Поверхность

Поверхность, одно из основных геометрических понятий

- Поверхности составляют широкое многообразие нелинейных фигур трехмерного пространства. Инженерная деятельность человека связана непосредственно с конструированием, расчетом и, изготовлением различных поверхностей. Большинство задач прикладной геометрии сводится к автоматизации конструирования, расчета и воспроизведения сложных технических поверхностей. Способы формообразования и отображения поверхностей, начертательной геометрии составляют основу инструментальной базы трехмерного моделирования современных графических редакторов.

- ***Рассматривая поверхности как непрерывное множество точек, между координатами которых может быть установлена зависимость, определяемая уравнением вида F(x,y,z)=0, можно выделить <u>алгебраические поверхности</u> (F(x,y,z)- многочлен n-ой степени) и <u>трансцендентные</u> (F(x,y,z)- трансцендентная функция).***

- ***В начертательной геометрии фигуры задаются графически, поэтому целесообразно поверхность рассматривать как совокупность всех последовательных положений некоторой перемещающейся в пространстве линии.***

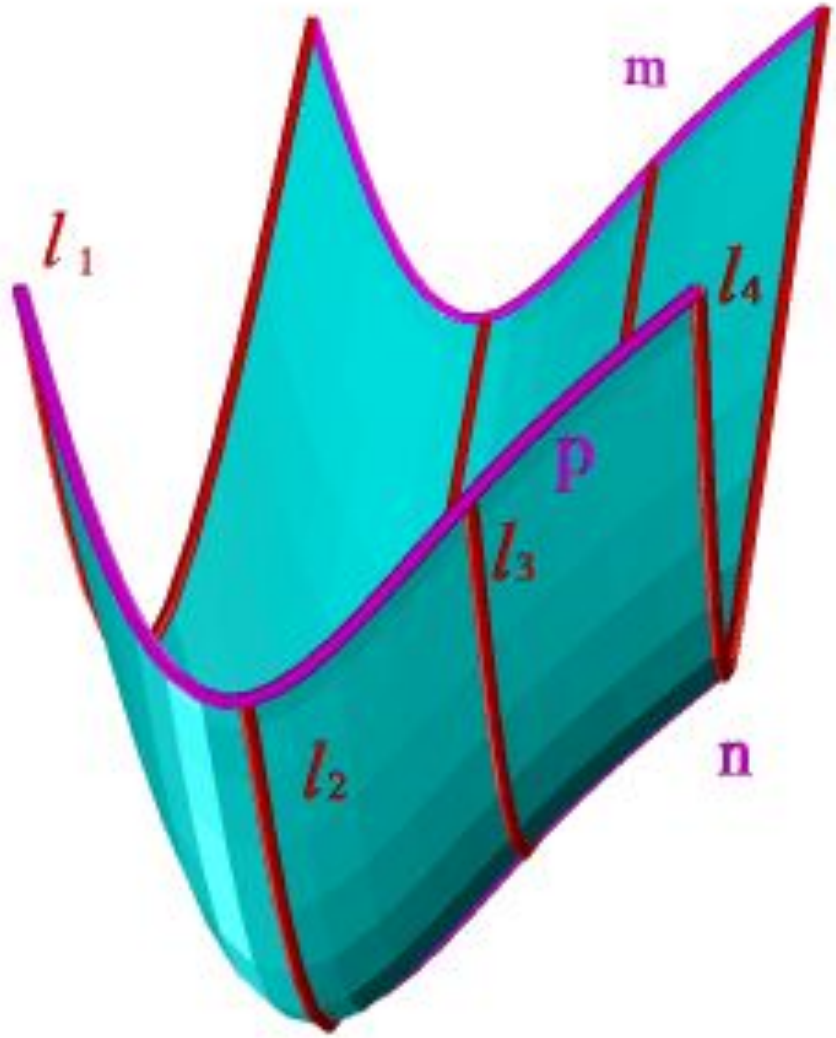
ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- Поверхность можно рассматривать, как совокупность последовательных положений линии ***l***, перемещающейся в пространстве по определенному закону.
- В процессе образования поверхности линия ***l*** может оставаться неизменной или менять свою форму - изгибаться или деформироваться. Для наглядности изображения поверхности на эпюре Монжа закон перемещения линии ***l*** целесообразно задавать графически в одной линии или целого семейства линий (***m, n, p...***).

