Лекция 1

Тема*: " Исследование функции"*

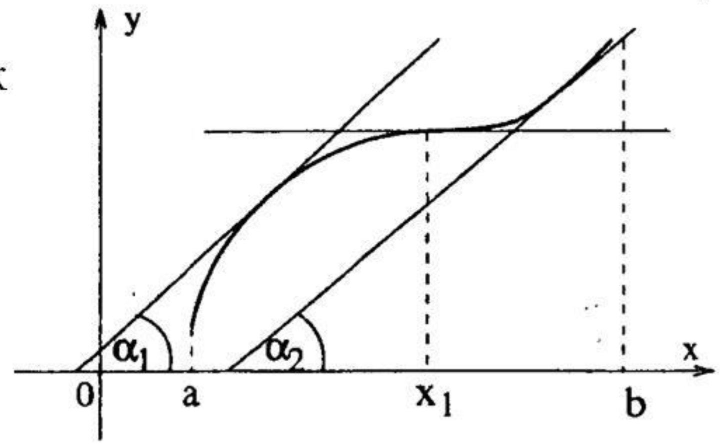
Условия монотонности функции.

Теорема (необходимое условие возрастания функции).
Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ ***возрастает***, то $f'(x) \geq 0$ для $a < x < b$.

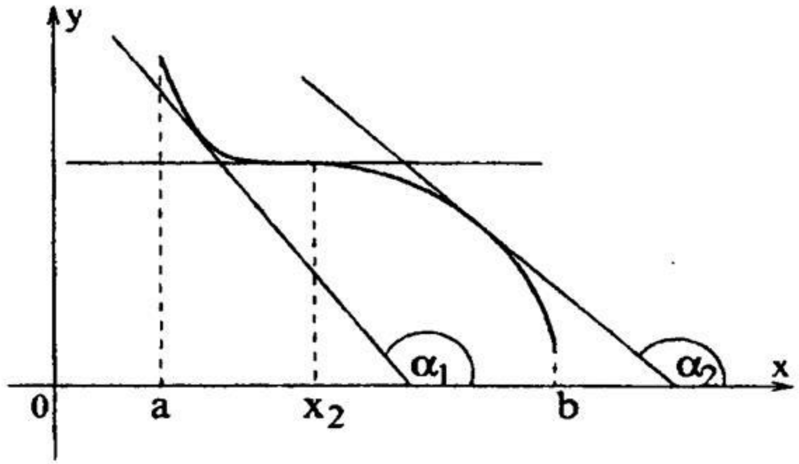
Теорема (необходимое условие убывания функции).
Если дифференцируемая в интервале $(a;b)$ функция $y = f(x)$ ***убывает***, то $f'(x) \leq 0$ для $a < x < b$.

Геометрическая интерпретация теоремы:

График возрастающей функции при перемещении вправо по оси абсцисс поднимается вверх, поэтому касательные к графику образуют острые углы α с положительным направлением оси Ox или, в некоторых точках параллельны ей.
Так как тангенсы острых углов положительны, а в точках, в которых касательные параллельны оси Ox, равны нулю и по геометрическому смыслу производной $tg\alpha = f'(x)$, то для возрастающей функции $f'(x) \geq 0$.



Аналогично, если функция убывает, то касательные к графику функции образуют тупые углы α с положительным направлением оси Ox или, в некоторых точках параллельны ей.
Так как тангенсы тупых углов отрицательны, а в точках, в которых касательные параллельны оси Ox, равны нулю, то для убывающей функции $f'(x) \le 0$.



Теорема (достаточное условие возрастания).
Если непрерывная на $[a;b]$ функция $y = f(x)$ имеет в каждой внутренней точке этого отрезка **положительную производную**, то эта **функция возрастает** на отрезке $[a;b]$.

Теорема (достаточное условие убывания).
Если непрерывная на $[a;b]$ функция $y = f(x)$ имеет в каждой внутренней точке этого отрезка **отрицательную производную**, то эта **функция убывает** на отрезке $[a;b]$.

Понятие экстремума функций.

Определение. ***Экстремумом функции*** $y = f(x)$ называется ее наибольшее или наименьшее значения на некотором множестве значений аргумента x .

