем больше частота входного сигнала, тем больше отставание по фазе выходной величины от входной. Максимально возможное отставание равно $90^0$. При частоте $\omega_c=1/T$ сдвиг фаз равен $–45^0$.
- Гармонические сигналы малой частоты ($\omega <\omega_c$) пропускаются звеном хорошо – с отношением амплитуд выходной и входной величин, близким к передаточному коэффициенту $K$. Сигналы большой частоты ($\omega >\omega_c$) плохо пропускаются звеном
- Чем больше постоянная времени $T$, т.е. чем больше инерционность, тем меньше АЧХ вытянута вдоль оси частот, или, тем уже полоса пропускания частот.
- Инерционное звено первого порядка по своим частотным свойствам является *фильтром низкой частоты*.

## ЛАЧХ

$$L(\omega)=20\lg A(\omega)=20\lg\left(\frac{k}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}\right)=$$
$$=20\lg k-20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}$$




$$а)\ \omega<<\frac{1}{T}\quad L(\omega)=20\lg K$$
$$б)\ \omega>>\frac{1}{T}\quad L(\omega)=20\lg K-20\lg T\omega$$

$$a)\ \omega_c=\frac{1}{T}\ L(\omega)=20\lg k$$

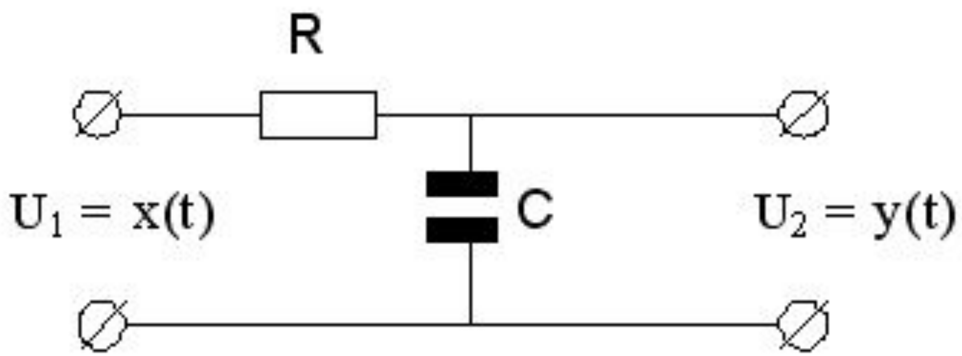
$$б)\ \omega_c=\frac{1}{T}\ L(\omega)=$$

$$20\lg k-20\lg 1=20\lg k$$

$$L(\omega)=20\lg k+20\lg\frac{1}{\sqrt{1+T^2\omega^2}}=$$

$$=20\lg k-20\lg\sqrt{1+T^2\omega^2}=20\lg k-\underbrace{10\lg 2}_{3дБ}$$

Примерами апериодического звена I-ого порядка могут служить: электрический RC-фильтр, термоэлектрический преобразователь, резервуар с сжатым газом и т.п.




$$I = C \cdot dU_2/dt$$

$$U_1 = U_2 + R \cdot I = U_2 + RC \cdot dU_2/dt$$

$$T \cdot dy(t)/dt + y(t) = x(t)$$

$$T = C \cdot R$$

## 3) Интегрирующее звено

Математическое описание звена

$$dy(t)/dt = K \cdot x(t)$$

$$T \cdot dy(t)/dt = x(t)$$

В интегральной форме это уравнение имеет вид:

$$y(t) = K\int_0^t x(\tau)d\tau \qquad y(t) = \frac{1}{T}\int_0^t x(\tau)d\tau$$

Передаточная функция

$$W(s) = K/s = 1/T \cdot s$$

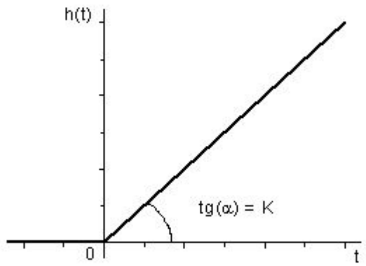
где K – коэффициент усиления;
T – постоянная времени (время интегрирования);
T = 1/K.

# 3) Интегрирующее звено

## Переходная характеристика

$h(t) = L^{-1}[W(s)/s] =$

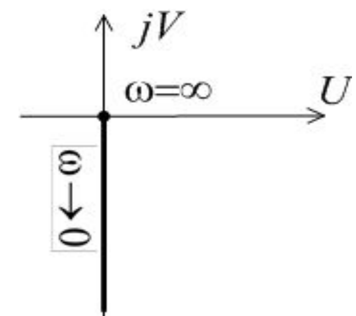
$L^{-1}[K/s^2] = K \cdot t = t/T$




## Амплитудно-фазовая характеристика

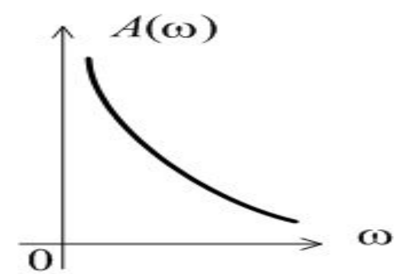
$W(j\omega) = K/j\omega = -K\omega \cdot j/\omega^2 =$

$0 - (K/\omega) \cdot j = 0 - (1/T\omega) \cdot j$




## Амплитудно-частотная характеристика

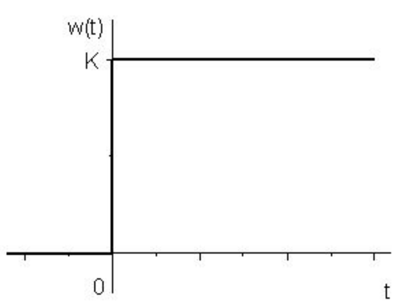
$$A(\omega) = \sqrt{0^2 + (-K/\omega)^2} = K/\omega = 1/T\omega$$




## Импульсная характеристика

$w(t) = L^{-1}[W(s)] = L^{-1}[K/s]$

$= K \cdot 1(t) = (1/T) \cdot 1(t)$

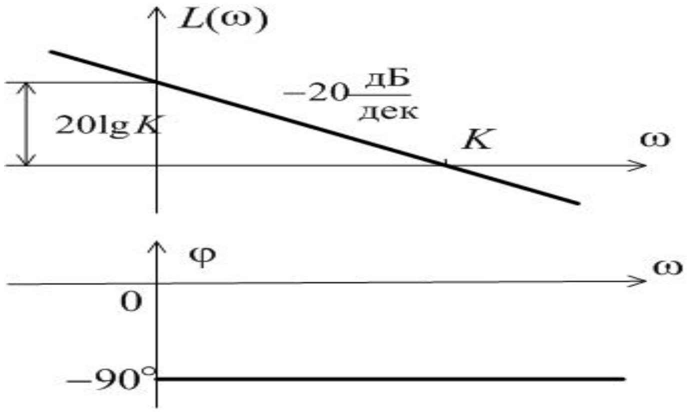



## Фазо-частотная характеристика

$$\varphi(\omega) = \mathrm{arctg}(-(K/\omega)/0) = -\mathrm{arctg}(\infty) = -\pi/2 = -90^\circ$$

# Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

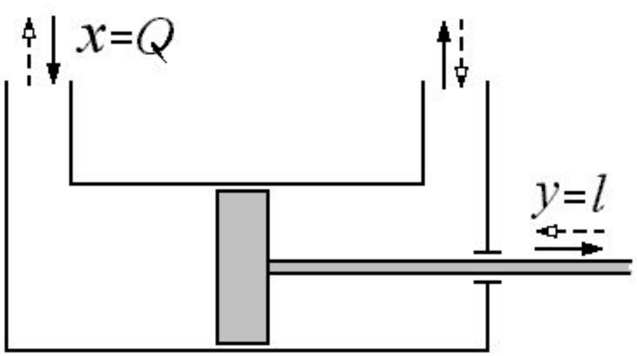
$$L(\omega) = 20 \cdot \lg[A(\omega)] = 20 \cdot \lg(K/\omega) = 20\lg(K) - 20\lg(\omega) = -20\lg(T\omega)$$

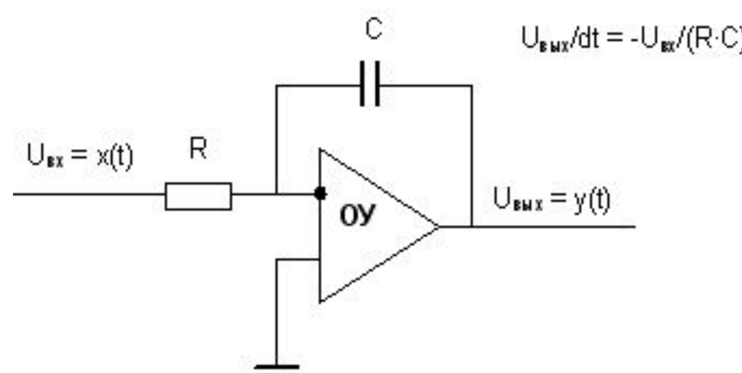



Интегрирующее звено ослабляет высокие частоты и неограниченно (теоретически) усиливает низкие частоты.

Фазовый сдвиг постоянен и равен $-90^0$.

Примерами интегрирующего звена являются операционный усилитель в режиме интегрирования, интегрирующим звеном является также обычный гидравлический демпфер.



# 4) Реальное интегрирующее звено

<u>Математическое описание звена</u>

$$T\frac{d^2y(t)}{dt^2}+\frac{dy(t)}{dt}=kx(t)$$

Передаточная функция

$$Tp^2y(p)+py(p)=kx(p)$$

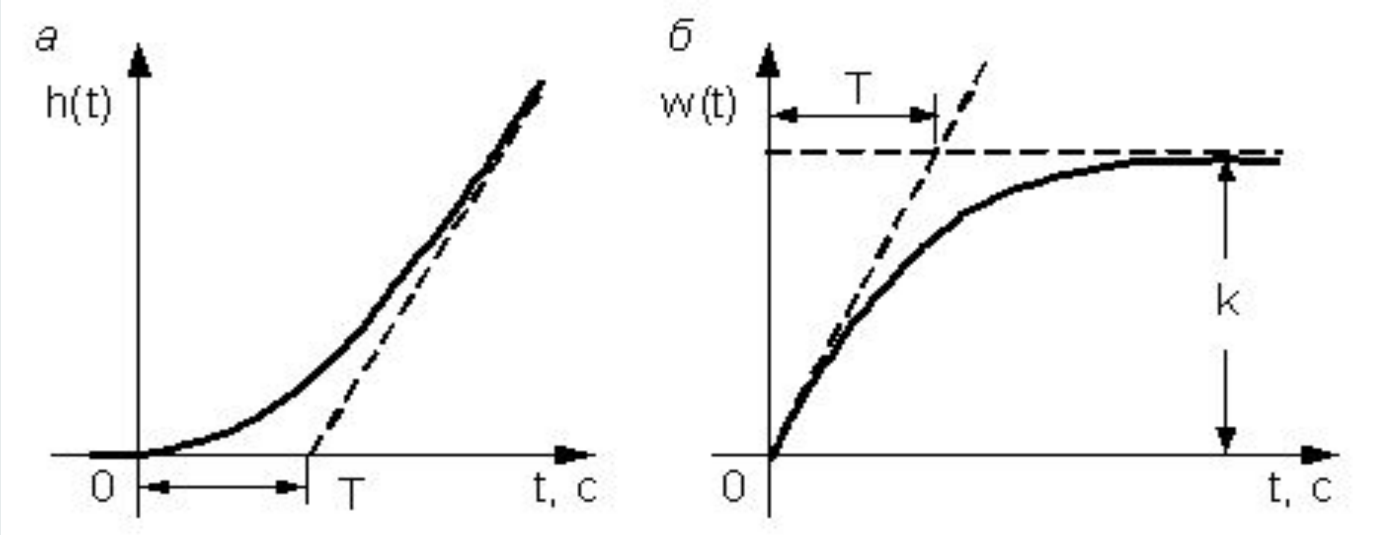
$$y(p)(Tp^2+p)=kx(p)$$

$$W(p)=\frac{k}{Tp^2+p}=\frac{k}{p(Tp+1)}$$

где k – коэффициент усиления;
T – постоянная времени, характеризующая инерционность системы, т.е. продолжительность переходного процесса в ней.
<u>Реальное интегрирующее звено представляет собой последовательное соединение идеального интегрирующего звена и апериодического.</u>

# 4) Реальное интегрирующее звено

| **Переходная функция** | **Весовая функция** |
|---|---|
| $$h(t)=k\left(t-T\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)\right)$$ | $$w(t)=k\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right)$$ |



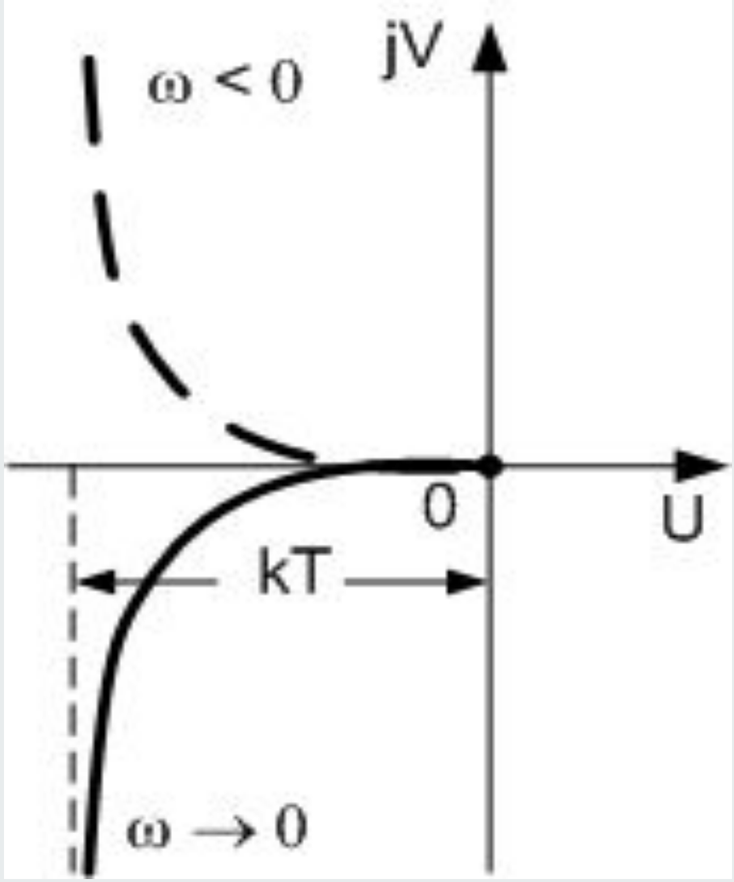
# 4) Реальное интегрирующее звено

**АФЧХ**

$$W(j\omega)=\frac{k}{-T\omega^2+j\omega}=\frac{k\cdot\left(-T\omega^2-j\omega\right)}{T^2\omega^4+\omega^2}=$$