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- Подвижную линию принято называть ***образующей***, неподвижные – ***направляющими***.
- Такой способ образования поверхности принято называть ***кинематическим.***

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ



ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- По виду образующей различают поверхности ***линейчатые*** и ***нелинейчатые***.

- образующая ***линейчатых*** – прямая линия,
- ***нелинейчатых*** – кривая.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- Линейчатые поверхности в свою очередь разделяют на так называемые ***развертывающие***, которые можно без складок и разрывов развернуть на плоскость и ***неразвертывающиеся***.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

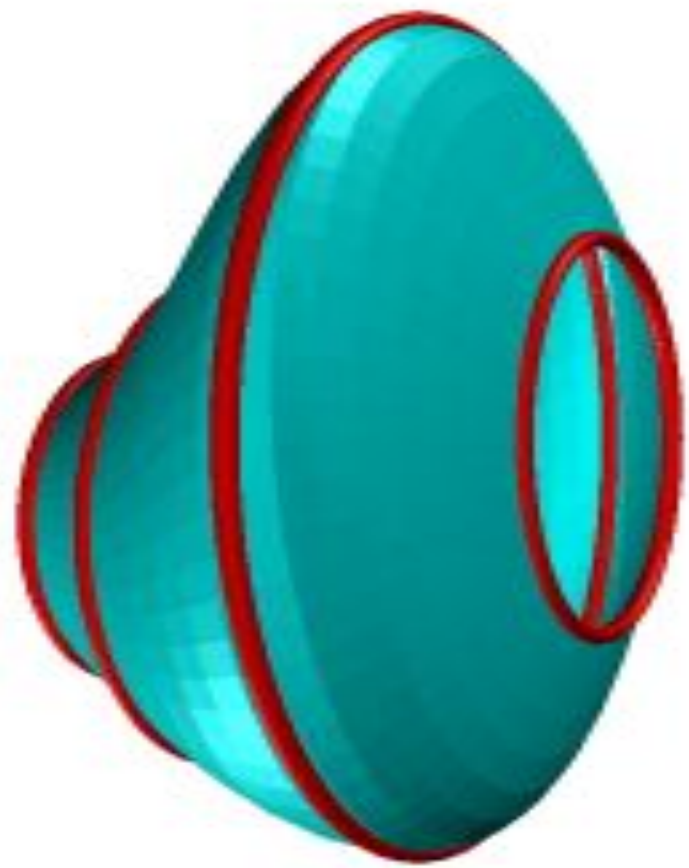
- Значительный класс поверхностей формируется движением окружности постоянного или переменного радиуса. Это так называемые ***циклические*** поверхности.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

Циклические поверхности подразделяются на:

- ·Поверхности вращения;
- ·Винтовые поверхности;
- ·Поверхности с плоскостью параллелизма;
- ·Поверхности переноса.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ



ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- Множество линий, заполняющих поверхность так, что через каждую точку поверхности проходит одна линия этого множества, называемая ***каркасом*** поверхности.
- Поверхность может быть задана и конечным множеством точек, которое принято называть ***точечным каркасом***.