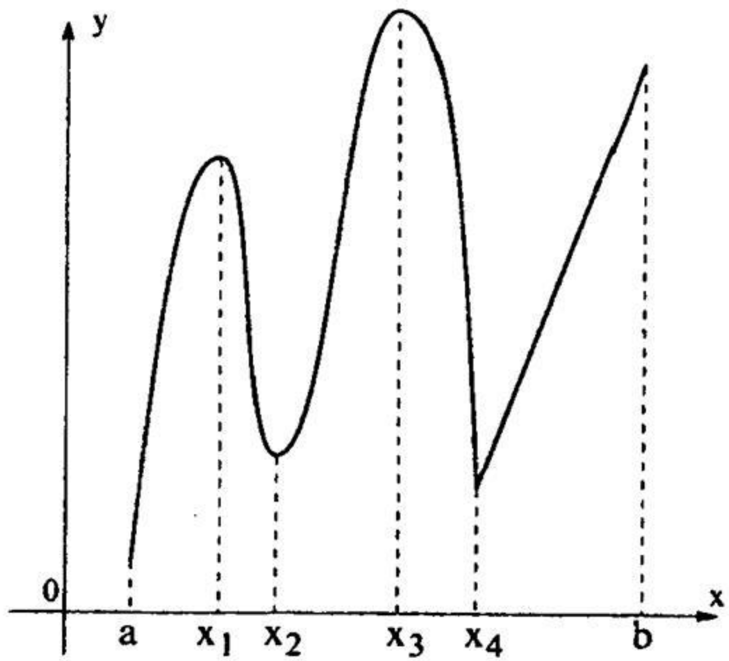
Наибольшее значение называют ***максимумом***, а наименьшее – ***минимумом***.

Экстремумы (максимумы и минимумы) бывают ***локальными*** и ***глобальными***.

Локальные максимумы достигаются в точках x_k, для которых существует такая окрестность, что для всех точек из этой окрестности, кроме самой точки x_k, $f(x) < f(x_k)$.

Локальные минимумы достигаются в точках x_k, для которых существует такая окрестность, что для всех точек из этой окрестности, кроме самой точки x_k, $f(x) > f(x_k)$.

Глобальные экстремумы на отрезке $[a;b]$ могут достигаться в точках локальных экстремумов или на границах отрезка.



Локальные экстремумы будем называть просто экстремумами, а глобальные экстремумы – ***наибольшим*** и ***наименьшим значениями функции*** на отрезке $[a;b]$.

Условия экстремума функции.

Теорема (необходимое условие экстремума).

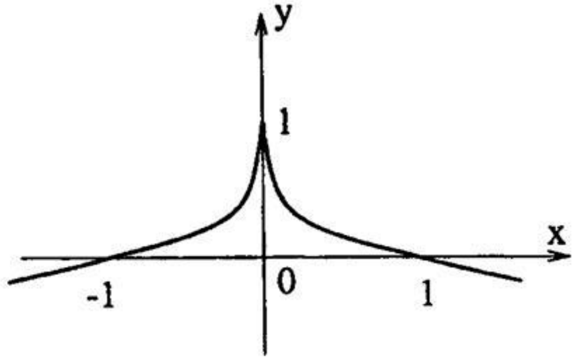
Если дифференцируемая в точке $x = x_0$ функция $y = f(x)$ имеет в этой точке максимум или минимум, то ее производная в этой точке обращается в нуль: $f'(x_0) = 0$.

Замечание. Эта теорема является рассмотренной в предыдущей лекции теоремой Ферма.

Производная в точках экстремума может и не существовать, например, когда график функции в этой точке имеет излом и производная справа не равна производной слева.

Рассмотрим функцию $f(x)=1-\sqrt[3]{x^2}$.

Производная данной функции: $f'(x)=-\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$ в точке $x=0$ не существует (бесконечный разрыв), несмотря на это функция имеет в этой точке максимум.



Определение. Точки, в которых производная равна нулю, называются ***стационарными*** точками данной функции.

Стационарные точки и точки, в которых производная не существует, называются ***критическими***.

Необходимое условие экстремума можно сформулировать иначе.

Если непрерывная функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум, то точка x_0 является критической точкой функции.

Замечание. Не во всякой критической точке существует экстремум.

Для нахождения экстремума необходимо найти все критические точки и проверить выполняется ли в них достаточные условия.

Теорема (достаточное условие экстремума по первой производной).

