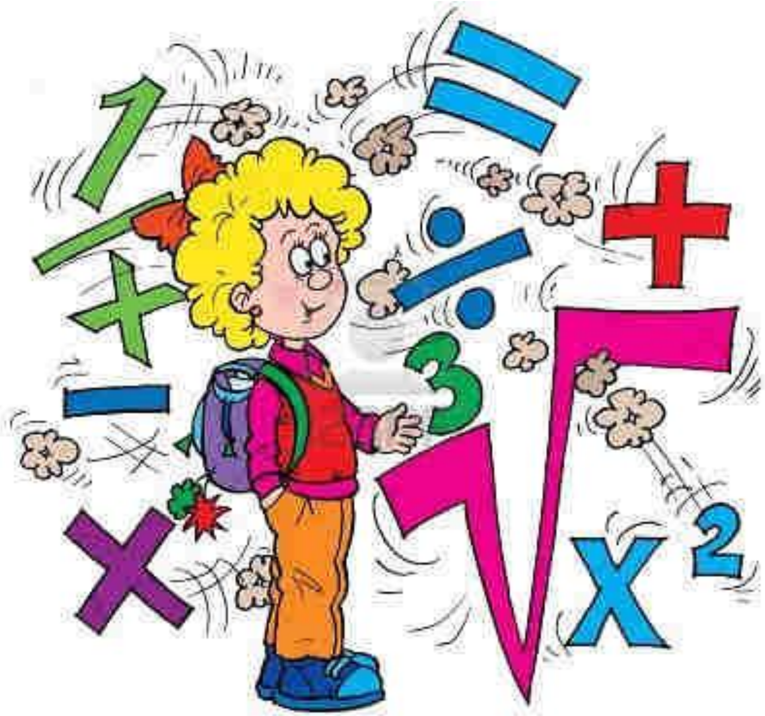
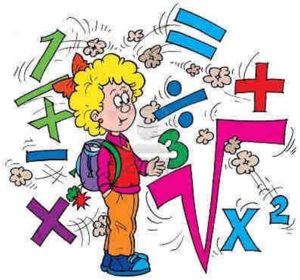
Корень n-й степени



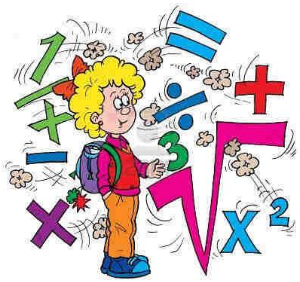


Квадратный корень

Определение. ***Квадратным корнем из числа а*** называют число ***t***, квадрат которого равен ***а***.

$$t^2 = a.$$

Числа ***8*** и ***-8*** – ***квадратные корни*** из ***64***, так как $8^2 = 64$ и $(-8)^2 = 64$.



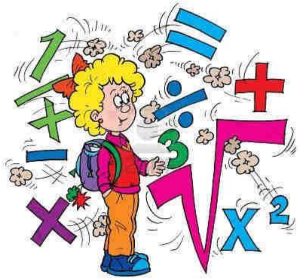
Корень n-й степени

Определение. ***Корнем n-й степени из числа а*** называют число ***t***, ***n-я*** степень которого равна ***а***.

$$t^n = a.$$

Числа ***3*** и ***-3*** – ***корни 4-й степени*** из ***81***, так как $3^4 = 81$ и $(-3)^4 = 81$.

Число ***-5*** – ***корень 3-й степени из -125***, так как $(-5)^3 = -125$.



Арифметический корень n-й степени

Определение. Неотрицательный корень ***n*-й** степени из числа ***a*** называется ***арифметическим корнем n-й степени из a***.

2 – *арифметический корень 4-й степени* из числа ***16***,

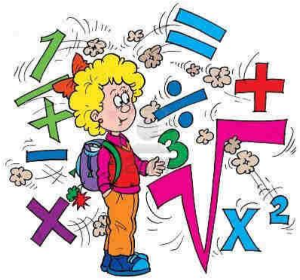
т.к. $2 > 0$ и $2^4 = 16$.