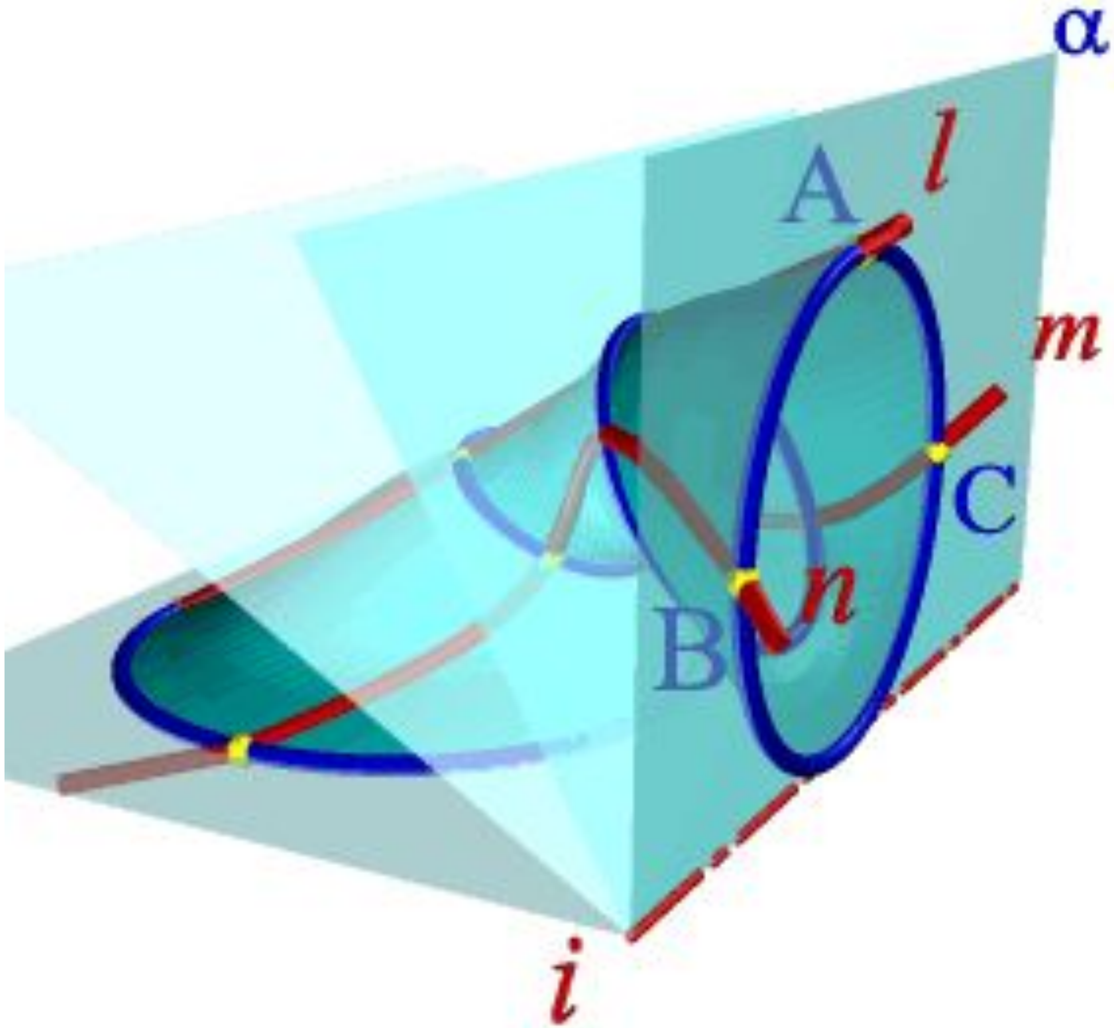
ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ

- Проекции каркаса могут быть построены, если задан ***определитель*** поверхности – совокупность условий, задающих поверхность в пространстве и на чертеже.
- Различают две части определителя: геометрическую и алгоритмическую.

Определитель:

- Геометрическая часть определителя представляет собой набор постоянных геометрических элементов (точек, прямых, плоскостей и т.п.), которые могут и не входить в состав поверхности.
- Вторая часть – алгоритмическая (описательная) – содержит перечень операций, позволяющий реализовать переход от фигуры постоянных элементов к непрерывному каркасу.