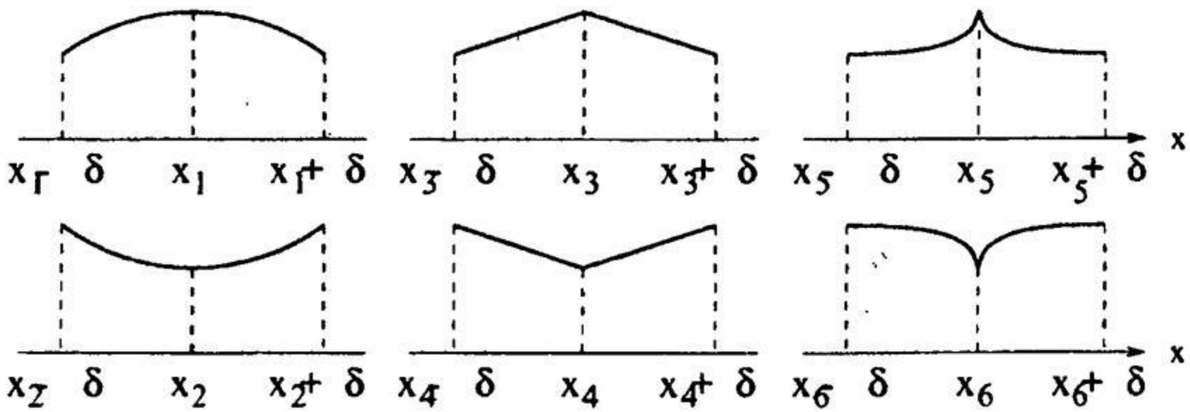
Если точка $x = x_0$ является критической точкой функции $y = f(x)$, и в некоторой δ-окрестности этой точки производная $f'(x)$ слева от этой точки ($x \in (x_0 - \delta; x_0)$) и справа ($x \in (x_0; x_0 + \delta)$) существует, но имеет разные знаки, то точка x_0 - точка экстремума функции.

Причем,

если $f'(x) > 0$ слева и $f'(x) < 0$ справа, то в точке $x = x_0 -$ максимум,

если $f'(x) < 0$ слева и $f'(x) > 0$ справа, то в точке $x = x_0 -$ минимум.

График функции в окрестности точек максимума или минимума в случае стационарной точки имеет вид бугорка или ямки с плавно меняющимся контуром (точка x_1 и x_2), или контура с изломом для точки, в которой производная не существует (производные слева и справа в точках x_3 и x_4 не равны, а в точках x_5 и x_6 не существуют).



Пример. Исследовать на экстремум функцию $y = x^2 - x^3$.

Решение: Функция определена на всей числовой оси.

1. Находим производную $y' = f'(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x)$, которая существует при всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

2. Приравниваем производную к нулю:

$$f'(x) = 2x - 3x^2 = x(2 - 3x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, функция $y = x^2 - x^3$ имеет две стационарные точки, которые разбивают область определения на три интервала монотонности:

$$(-\infty;\ 0),\ (0;\ 2/3),\ (2/3;\ +\infty).$$

3. Исследуем знаки производной y' в каждом из интервалов, взяв для определения знака любую точку соответствующего интервала.

В интервале $-\infty < x < 0$ производная $y' < 0$ и функция в этом интервале убывает.

В интервале $0 < x < 2/3$ производная $y' > 0$, функция в этом интервале возрастает.

В интервале $2/3 < x < +\infty$ производная $y' < 0$, функция в этом интервале убывает.

4. Так как при переходе критической точки $x = 0$ производная меняет знак с минуса на плюс, в этой точке достигается минимум $y_{\min} = y(0) = 0$. При переходе критической точки $x = 2/3$ производная меняет знак с плюса на минус, эта точка есть точка максимума $y_{\max} = y(2/3) = 4/27$.

5. Полученные результаты заносим в таблицу:

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2/3)$	2/3	$(2/3;+\infty)$
y'	<0	0	>0	0	<0
y	$\downarrow$	0 min	$\uparrow$	4/27 max	$\downarrow$

Теорема (достаточное условие экстремума по второй производной).
Пусть x_0 - стационарная точка функции $f(x)$, и в точке x_0 существует непрерывная вторая производная $f''(x_0) \neq 0$.
Тогда если $f''(x_0) < 0$, то x_0 есть точка максимума функции $f(x)$, если $f''(x_0) > 0$, то x_0 есть точка минимума.

Пример. Найти экстремум функции $f(x) = x^2 - x^3$.

Решение: Производная $f'(x) = 2x - 3x^2 = x(2-3x)$ обращается в нуль при $x_1 = 0$ и $x_2 = \dfrac{2}{3}$.

$f''(x) = 2 - 6x$ и $f''(0) = 2 - 0 = 2 > 0$, т.е. точка $x_1 = 0$ – точка минимума, а $f''(2/3) = 2 - 6 \cdot 2/3 = -2 < 0$, т.е. $x_2 = \dfrac{2}{3}$ – точка максимума.

Последнюю теорему можно обобщить.

Теорема (достаточное условие экстремума по старшим производным).

Пусть в стационарной критической точке x_0 функции $f(x)$ наряду с первой могут обращаться в нуль и последующие производные.