$$=-\frac{kT\omega^2}{T^2\omega^4+\omega^2}-j\frac{k\omega}{T^2\omega^4+\omega^2}=$$

$$=-\frac{kT\omega}{T^2\omega^3+\omega}-j\frac{k}{T^2\omega^3+\omega}$$



# 4) Реальное интегрирующее звено

**АЧХ**

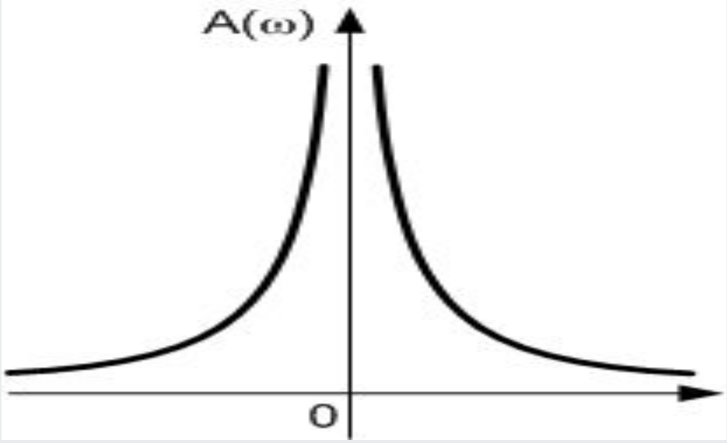
$$A(\omega)=\frac{k\sqrt{T^2\omega^2+1}}{T^2\omega^3+\omega}=$$

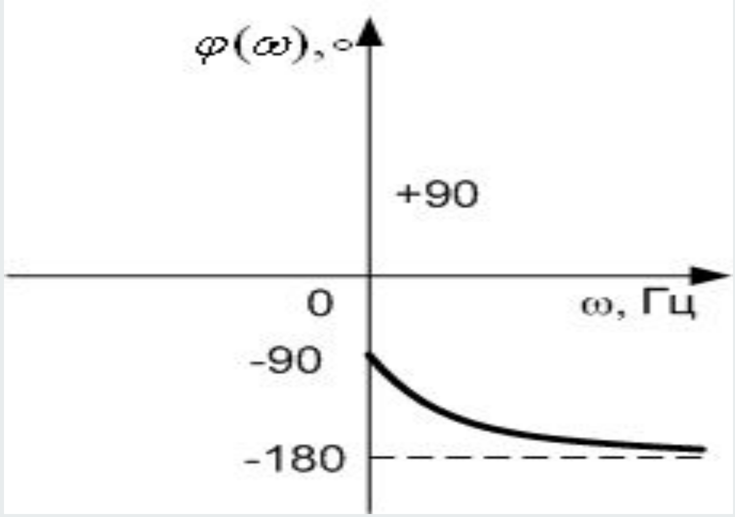
$$=\frac{k}{\omega\sqrt{T^2\omega^2+1}}$$

**ФЧХ**

$$\varphi(\omega)=-arctg\left(-\frac{1}{T\omega}\right)$$

Из характеристик видно, что звено также пропускает сигналы тем сильнее, чем меньше их частота.

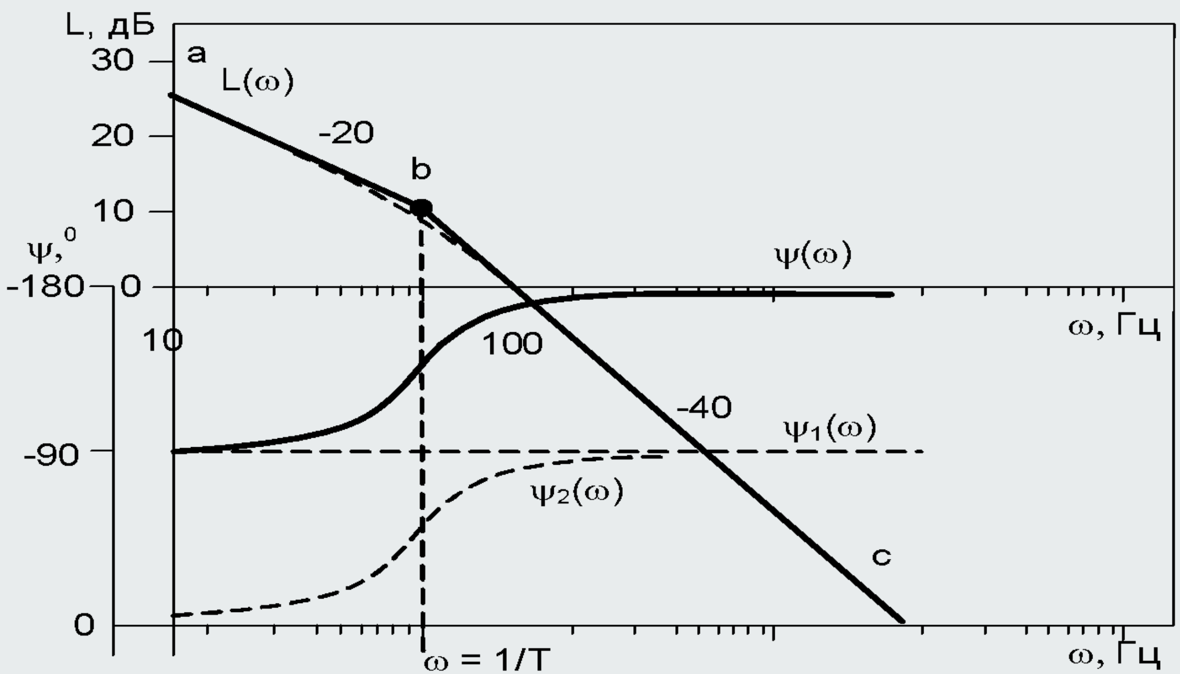


# 4) Реальное интегрирующее звено

**ЛАЧХ**

$$L(\omega) = 20\lg k - 20\lg\omega - 20\lg\sqrt{T^2\omega^2 + 1}$$




Из характеристики видно, что звено приближается к идеальному интегрирующему звену при частотах, меньших сопрягающей частоты, тем точнее, чем меньше рабочая частота по сравнению с сопрягающей.

# 5) Колебательное звено

## Математическое описание звена

$$T^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2T\xi \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kx(t)$$

где k – коэффициент усиления;

T – постоянная времени, характеризующая инерционность системы, т.е. продолжительность переходного процесса в ней.

$\xi$ - коэффициент демпфирования звена (или коэффициент затухания).

В зависимости от величины коэффициента демпфирования различают четыре типа звеньев:

а) колебательное $0 < \xi < 1$;

б) консервативное звено $\xi = 0$;

в) апериодическое звено II порядка $\xi > 1$;

г) неустойчивое колебательное звено $\xi < 0$.