-2 – *не арифметический корень 4-й степени* из числа ***16***.

т.к. $2 < 0$.

Но ***2*** и ***-2*** - корни 4-й степени из ***16***.

3 – *арифметический корень 5-й степени* из ***243***.



Обозначение корня

1. Если ***n* – нечетное число**.

$$\sqrt[n]{a}$$

корень n-й степени из числа a
(положительного, отрицательного или нуля).

показатель корня

подкоренное выражение

Если ***a* ≥0**, то $\sqrt[n]{a}$ - арифметический корень ***n*-й** степени из числа ***a***.

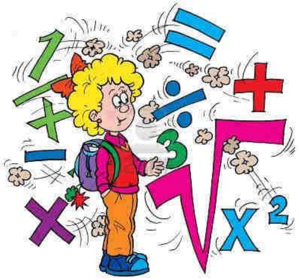
$$\underbrace{\sqrt[3]{7}}$$

арифметический корень 3-й степени из 7

$$\underbrace{\sqrt[5]{-12}} = -\underbrace{\sqrt[5]{12}}$$

корень5-й степени из 12

арифметический корень 5-й степени из 12



Обозначение корня

2. Если ***n* – четное число**.

$$\sqrt[n]{a}$$

арифметический корень n-й степени из числа а

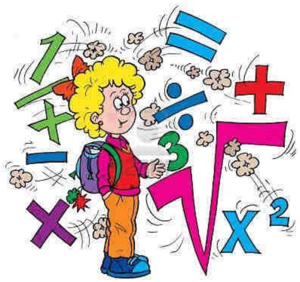
показатель корня

подкоренное выражение

При четном ***n*** выражение $\sqrt[n]{a}$ имеет смысл только при ***a ≥0***.

$$\sqrt[12]{71},\quad \sqrt{15},\quad \sqrt[6]{2}.$$

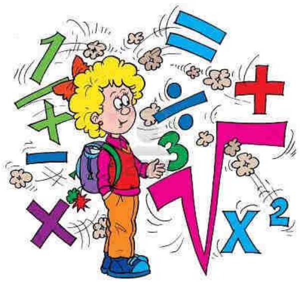
- арифметические корни, а значит числа положительные.



Корень *n*-й степени

Во множестве действительных чисел существует ***единственный*** корень нечетной степени ***n*** из любого числа ***a***. ($\sqrt[n]{a}$).

Во множестве действительных чисел существует ***два*** корня четной степени ***n*** из любого положительного числа ***a***, их модули равны, а знаки противоположны.



войства корней *n*-й степени

Когда ***n* – нечетное**, то при ***любом*** значении ***a*** верно равенство

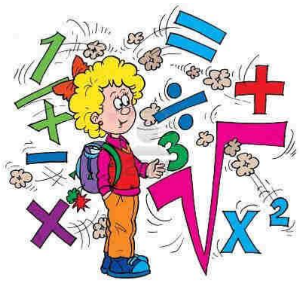
Когда ***n* – четное**, то при ***любом положительном*** значении ***a*** верно равенство

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$$

$$\left(\sqrt[7]{92}\right)^7 = 92,$$

$$\left(\sqrt[7]{123}\right)^7 = 123, \quad \left(\sqrt[7]{-123}\right)^7 = -123.$$

$$\left(\sqrt[4]{19}\right)^4 = 19, \quad \left(\sqrt[12]{23}\right)^{12} = 123.$$



Свойства корней n-й степени

<u>Теорема</u>.