Тогда, если первая, не обращающаяся в нуль, производная имеет **четный порядок** $(n = 2k,\ k = 1,2,...)$, то в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет экстремум.

Причем если эта производная $f^{(2k)}(x_0) > 0$, в точке $x = x_0$ функция $f(x)$ имеет минимум, если же $f^{(2k)}(x_0) < 0$ – максимум.

Если же первая, не обращающаяся в нуль, производная имеет **нечетный порядок** $(n = 2k + 1,\ k = 1,2,\ldots)$, причем $f^{(2k+1)}(x_0) < 0$, то функция $f(x)$ в окрестности точки x_0 является убывающей, если же $f^{(2k+1)}(x_0) > 0$ – возрастающей.

Пример. Существует ли экстремум у функций $f(x) = x^4$ и $f(x) = x^5$.

Решение: Если $f(x) = x^4$, то $f'(x) = 4x^3$. Производная обращается в нуль при $x = 0$.

Следовательно, $x = 0$ является стационарной критической точкой.

Кроме того, $f'(0) = f''(0) = 0$, $f^{(4)}(0) = 24 > 0$.

Следовательно, функция $f(x) = x^4$ в точке $x = 0$ имеет экстремум, а именно минимум.

Если же $f(x) = x^5$, то $f'(x) = 5x^4$ и производная обращается в нуль при $x = 0$.

Следовательно, $x = 0$ является стационарной критической точкой функции $f(x) = x^5$.

Кроме того, $f'(0) = f''(0) = f^{(4)}(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = 120 > 0$.

Следовательно, экстремума нет, а функция $f(x) = x^5$ является монотонно возрастающей при всех x.

Нахождение глобального экстремума.

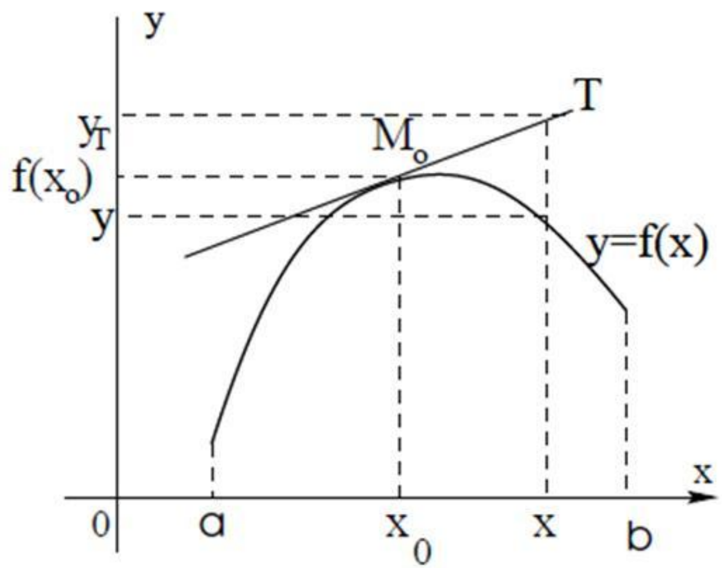
Глобальный экстремум на отрезке $[a;b]$ может достигаться или в критических точках интервала $(a;b)$, или в граничных точках $x = a$ и $x = b$.
Таким образом, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции на отрезке $[a;b]$ необходимо:

1. Найти значения функции $f(x)$ на концах отрезка $f(a)$ и $f(b)$.
2. Найти все критические точки x_k в интервале $(a;b)$ и значения функции $f(x)$ в этих точках $f(x_k)$.
3. Выбрать наибольшее значение M и наименьшее значение m из всех $f(x_k)$, $f(a)$ и $f(b)$.

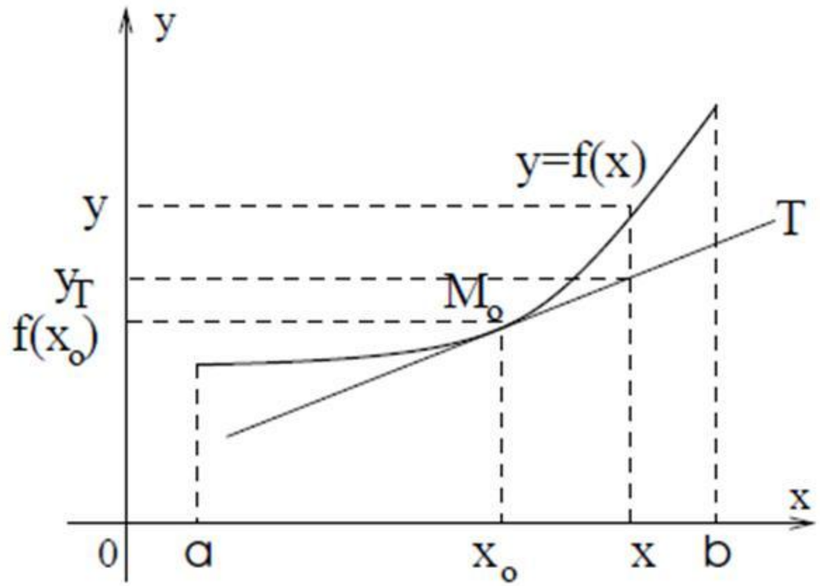
Таким образом, при нахождении глобального экстремума функции применяется только необходимое условие экстремума.