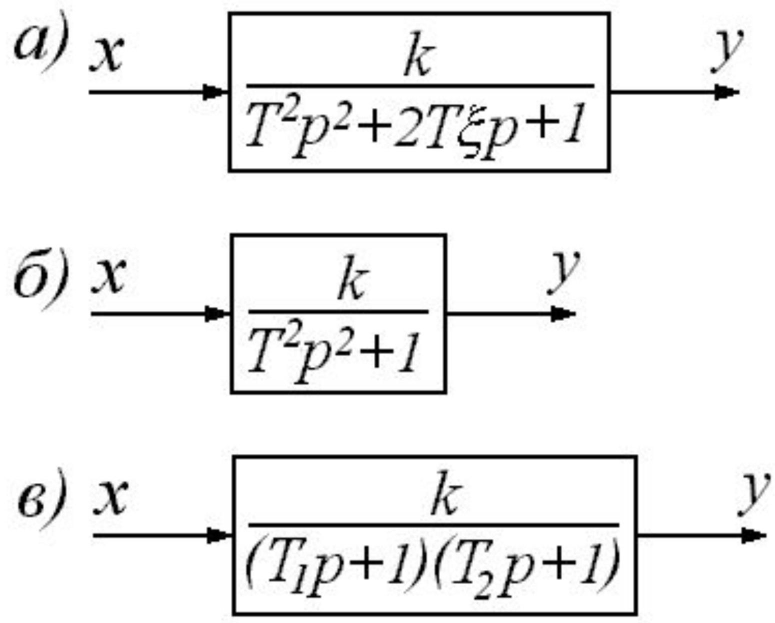
# Передаточная функция:

$$а)\; W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 2T\xi p + 1}$$

$$б)\; W(p) = \frac{k}{T^2p^2 + 1}$$

$$в)\; W(p) = \frac{k}{T_1T_2p^2 + (T_1 + T_2)p + 1} =$$

$$= \frac{k}{(T_1p + 1)(T_2p + 1)}$$



# Переходная функция

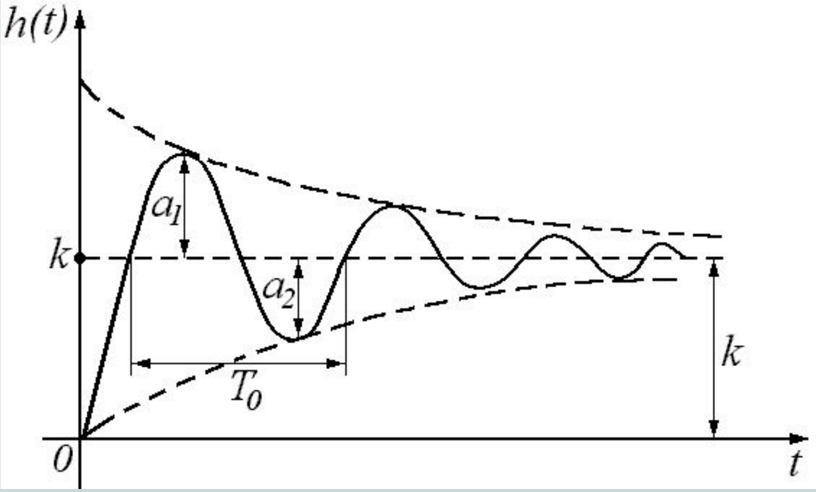
$$a)\ h(t) = k\left(1 - \frac{e^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0 t + \varphi\right)\right),$$

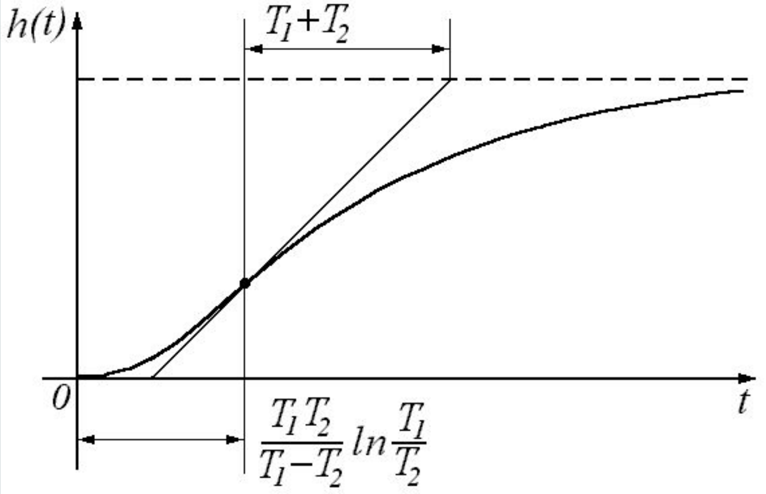
$$\alpha = \frac{\xi}{T};\ \omega_0 = \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T};$$

$$\varphi = arctg\,\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi};\ T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$\text{в})\ h(t) = k\left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_1}} + \frac{T_2}{T_1 - T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$

$$T_1 = \frac{T}{\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}} \quad T_2 = \frac{T}{\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}},\ T_1 > T_2$$



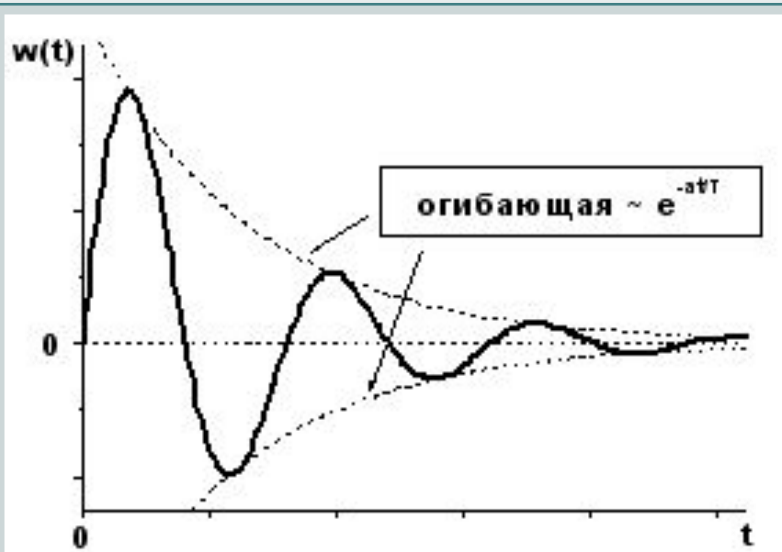



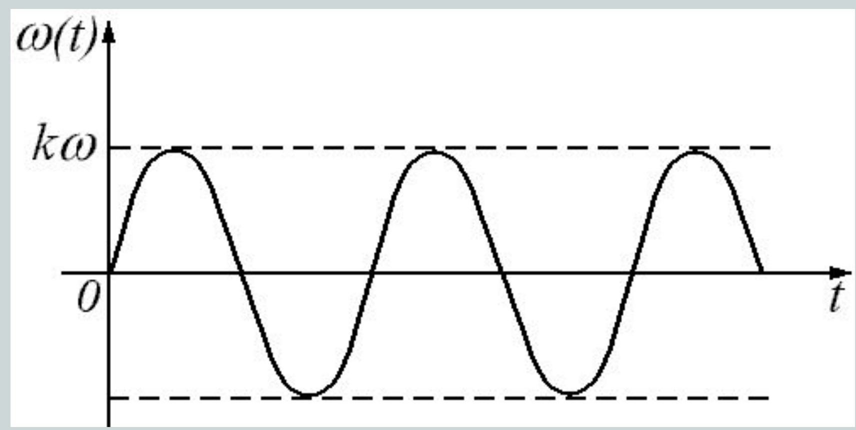
# Весовая функция

$$w(t)=\frac{K\cdot e^{-\frac{\xi t}{T}}}{T\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{T}\cdot t\right)$$

$$в)\ w(t)=h'(t)=k\cdot\left(-\frac{T_1}{T_1-T_2}\cdot\left(-\frac{1}{T_1}\right)\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}+\right.$$

$$\left.+\frac{T_2}{T_1-T_2}\cdot\left(-\frac{1}{T_2}\right)\cdot e^{-\frac{t}{T_2}}\right)=\frac{k}{T_1-T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}}-e^{-\frac{t}{T_2}}\right)$$