Пусть ***n*** **- *нечетное число*.**

Пусть ***n*** **- *четное число*.**

Тогда при любом значении ***a*** верны равенства:

$$\sqrt[n]{a^n} = a,$$

$$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$$

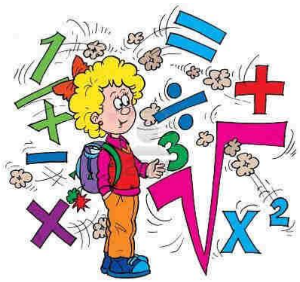
$$\sqrt[3]{b^{15}} = b^5$$

$$\sqrt[3]{-125} = -\sqrt[3]{5^3} = -5$$

$$\sqrt[n]{a^n} = |a|,$$

$$\sqrt[4]{b^{12}} = |b^3|$$

$$\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = |2| = 2$$



Свойства корней *n*-й степени

<u>Теорема</u>. Пусть ***n*** и ***k*** - натуральные числа. Тогда при любом неотрицательном значении ***а*** верны равенства:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$$

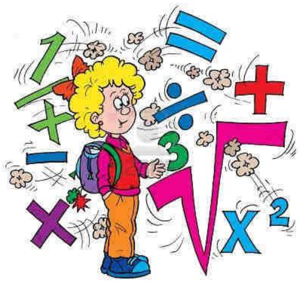
$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

(При извлечении корня из корня подкоренное выражение остается прежним, а показатели корней перемножаются.)

Сравнить числа $\sqrt[6]{2\sqrt{3}}$ и $\sqrt[4]{2}$.

$$\sqrt[6]{2\sqrt{3}} = \sqrt[6]{\sqrt{3 \cdot 4}} = \sqrt[12]{12}; \qquad \sqrt[4]{2} = \sqrt[4\cdot 3]{2^3} = \sqrt[12]{8} \Rightarrow \sqrt[12]{12} > \sqrt[12]{8};$$

$$\Rightarrow \sqrt[6]{2\sqrt{3}} > \sqrt[4]{2}.$$



Свойства корней *n*-й степени

<u>Теорема</u>. Пусть ***k*** – целое число. Тогда при любом положительном значении ***a*** верно равенство:

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

Решить уравнение: $\sqrt[3]{x} - 9\sqrt[6]{x} + 14 = 0$

Решение.

$$\sqrt[6]{x} = t, \quad \sqrt[3]{x} = \boxed{\sqrt[6]{x^2} = \left(\sqrt[6]{x}\right)^2} = t^2$$

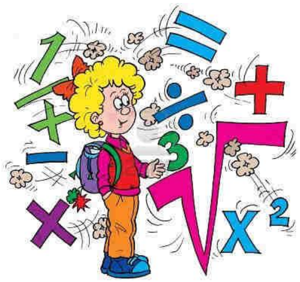
Тогда

$$t^2 - 9t + 14 = 0 \Rightarrow t_1 = 2, \quad t_2 = 7.$$

$$\sqrt[6]{x} = 2 \text{ или } \sqrt[6]{x} = 7$$

$$x = 2^6 = 64 \text{ или } x = 7^6 = 117\,649.$$

Ответ: ***64; 117 649***.



Свойства корней *n*-й степени

Теорема.

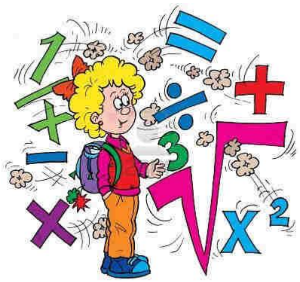
Пусть ***n* – нечетное число**.
Тогда при любых значениях ***a*** и ***b*** верно равенство

Пусть ***n* – четное число**. Тогда при любых ***a* ≥ 0** и ***b* ≥ 0** верно равенство

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$$

$$\sqrt[7]{13+\sqrt{41}}\cdot\sqrt[7]{13-\sqrt{41}}=\sqrt[7]{(13+\sqrt{41})\cdot(13-\sqrt{41})}=$$

$$=\sqrt[7]{13^2-(\sqrt{41})^2}=\sqrt[7]{169-41}=\sqrt[7]{128}=\sqrt[7]{2^7}=2.$$



Свойства корней *n*-й степени

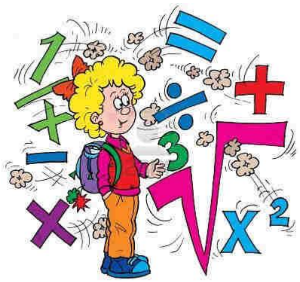
<u>Теорема</u>.