Понятие выпуклости функции. Точки перегиба.

Определение. Функция $y = f(x)$, называется ***выпуклой*** или ***выпуклой вверх*** в интервале $(a;b)$, если ее график расположен ниже касательной, проведенной к нему в любой точке x_0 этого интервала.



Определение. Функция $y = f(x)$, называется ***вогнутой*** или ***выпуклой вниз*** в интервале $(a;b)$, если ее график расположен выше касательной, проведенной к нему в любой точке x_0 этого интервала.



Определение. Точка x_0 называется ***точкой перегиба*** графика функции, если существует такая ее окрестность, в которой по разные стороны от точки x_0 функция имеет разный характер выпуклости.

Теорема. Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ во всех точках интервала $(a;b)$. Если во всех точках этого интервала $f''(x) < 0$, то график функции в этом интервале выпуклый или выпуклый вверх, если $f''(x) > 0$ - вогнутый или выпуклый вниз.

Для запоминания связи между знаком второй производной и характером выпуклости функции используют разные мнемонические правила.

Теорема (необходимое условие точки перегиба).
Если точка x_0 - точка перегиба кривой $y = f(x)$ и $f''(x_0)$ существует, то $f''(x_0) = 0$.

Замечание. Точкой перегиба может являться точка, вторая производная в которой не существует.

Точки, в которых $f''(x) = 0$ или не существует, являются ***критическими точками по второй производной.***

Теорема (достаточные условия точки перегиба по второй производной).
Если для критической точки x_0 существует такая окрестность, в которой с одной стороны от точки x_0 вторая производная $f''(x) > 0$, а с другой стороны $f''(x) < 0$, то x_0 - точка перегиба.

Теорема (достаточное условие точки перегиба по старшим производным).
Пусть в точке x_0 вторая производная $f''(x_0) = 0$, а также последующие производные обращаются в ноль, и пусть первая, не обращающаяся в ноль производная, **нечетного порядка.** Тогда точка x_0 есть точка перегиба.

Пример. Определить интервалы выпуклости функции $y = x^2 - x^3$.

Решение: Для функции $y = x^2 - x^3$ вторая производная имеет вид $y'' = 2 - 6x$.

Определим корни второй производной $y'' = 0,\ 2 - 6x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$.

Точка $x = \frac{1}{3}$ разбивает область определения функции на два интервала:

$-\infty < x < \frac{1}{3}$ и $\frac{1}{3} < x < +\infty$.

Исследуем знаки второй производной в этих интервалах.

В интервале $-\infty < x < \frac{1}{3}$, $f''(x) > 0$ и функция вогнута на этом интервале.

В интервале $\frac{1}{3} < x < +\infty$, $f''(x) < 0$ и функция выпукла в этом интервале.

Так как при переходе через точку $x = \frac{1}{3}$ вторая производная меняет знак, то точка $x = \frac{1}{3}$ является точкой перегиба.

Составим таблицу:

x y''	$(-\infty;1/3)$ >0	$1/3$ 0	$(1/3;+\infty)$ <0
график $y = f(x)$	вогнутый	точка перегиба $y = 2/27$	выпуклый