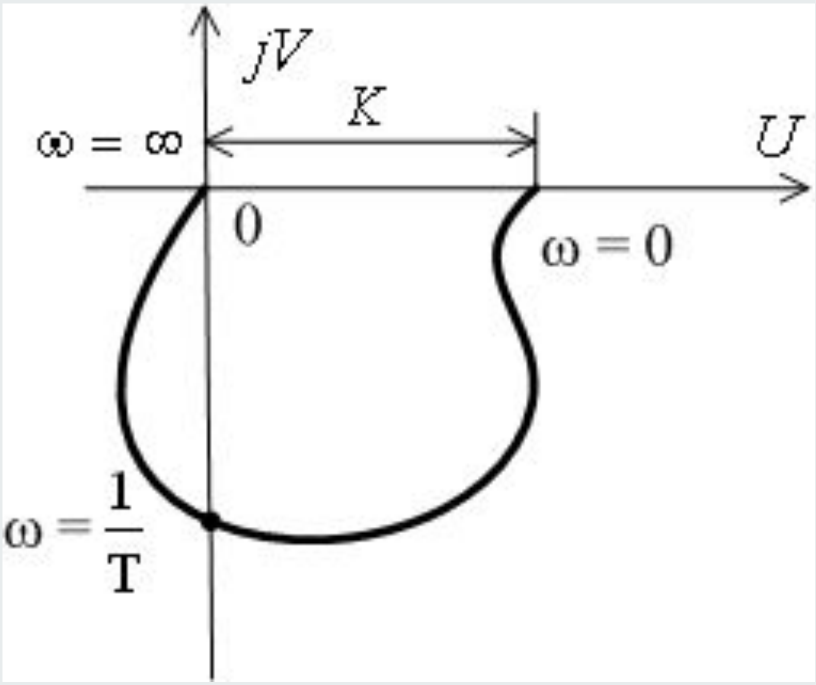
# Частотные характеристики колебательного звена

**АФЧХ**

$$W(j\omega)=\frac{K-KT^2\omega^2}{\left(1-T^2\omega^2\right)^2+4\xi^2T^2\omega^2}-$$

$$-j\cdot\frac{2K\xi T\omega}{\left(1-T^2\omega^2\right)^2+4\xi^2T^2\omega^2}=$$

$$=U(\omega)+j\cdot V(\omega)$$




**АФХ для консервативного звена**

$$W(j\omega)=\frac{k}{T^2(j\omega)^2+1}=\frac{k}{1-T^2\omega^2}$$

**Для апериодического звена 2-го порядка**

$$\omega=\frac{1}{\sqrt{T_1T_2}}$$

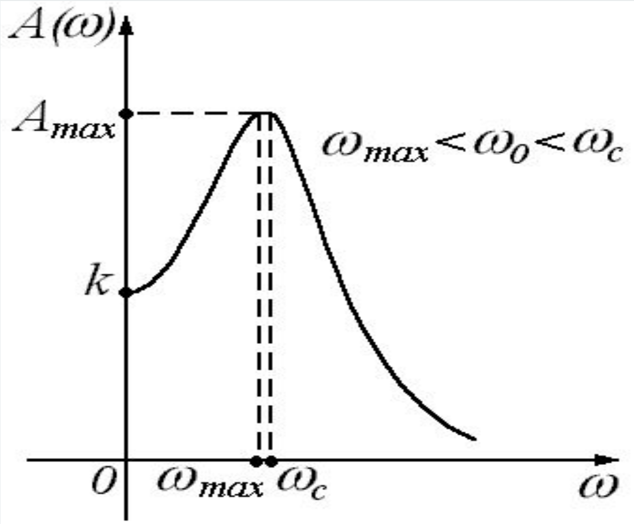
## АЧХ

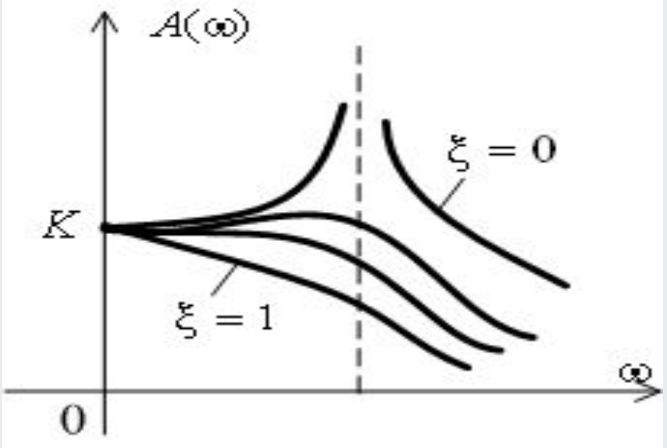
$$A(\omega)=\frac{k}{\sqrt{\left(1-T^2\omega^2\right)^2+4T^2\xi^2\omega^2}}$$

$$\omega_{\max}=\omega_c\sqrt{1-2\xi^2}$$

Максимум (резонансный пик) имеет амплитуду

$$A_{\max}=A(\omega_{\max})=k/2\xi\sqrt{1-\xi^2}$$



**ФЧХ:**

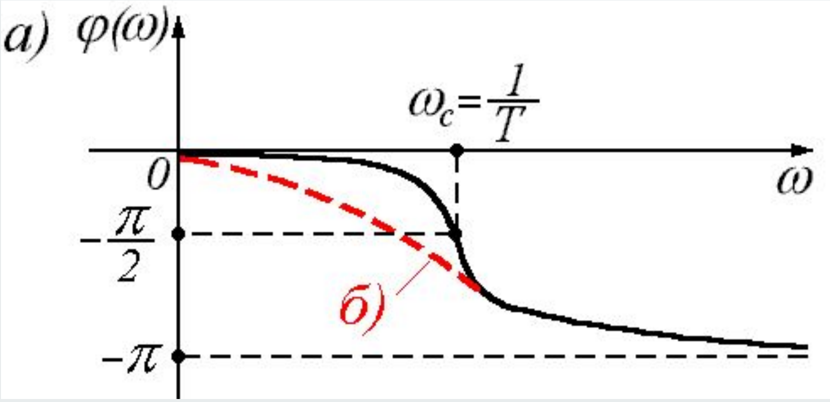
$$а)+б)\ \varphi(\omega)=arctg\frac{Im}{Re}=$$

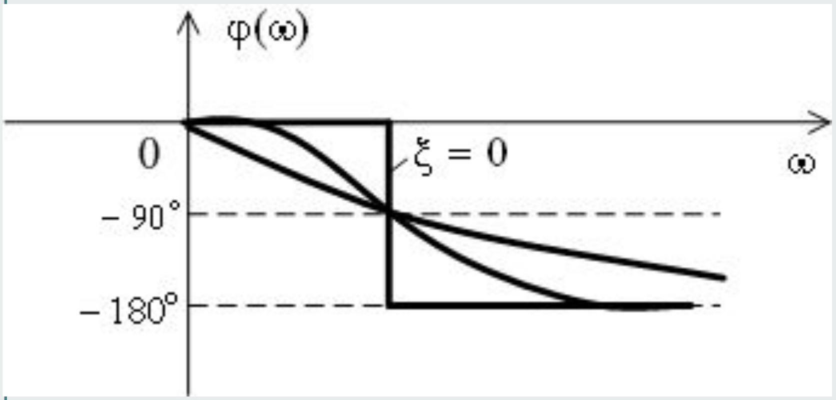
$$arctg\frac{-2\cdot kT\omega\xi}{k\cdot\left(1-T^2\omega^2\right)}=-arctg\left(\frac{2T\xi\omega}{1-T^2\omega^2}\right)$$