ОБРАЗОВАНИЕ И ЗАДАНИЕ ПОВЕРХНОСТИ НА ЧЕРТЕЖЕ



Определитель:

- Геометрическая часть определителя: три направляющих ***l***, ***m***, ***n***, ось ***i*** пучка плоскостей

- Алгоритмическая часть: выделяем из пучка плоскостей с осью ***i*** плоскость ***α***; находим точки ***A, B, C***, в которых ***α*** пересекает соответственно направляющие ***l***, ***m***, ***n***. Строим окружность, определяемую тремя найденными точками. Переходим к следующей плоскости пучка и повторяем построение.

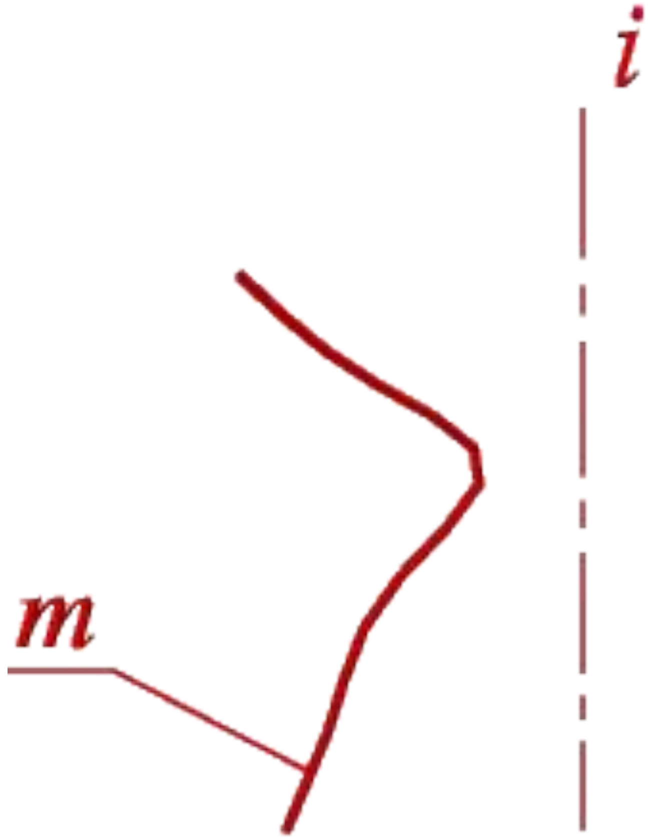
ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- ***Поверхности вращения*** – это поверхности созданные при вращении образующей ***m*** вокруг оси ***i*** .