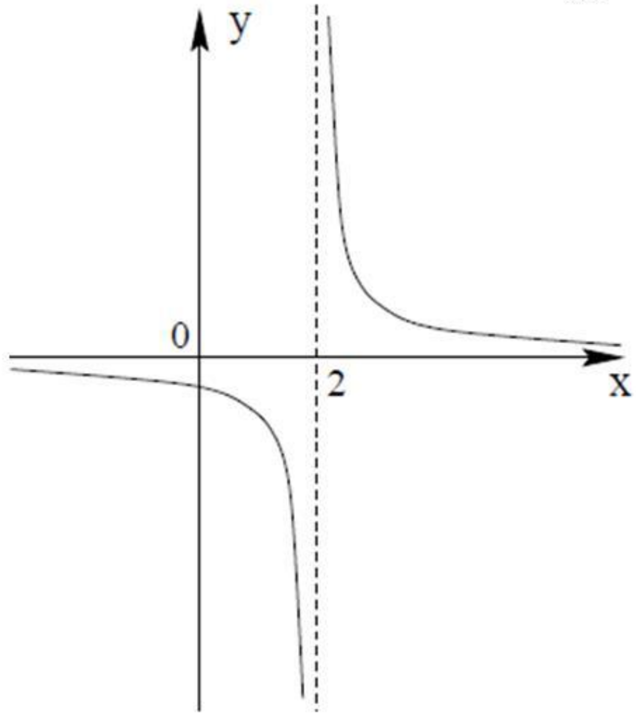
Асимптоты графика функции.

При исследовании функций особый интерес представляет вид графика этой функции при неограниченном удалении его текущей точки от начала координат, или при удалении ее в бесконечность.

Если при этом график функции неограниченно приближается к некоторой прямой линии L, то эта линия называется ***асимптотой графика функции***.

Различают **вертикальные** и **наклонные** асимптоты.

Определение. Прямая $x = a$ является ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из пределов $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$ равен ∞.



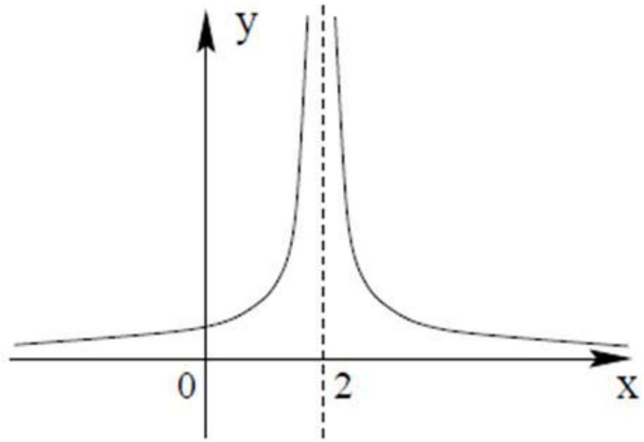
Определение. Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если

$$f(x) = kx + b + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ есть бесконечно малая величина при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), т.е. $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0$.

Если $k = 0$, асимптота $y = b$ называется **горизонтальной**.

Пример. Исследовать поведение функций $y = \dfrac{1}{x-2}$ и $y = \dfrac{1}{(x-2)^2}$ в окрестности точки $x_0 = 2$.



Решение: $\lim\limits_{x\to 2-0} \dfrac{1}{x-2} = -\infty$, $\lim\limits_{x\to 2+0} \dfrac{1}{x-2} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 2\pm 0} \dfrac{1}{(x-2)^2} = +\infty$.

Следовательно, прямая $x = 2$ является асимптотой, как первой, так и второй функции.
Но графики $y = f(x)$ в окрестности точки $x = 2$ имеют различный вид.

Теорема. Для того, чтобы график функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$) имел наклонную асимптоту $y = kx + b$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела:

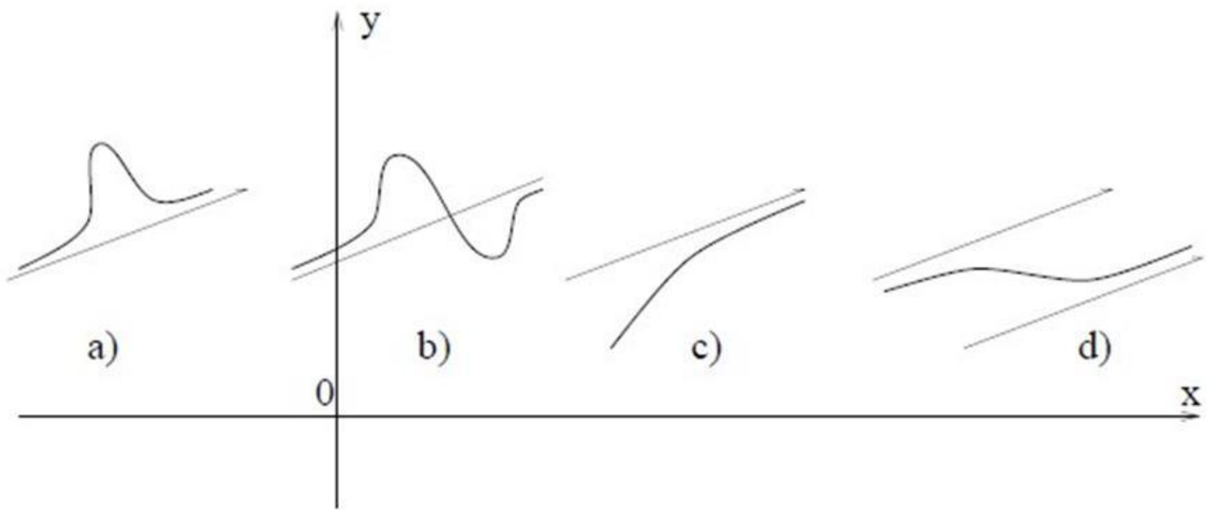
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = k \text{ и } \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = b,$$