$$\omega=0 \qquad \varphi(\omega)=0$$

$$\omega=\frac{1}{T} \qquad \varphi(\omega)=-\frac{\pi}{2}$$

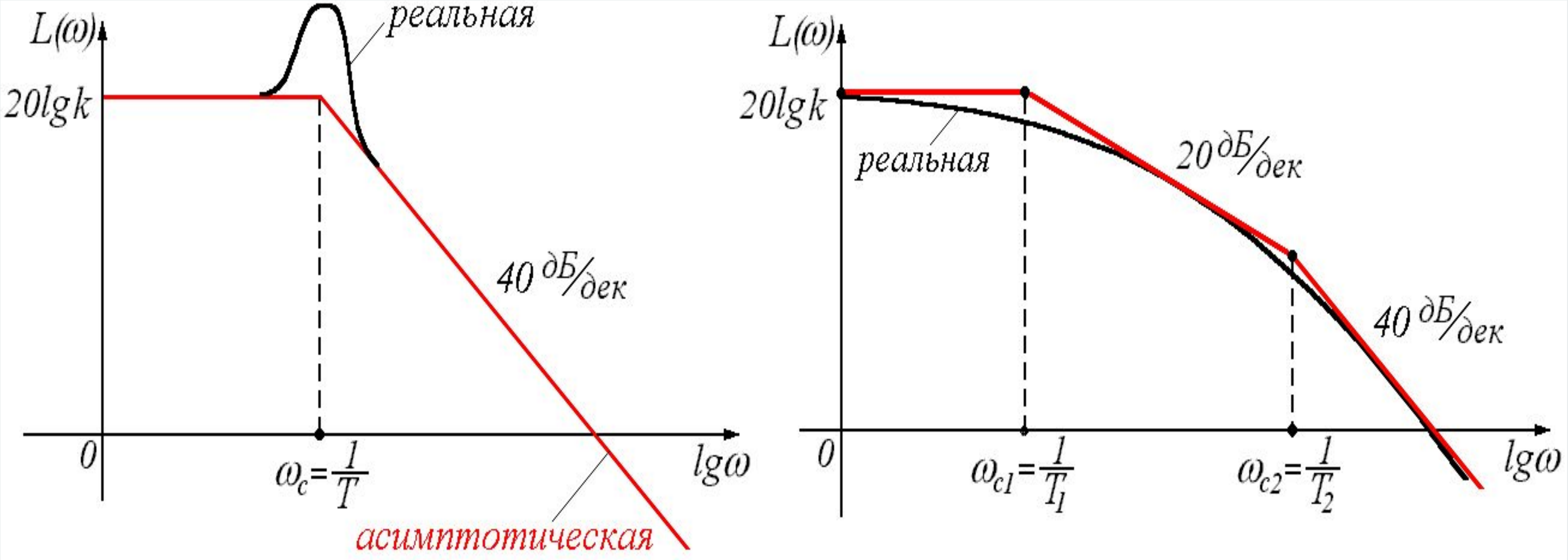
$$\omega=\infty \qquad \varphi(\omega)=-\pi$$



| **ЛАЧХ:** | **Асимптотическая ЛАЧХ колебательного звена:** |
| --- | --- |
| $$L(\omega)=20\lg A(\omega)=$$ $$=20\lg k-20\lg\sqrt{\left(1-T^2\omega^2\right)^2+4T^2\xi^2\omega^2}$$ $$L(\omega)=20\lg K-20\lg(1+T^2\omega^2)$$ | *Область низких частот:* $T\omega << 1$; т.е. $\omega << 1/T$; можно пренебречь выражением $T^2\omega^2$. Получаем: $L(\omega) = 20\lg K$. Это горизонтальная прямая. *Область высоких частот:* $T\omega >> 1$; т.е. $\omega >> 1/T$; можно пренебречь 1 в сравнении с выражением $T^2\omega^2$. Получаем $L(\omega) = 20\lg K - 40\lg(T\omega)$. Это – уравнение прямой с наклоном -40 дб/декаду. Асимптотическую ЛАЧХ может быть получена при $\xi$ =1 |

**ЛАЧХ**




В районе сопрягающей частоты $\omega_c = 1/T$ имеется максимум (так называемый "горб"), из-за чего поведение асимптотической ЛАХ в этой области может существенно отличаться от истинной.

Это явление называется ***резонансом***.

# 6) Идеальное дифференцирующее звено

Математическое описание звена $$x_2 = k\frac{dx_1}{dt}$$

В операторной форме это уравнение имеет вид:

$$x_2 = k\ p\ x_1$$

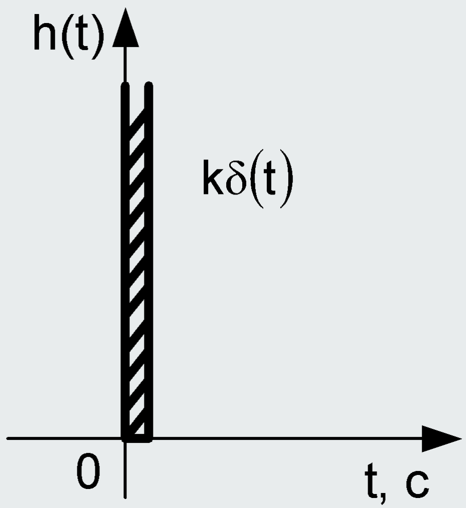
Передаточная функция

W(s) = K·s

где K – коэффициент усиления;

# 6) Идеальное дифференцирующее звено

| **Переходная функция** | **Амплитудно-фазовая характеристика** |
|---|---|
| $h(t) = K^* 1'(t) = K\,\delta(t)$ | $W(j\omega) = Kj\omega$ |