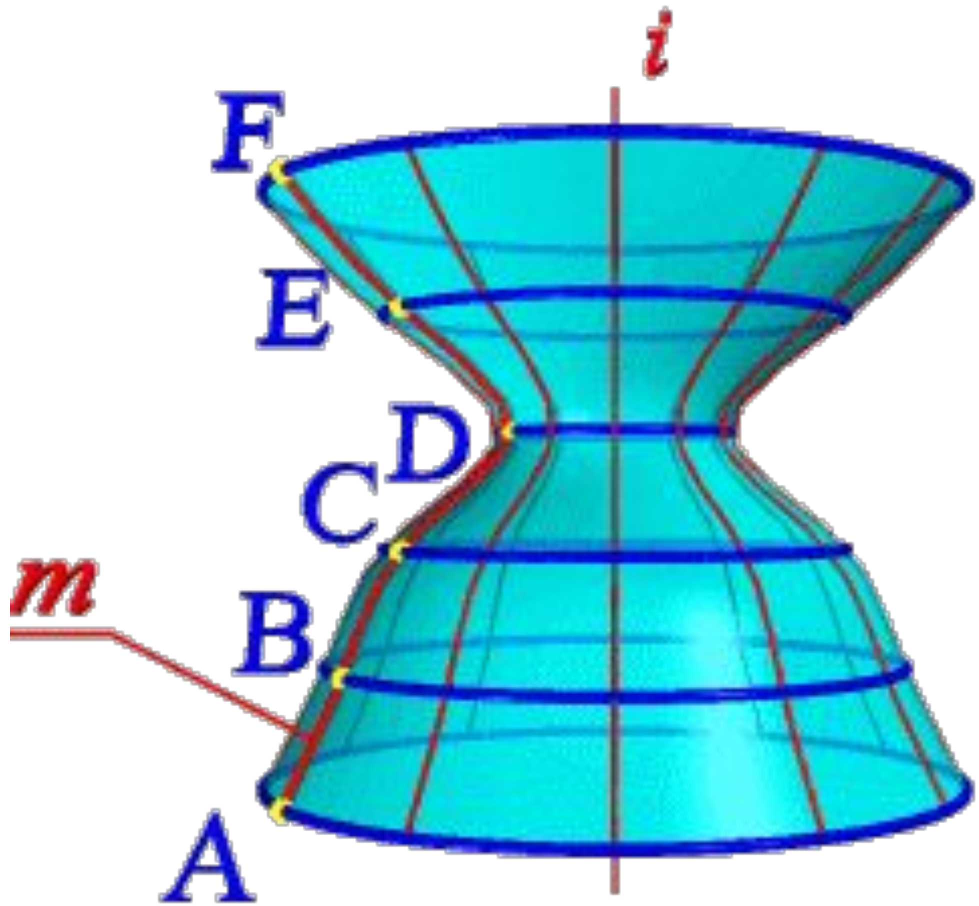
ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- Геометрическая часть определителя состоит из двух линий: образующей ***m*** и оси ***i***.
- Алгоритмическая часть включает две операции:
- 1. На образующей ***m*** выделяют ряд точек ***A*, *B*, *C*, …*F***;
- 2. Каждую точку вращают вокруг оси ***i***.

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ



ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ



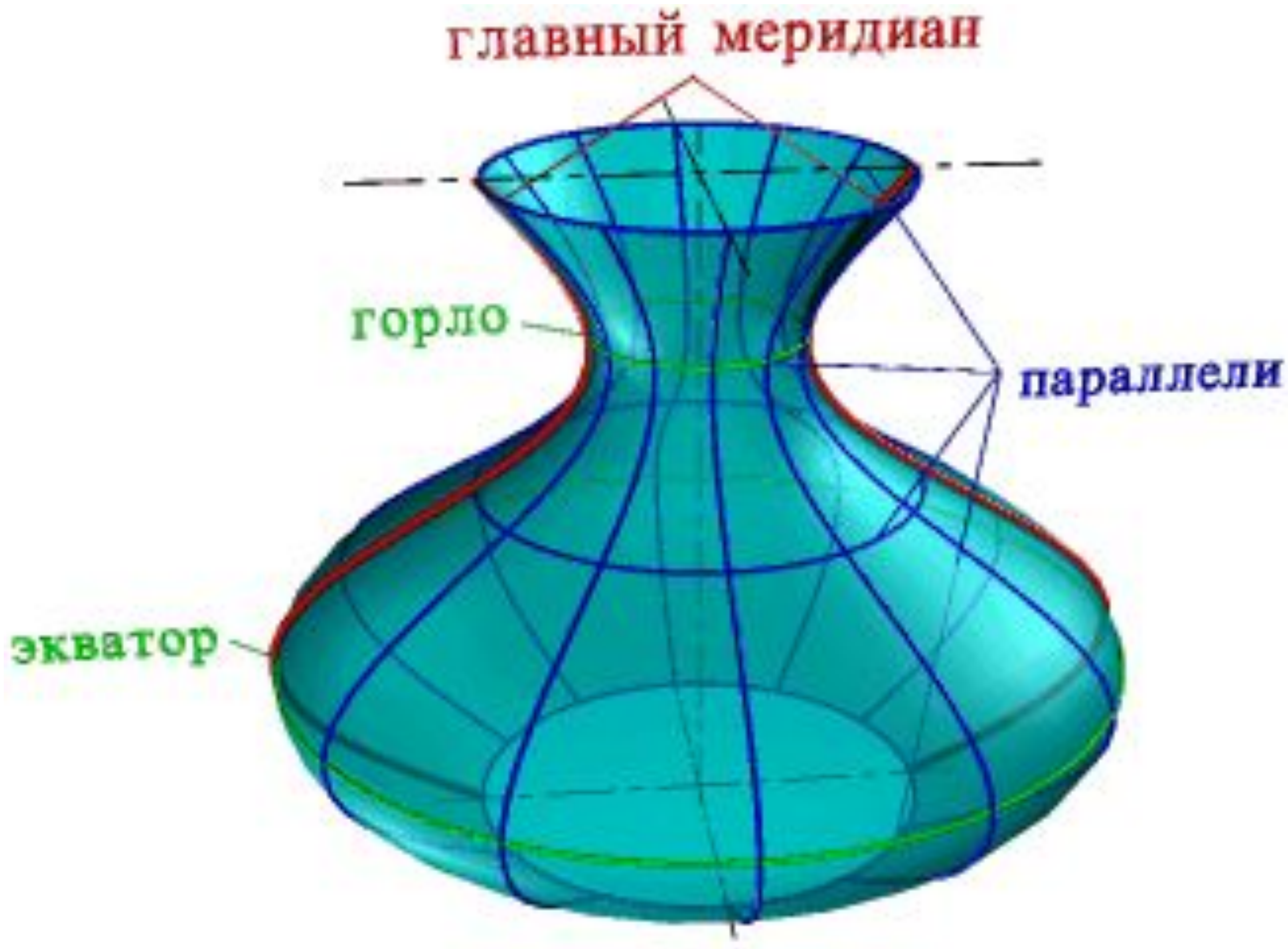
ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- Так создается каркас поверхности, состоящей из множества окружностей, плоскости которых расположены перпендикулярно оси ***i***. Эти окружности называются ***параллелями***;
- наименьшая параллель называется ***горлом***, наибольшая – ***экватором***.

