
Логика предикатов

Понятие предиката

ПРЕДИКАТ (лат. praedicatum – высказанное)
– термин, обозначающий член предложения –
сказуемое.

Пример. Студент уныло **слушает** лекцию.

Субъект Атрибут Предикат Объект

Другое значение термина «предикат» —
выражение отношения между лицами,
предметами, событиями, явлениями.

Пример. Студент уныло *слушает* лекцию.

Слушает (кто, кого, как)

Определение. *Предикатом* называется утверждение, содержащее переменные x_1, \dots, x_n , которое превращается в высказывание при замене этих переменных конкретными объектами из некоторой области возможных значений.

Обозначаются предикаты P, Q, \dots

Переменные x_1, \dots, x_n , называются *предметными* или *индивидуальными переменными*. Число предметных переменных в предикате называется его *арностью* или *местностью*.

Более точно, предикат P с n предметными переменными называется *n -арным* или *n -местным предикатом* и обозначается $P(x_1, \dots, x_n)$.

Предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ является функцией, которая каждому набору значений $x_1 = a_1, \dots, x_n = a_n$ его n предметных переменных ставит в соответствие некоторое высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$, имеющее определенное истинностное значение $\lambda(P(a_1, \dots, a_n))$.

Если отвлечься от содержания высказываний и учитывать только их истинностные значения, то предикат можно рассматривать как функцию со значениями в множестве $\{0,1\}$.

Рассматривая такую функцию на некотором фиксированном множестве M допустимых значений предметных переменных предиката, получим n -арное отношение на множестве M , состоящее из всех таких упорядоченных наборов (a_1, \dots, a_n) n элементов $a_1, \dots, a_n \in M$, для которых $P(a_1, \dots, a_n)$ является истинным высказыванием.

Такое n -арное отношение обозначается символом P^+ и называется *множеством истинности* предиката P на множестве M .

Определение. Предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ на множестве M называется:

- *тождественно истинным*, если для любых значений $x_1 = a_1 \in M, \dots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ истинно, т.е. $P^+ = M^n$;
- *тождественно ложным*, если для любых значений $x_1 = a_1 \in M, \dots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ ложно, т.е. $P^+ = \emptyset$;
- *выполнимым*, если для некоторых значений $x_1 = a_1 \in M, \dots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ истинно, т.е. $P^+ \neq \emptyset$;
- *опровержимым*, если для некоторых значений $x_1 = a_1 \in M, \dots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ ложно, т.е. $P^+ \neq M^n$.

Определение. Пусть предикаты одинаковой арности $P(x_1, \dots, x_n)$ и $Q(x_1, \dots, x_n)$ рассматриваются на множестве M . Тогда:

– предикаты P и Q называются *эквивалентными*, если $P^+ = Q^+$, т.е. при любых значениях $x_1 = a_1 \in M, \dots, x_n = a_n \in M$ высказывание $P(a_1, \dots, a_n)$ истинно в том и только том случае, если истинно высказывание $Q(a_1, \dots, a_n)$;

– предикат Q называется *следствием* предиката P , если $P^+ \subset Q^+$, т.е. при любых значениях $x_1 = a_1 \in M, \dots, x_n = a_n \in M$ из истинности высказывания $P(a_1, \dots, a_n)$ следует истинность высказывания $Q(a_1, \dots, a_n)$.

Алгебра предикатов

Определение.

Результатом действия квантора общности $(\forall x_1)$ по переменной x_1 на n -местный предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ называется $(n-1)$ -местный предикат $(\forall x_1)P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который зависит от переменных x_2, \dots, x_n и который при значениях $x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ в том и только том случае истинен на множестве M допустимых значений переменной x_1 , если при любых значениях $x_1 = a_1 \in M$ высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ истинно.

Определение.

Результатом действия квантора существования $(\exists x_1)$ по переменной x_1 на n -местный предикат $P(x_1, \dots, x_n)$ называется $(n-1)$ -местный предикат $(\exists x_1)P(x_1, x_2, \dots, x_n)$, который зависит от переменных x_2, \dots, x_n и который при значениях $x_2 = a_2, \dots, x_n = a_n$ в том и только том случае истинен на множестве M допустимых значений переменной x_1 , если при некотором значении $x_1 = a_1 \in M$ высказывание $P(a_1, a_2, \dots, a_n)$ истинно.

Квантор существования и единственности
 $(\exists! x)$ определяется как сокращение записи
следующей формулы

$$(\exists x)(P(x) \wedge ((\forall y)(P(y) \Rightarrow x = y))).$$

Результат действия такого квантора на
предикат $P(x)$ обозначается $(\exists! x)P(x)$ и
читается «существует и единственен x , для
которого выполняется $P(x)$ »).

Ограниченный квантор существования
 $(\exists Q(x))$ определяется как сокращение записи
следующей формулы

$$(\exists x)(Q(x) \wedge P(x)).$$

Результат действия такого квантора на
предикат $P(x)$ обозначается $(\exists Q(x))P(x)$ и
читается «существует x , удовлетворяющий
 $Q(x)$, для которого выполняется $P(x)$ ».

Ограниченный квантор общности $(\forall Q(x))$
определяется как сокращение записи
следующей формулы

$$(\forall x)(Q(x) \Rightarrow P(x)).$$

Результат действия такого квантора на
предикат $P(x)$ обозначается $(\forall Q(x))P(x)$ и
читается «для всех x , удовлетворяющих $Q(x)$,
выполняется $P(x)$ ».