**Амплитудно-частотная характеристика**

$$A(\omega) = K\omega$$

**Фазо-частотная характеристика**

$$\varphi(\omega) = +90^{\circ}$$

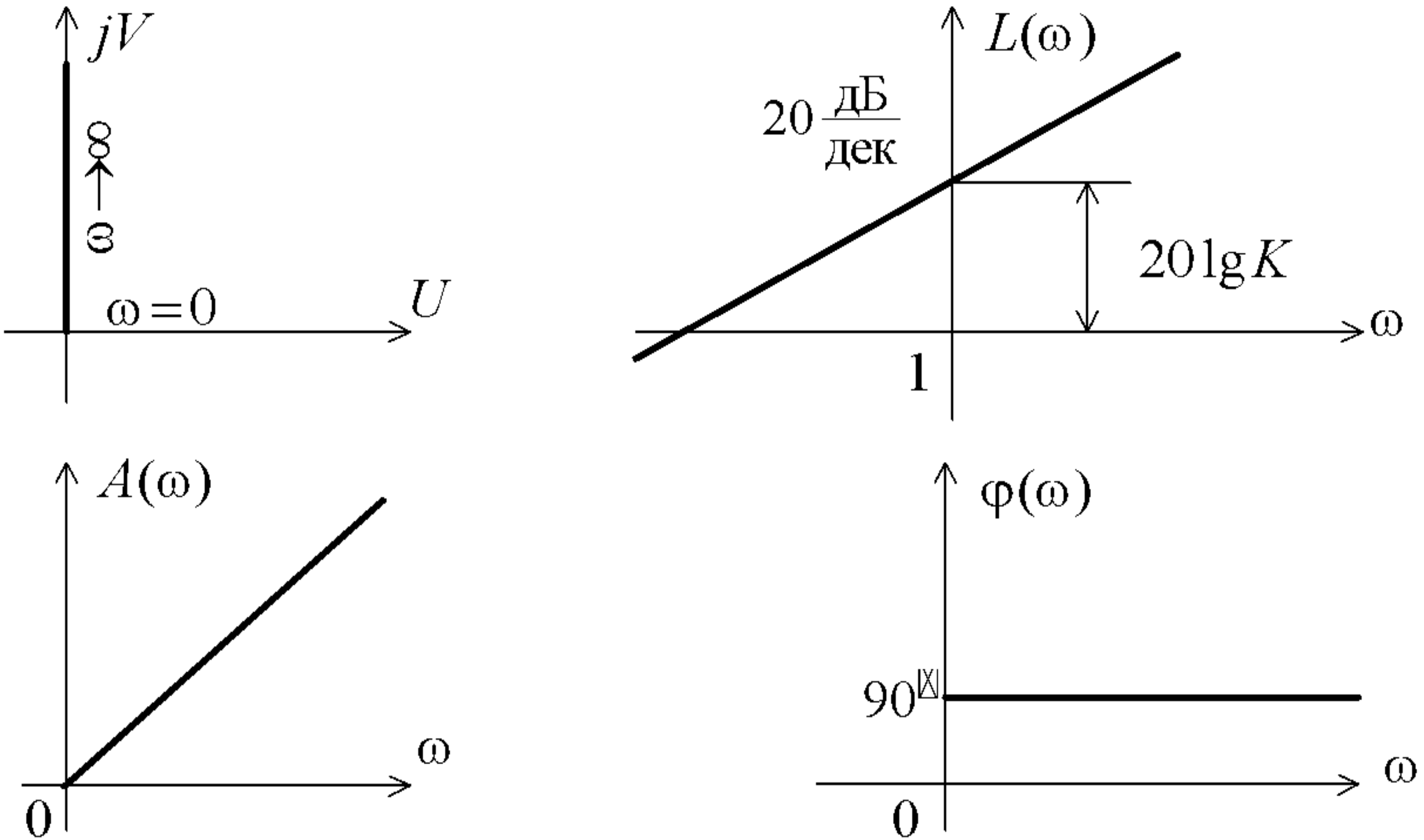
**Весовая функция**

$$w(t) = K\,\delta'(t)$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

$$L(\omega) = 20\lg K + 20\lg\omega$$

# Частотные характеристики звена



# 6) Идеальное дифференцирующее звено

Из характеристик видно, что звено пропускает сигнал тем сильнее, чем выше его частота. Это свойство является в автоматических системах часто нежелательным, так как звено может в значительной степени повышать уровень действующих в системе помех, которые, как правило, являются высокочастотными.

Единственным идеальным дифференцирующим звеном является тахогенератор постоянного тока, если в качестве входной величины рассматривать угол поворота его ротора, а в качестве выходной – напряжение якоря U.

Приближенно в качестве идеального дифференцирующего звена может рассматриваться операционный усилитель в режиме дифференцирования

## 7) Реальное дифференцирующее звено

Дифференциальное уравнением в операторной форме

$$(Tp+1)x_2 = kpx_1$$

Передаточная функция

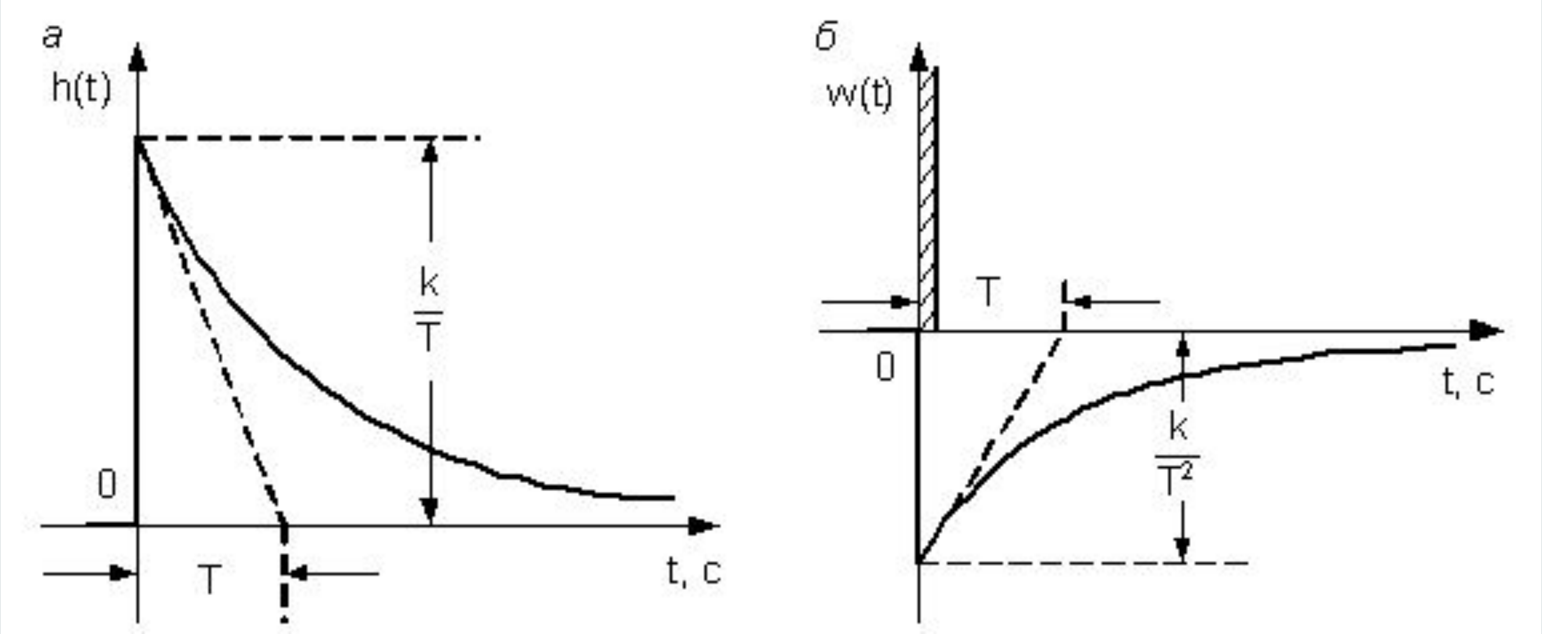
$$W(p) = \frac{k\,p}{1+T\,p}$$

Звено условно можно представить в виде двух включенных последовательно звеньев – идеального дифференцирующего звена и апериодического звена первого порядка.