(или $x \to -\infty$).

Если пределы при $x \to -\infty$ и при $x \to +\infty$ равны, то наклонная асимптота одна, если разные, то две.

Если хотя бы один из пределов не существует, то наклонной асимптоты у кривой нет.

Асимптотическое поведение функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$ может быть совершенно различным: кривая $y = f(x)$ может подходить к асимптоте с одной стороны при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$, с разных сторон, может иметь асимптоту только при $x \to +\infty$, а при $x \to -\infty$ не иметь или иметь разные асимптоты при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$.



Общая схема исследования функции и построения ее графика.

1. Область определения функции.
2. Точки пересечения графика функции с осями координат.
3. Свойства функции: четность, нечетность и периодичность.
4. Точки разрыва. Вертикальные асимптоты.
5. Наклонные асимптоты.
6. Критические точки по первой производной.
7. Интервалы монотонности. Точки экстремума: точки максимума и точки минимума.
8. Критические точки по второй производной.
9. Интервалы выпуклости функции. Точки перегиба.
10. Построение графика функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 4}$ и построить ее график.

Решение:

1. Область определения функции: $D(y) = (-\infty;-2) \cup (-2;2) \cup (2;+\infty)$.

2. Точка пересечения с осями координат: $(0;0)$.

3. Функция нечетная: $y(-x) = -\dfrac{x^3}{x^2 - 4} = -y(x)$. Непериодическая.

4. Точки разрыва: $x = -2$ и $x = 2$. Прямые $x = -2$ и $x = 2$ являются вертикальными асимптотами.

При этом $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = \pm\infty$, и $\lim\limits_{x \to -2 \pm 0} \dfrac{x^3}{x^2 - 4} = \pm\infty$.

5. Наклонные асимптоты:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{(x^2-4)x}=1\Rightarrow k=1,\ \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=0\Rightarrow b=0,$$

следовательно, наклонная асимптота имеет вид: $y=x$.

6. Найдем производную $y'=\left(\dfrac{x^3}{x^2-4}\right)'=\dfrac{3x^2(x^2-4)-2x^4}{(x^2-4)^2}=\dfrac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}$.

Критические точки функции: $x=0, x=\pm2\sqrt{3}, x=\pm2$.

7. Рассмотрим интервалы:

$(-\infty<x<-2\sqrt{3})$, $(-2\sqrt{3}<x<-2)$, $(0<x<2)$, $(2<x<2\sqrt{3})$, $(2\sqrt{3}<x<+\infty)$.

На интервале $(-\infty<x<-2\sqrt{3})$ функция возрастает; на $(-2\sqrt{3}<x<-2)$ и $(-2<x<0)$ – убывает.

В силу нечетности функции на интервалах $(0<x<2)$ и $(2<x<2\sqrt{3})$ функция убывает, а на интервале $(2\sqrt{3}<x<+\infty)$ возрастает.

Поведение функции в окрестности точек $x=\pm2$ исследовано выше.

При переходе через точку $x=0$ производная знак не меняет, следовательно, эта точка не является точкой экстремума.

При переходе точку $x=2\sqrt{3}$, знак производной меняется с минуса на плюс, следовательно, $x=2\sqrt{3}$ – точка минимума.

В силу нечетности функции точка $x=-2\sqrt{3}$ – точка максимума.

8. Найдем вторую производную: $y'' = \dfrac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$.