Пусть ***n* – нечетное число**. Тогда при любых значениях ***a*** и ***b* ≠ *0*** верно равенство

Пусть ***n* – четное число**. Тогда при любых ***a* ≥ *0*** и ***b* > *0*** верно равенство

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{256}{x^8}}=\sqrt[4]{\frac{4^4}{\left(x^2\right)^4}}=\frac{\sqrt[4]{4^4}}{\sqrt[4]{\left(x^2\right)^4}}=\frac{4}{|x^2|}=\frac{4}{x^2}$$



Свойства корней n-й степени

Теорема.

Пусть ***n* – нечетное число**. Тогда при любых значениях ***a*** и ***b*** верно равенство

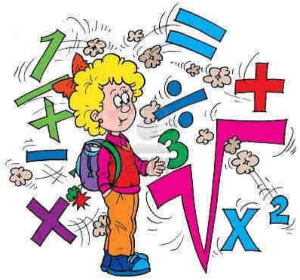
$$\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[5]{y^{11}z} = \sqrt[5]{y^{10}yz} = y^2\sqrt[5]{yz}$$

Пусть ***n* – четное число**. Тогда при любых значениях ***a*** и ***b* ≥ *0*** верно равенство

$$\sqrt[n]{a^n b} = |a|\sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[4]{\frac{64n^8}{x^{12}}} = \sqrt[4]{\frac{2^8 n^8}{x^{12}}} = \left|\frac{2n^2}{x^3}\right|\sqrt[4]{2^2} = \frac{2n^2}{|x^3|}\sqrt[4]{4}$$



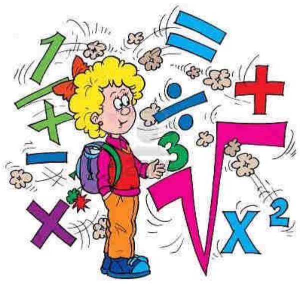
Вынесение множителя из-под знака корня

Преобразование выражения $\sqrt[n]{a^n b}$ к виду $a\sqrt[n]{b}$ называется ***вынесением множителя из-под знака корня нечетной степени***.

$$\sqrt[3]{216b} = \sqrt[3]{6^3 b} = 6 \cdot \sqrt[3]{b}$$

Преобразование выражения $\sqrt[n]{a^n b}$ к виду $|a|\sqrt[n]{b}$ называется ***вынесением множителя из-под знака корня четной степени***.

$$\sqrt[4]{-625b} = \sqrt[4]{(-5)^4 b} = |-5| \cdot \sqrt[4]{b} = 5 \cdot \sqrt[4]{b}$$



Внесение множителя под знак корня

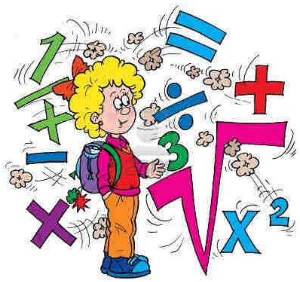
Преобразование выражения $a\sqrt[n]{b}$ к виду $\sqrt[n]{a^n b}$ называется ***внесением множителя под знак корня нечетной степени***.

$$5y\sqrt[7]{\frac{2ay}{625}} = \sqrt[7]{\frac{5^7 y^7 \cdot 2ay}{5^4}} = \sqrt[7]{5^3 \cdot 2ay^8} = \sqrt[7]{125 \cdot 2ay^8} = \sqrt[7]{250ay^8}$$

Преобразование выражения $|a|\sqrt[n]{b}$ к виду $\sqrt[n]{a^n b}$ называется ***внесением множителя под знак корня четной степени***.

$$p < 0 \quad p\sqrt[6]{7} = -(-p)\sqrt[6]{7} = -\sqrt[6]{(-p)^6 7} = -\sqrt[6]{7p^6};$$

$$p > 0 \quad p\sqrt[6]{7} = \sqrt[6]{7p^6}.$$



Свойства корней n-й степени

Теорема.