где K – коэффициент усиления;
T- постоянная времени

# 7) Реальное дифференцирующее звено

| <u>**Переходная функция**</u> | <u>**Функция веса**</u> |
| --- | --- |
| $$h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$$ | $$w(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T}\delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} 1(t)$$ |



# 7) Реальное дифференцирующее звено

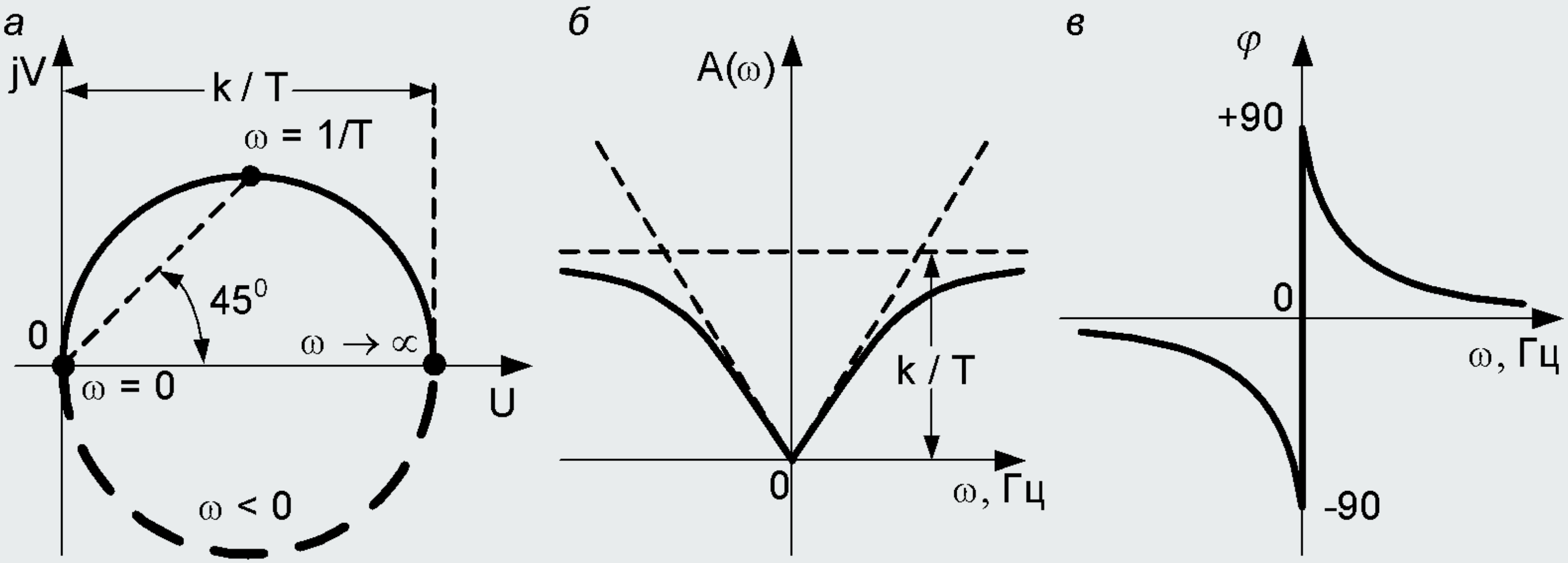
**АФЧХ**

$$W(j\omega)=\frac{kj\omega}{1+j\omega T}$$

**АЧХ, ФЧХ**

$$A(\omega)=\frac{k\omega}{\sqrt{1+\omega^2T^2}};$$

$$\varphi(\omega)=+90^\circ-arctg\,\omega T.$$



# 7) Реальное дифференцирующее звено

Амплитудная характеристика реального звена отличается от амплитудной характеристики идеального дифференцирующего звена (показана пунктиром). Характеристики совпадают в области низких частот. В области высоких частот реальное звено пропускает сигнал хуже, чем идеальное звено.

На высоких частотах фазовый сдвиг постепенно уменьшается, стремясь в пределе к нулю при $\omega \to 0$.

Реальное звено ведет себя подобно идеальному только в области низких частот.

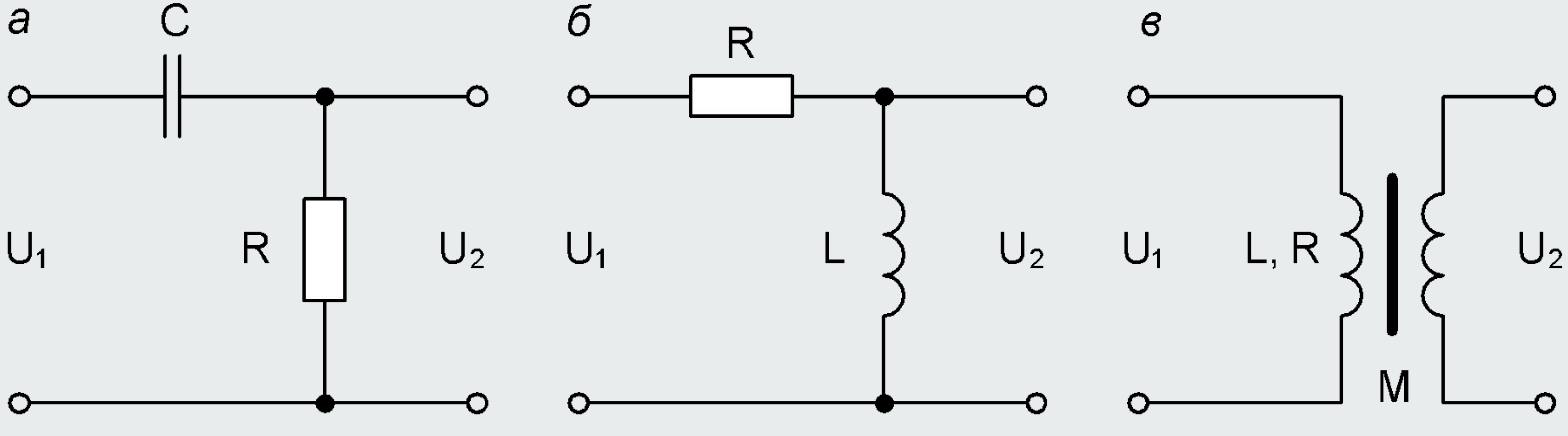
ЛАЧХ

$$L(\omega) = 20\lg\frac{k\omega}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

# 7) Реальное дифференцирующее звено

Примеры реальных дифференцирующих звеньев:

дифференцирующие RC-цепь, RL-цепь и дифференцирующий трансформатор.



## 8) Звено чистого запаздывания

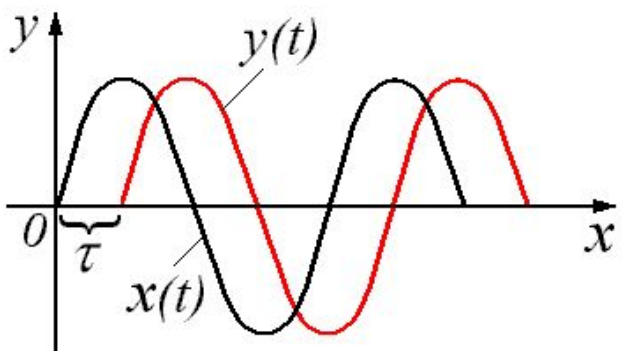
*Звеном чистого запаздывания* называется такое звено, выходная величина которого полностью повторяет входную величину, но со сдвигом во времени на величину $\tau$ (время запаздывания).

Динамика процесса описывается уравнением:

$$y(t) = x(t - \tau)$$

<u>Передаточная функция</u>

$$W(p) = e^{-s\tau}$$




где $\tau$ - длительность запаздывания.

## 8) Звено чистого запаздывания

| **Переходная функция** | **Функция веса** |
| --- | --- |
| $h(t) = 1(t-\tau)$ | $\omega(t) = \delta(1-\tau)$ |
| **АФЧХ**<br>$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau} = \cos\omega\tau - j\sin\omega\tau$<br>**АЧХ**<br>$A(\omega) = \sqrt{\cos^2(\omega\tau) + \sin^2(\omega\tau)} = 1$ | **ФЧХ**<br>$\varphi(\omega) = arctg\dfrac{-\sin\omega\tau}{\cos\omega\tau} = -arctg\left(\dfrac{\sin\omega\tau}{\cos\omega\tau}\right) = arctg(-tg\,\omega\tau) = -\omega\tau$<br>**ЛАЧХ**<br>$L(\omega) = 20\lg(A(\omega)) = 20\lg 1 = 0$ |

# 8) Звено чистого запаздывания