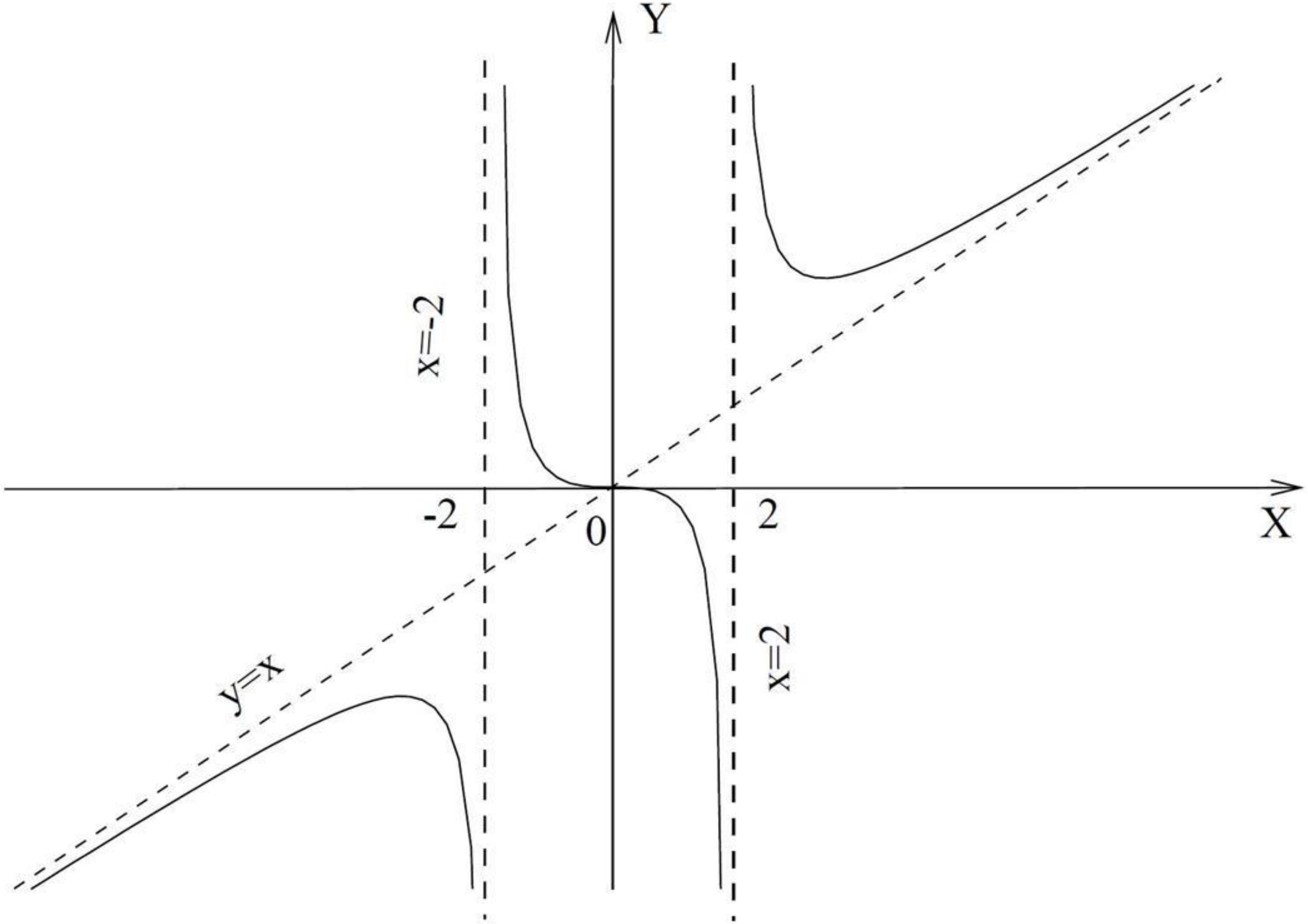
Она обращается в нуль в точке $x=0$ и не существует в точках $x=\pm 2$.

9. На интервалах $(-\infty;-2)$ и $(0;2)$ график функции выпуклый; на интервалах $(-2;0)$ и $(2;+\infty)$ график функции вогнутый.

При переходе точки $x=0$ вторая производная меняет знак, т.е. $x=0$ – точка перегиба.

x	$(-\infty;-2\sqrt{3})$	$-2\sqrt{3}$	$(-2\sqrt{3};-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;2\sqrt{3})$	$2\sqrt{3}$	$(2\sqrt{3};\infty)$
y'	>0	0	<0	$-\infty$	<0	0	<0	$-\infty$	<0	0	>0
y	$\uparrow$	$-3\sqrt{3}$ max	$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$	$3\sqrt{3}$ min	$\uparrow$

x	$(-\infty;-2)$	-2	$(-2;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;\infty)$
y''	<0	$\mp\infty$	>0	0	<0	$\mp\infty$	>0
график $y=f(x)$	выпуклый	точка разрыва	вогнутый	точка перегиба	выпуклый	точка разрыва	вогнутый


Y
X
0
-2
2
x=-2
x=2
y=x

Спасибо за внимание