Пусть $n > 1$ – ***нечетное*** число; $a_1, a_2, \dots, a_k$ - любые числа.

Пусть $n \geq 2$ – ***четное*** число; $a_1, a_2, \dots, a_k$ - любые неотрицательные числа.

Корень ***n-й*** степени из произведения нескольких чисел равен произведению корней ***n-й*** степени из этих чисел.

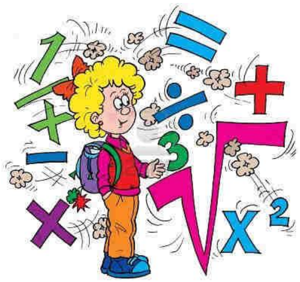
$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_k} = \sqrt[n]{a_1} \cdot \sqrt[n]{a_2} \dots \sqrt[n]{a_k}$$

$$\sqrt[4]{256 \cdot 81 \cdot 625} = \sqrt[4]{256} \cdot \sqrt[4]{81} \cdot \sqrt[4]{625} = 4 \cdot 3 \cdot 5$$

В частности, пологая в этом равенстве

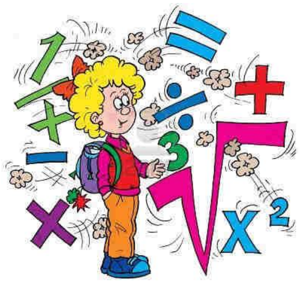
$a_1 = a_2 = \dots = a_k = a$, получим

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$



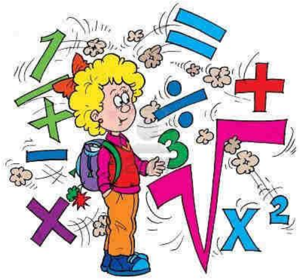
Свойства корней *n*-й степени

n – нечетное число	n – четное число
$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ при любом a	$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$ при $a \geq 0$
$\sqrt[n]{a^n} = a$ при любом a	$\sqrt[n]{a^n} = \lvert a \rvert$ при любом a
$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ при любом a	$\sqrt[n]{-a} = -\sqrt[n]{a}$ при $a = 0$
$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ при любых a и b	$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{\lvert a \rvert} \cdot \sqrt[n]{\lvert b \rvert}$ если a и b одного знака
$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ при любых a и b	$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ при $a \geq 0$ и $b \geq 0$



Свойства корней *n*-й степени

n – нечетное число		n – четное число	
$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$	при любых a и b	$a\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a^n b}$	при $a \geq 0$ и $b \geq 0$
		$a\sqrt[n]{b}=-\sqrt[n]{a^n b}$	при $a < 0$ и $b \geq 0$
$\sqrt[n]{a^n b}=a\sqrt[n]{b}$	при любых a и b	$\sqrt[n]{a^n b}=\lvert a\rvert\sqrt[n]{b}$	при любом a и $b \geq 0$
$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	при любых a и $b \neq 0$	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[n]{\lvert b\rvert}}$	если a и b одного знака и $b \neq 0$
$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	при любых a и $b \neq 0$	$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$	при $a \geq 0$ и $b > 0$



Свойства корней *n*-й степени

При любых натуральных значениях ***n* ≥ 2** и ***k* ≥ 2** для ***a* ≥ *0*** имеют место тождества:

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$