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- Из закона образования поверхности вращения вытекают два основных свойства:
- 1. Плоскость перпендикулярная оси вращения, пересекает поверхность по окружности – ***параллели***.
- 2. Плоскость, проходящая через ось вращения, пересекает поверхность по двум
- симметричным относительно оси линиям – ***меридианам***.
- Плоскость проходящая через ось параллельно фронтальной плоскости проекций называется ***плоскостью главного меридиана***,
- а линия, полученная в сечении, – ***главным меридианом***.

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

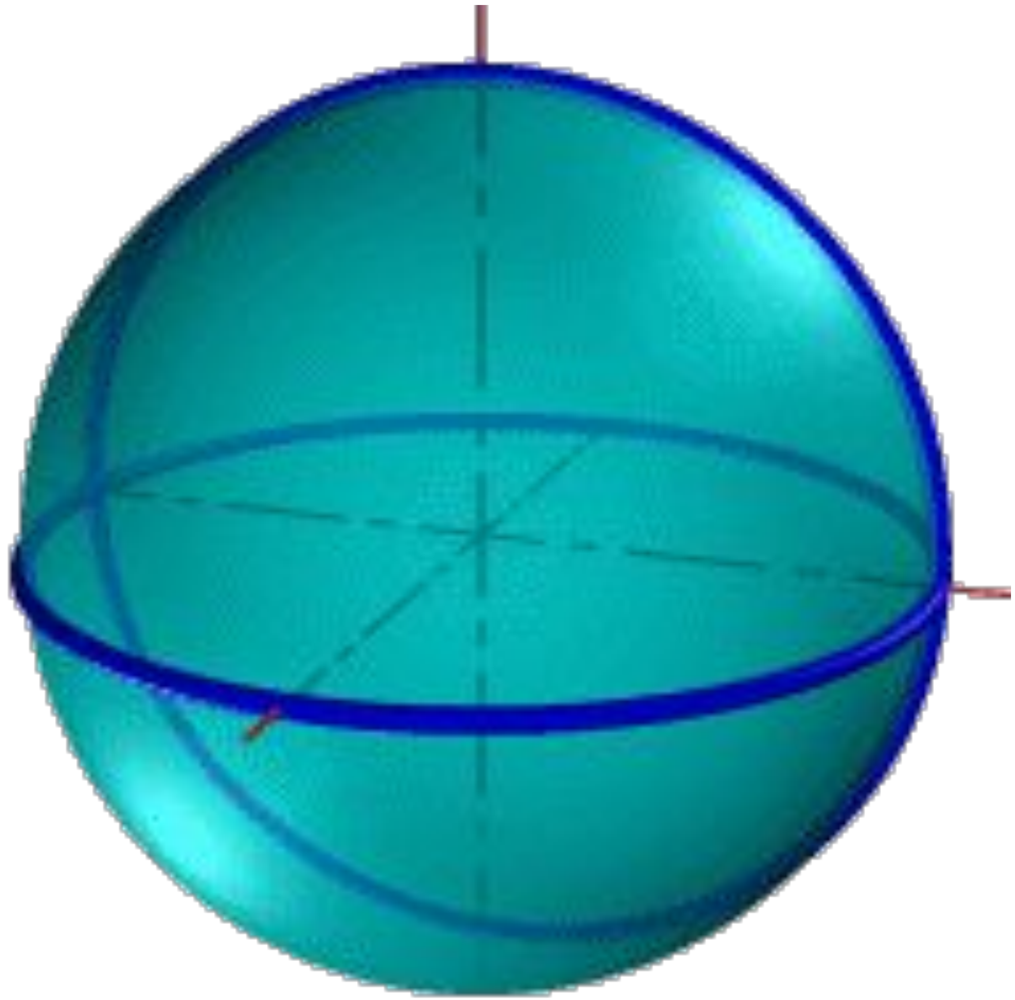


ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- Рассмотрим наиболее распространенные поверхности вращения с криволинейными образующими:

- ***Сфера*** – образуется вращением окружности вокруг её диаметра

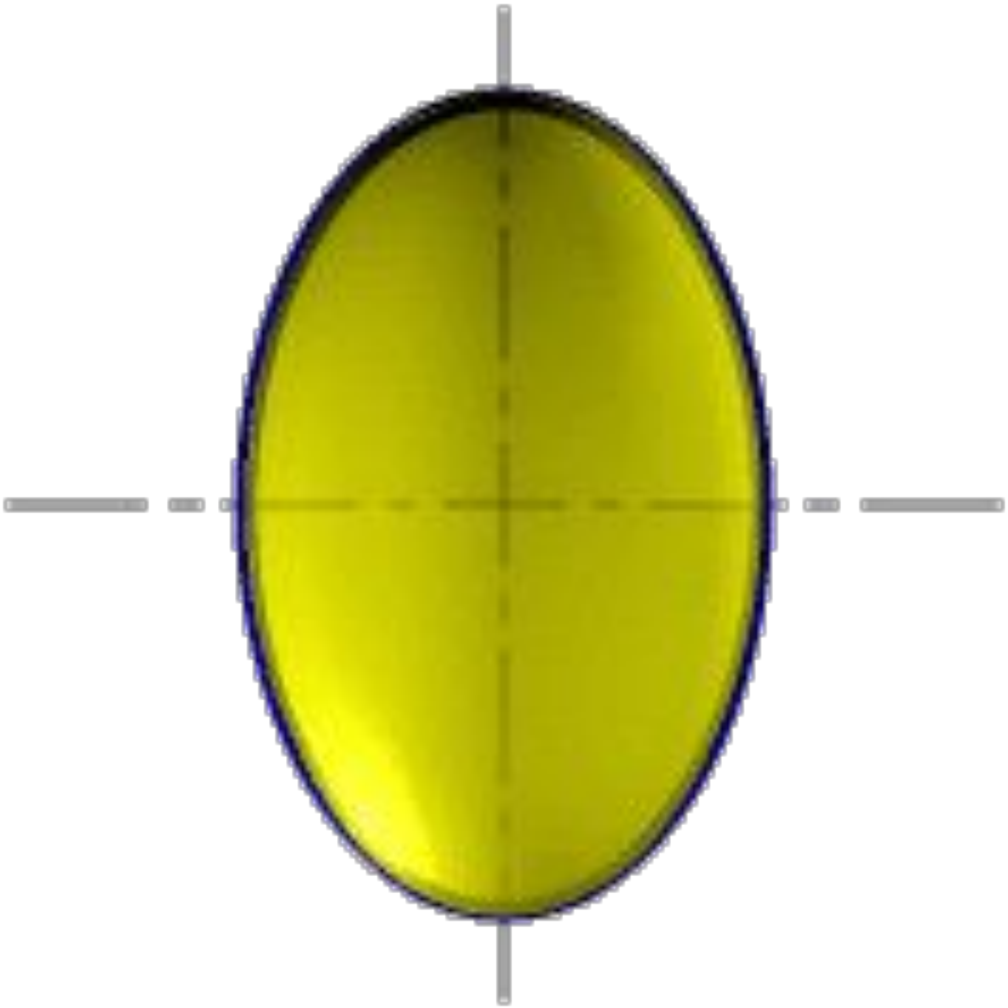
Сфера



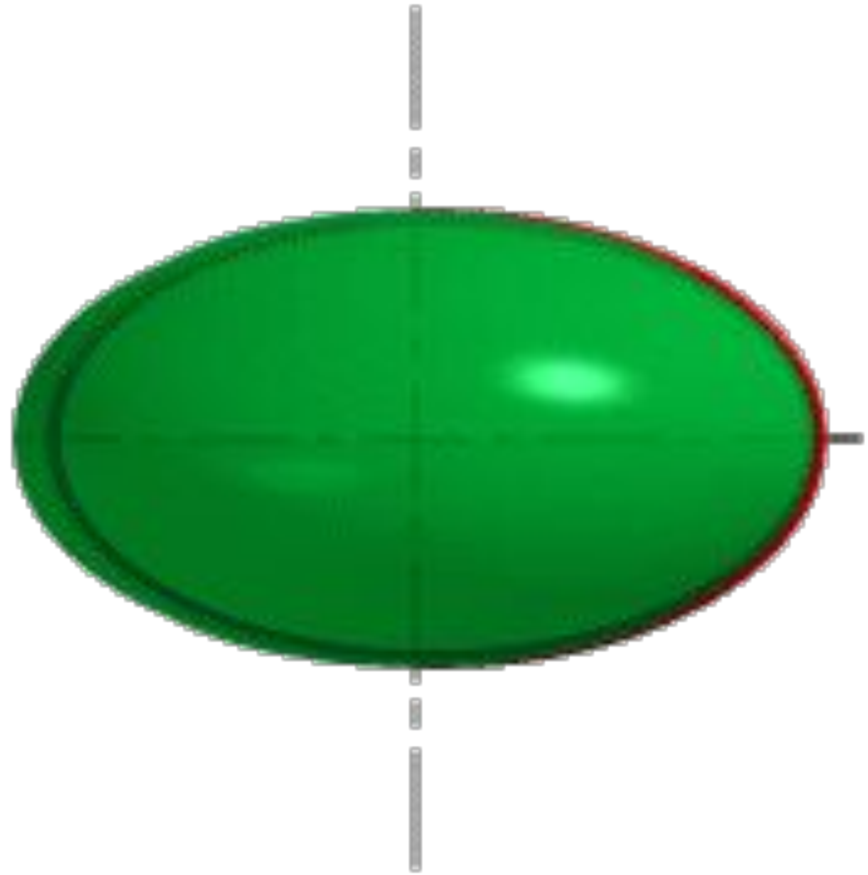
Эллипсоиды

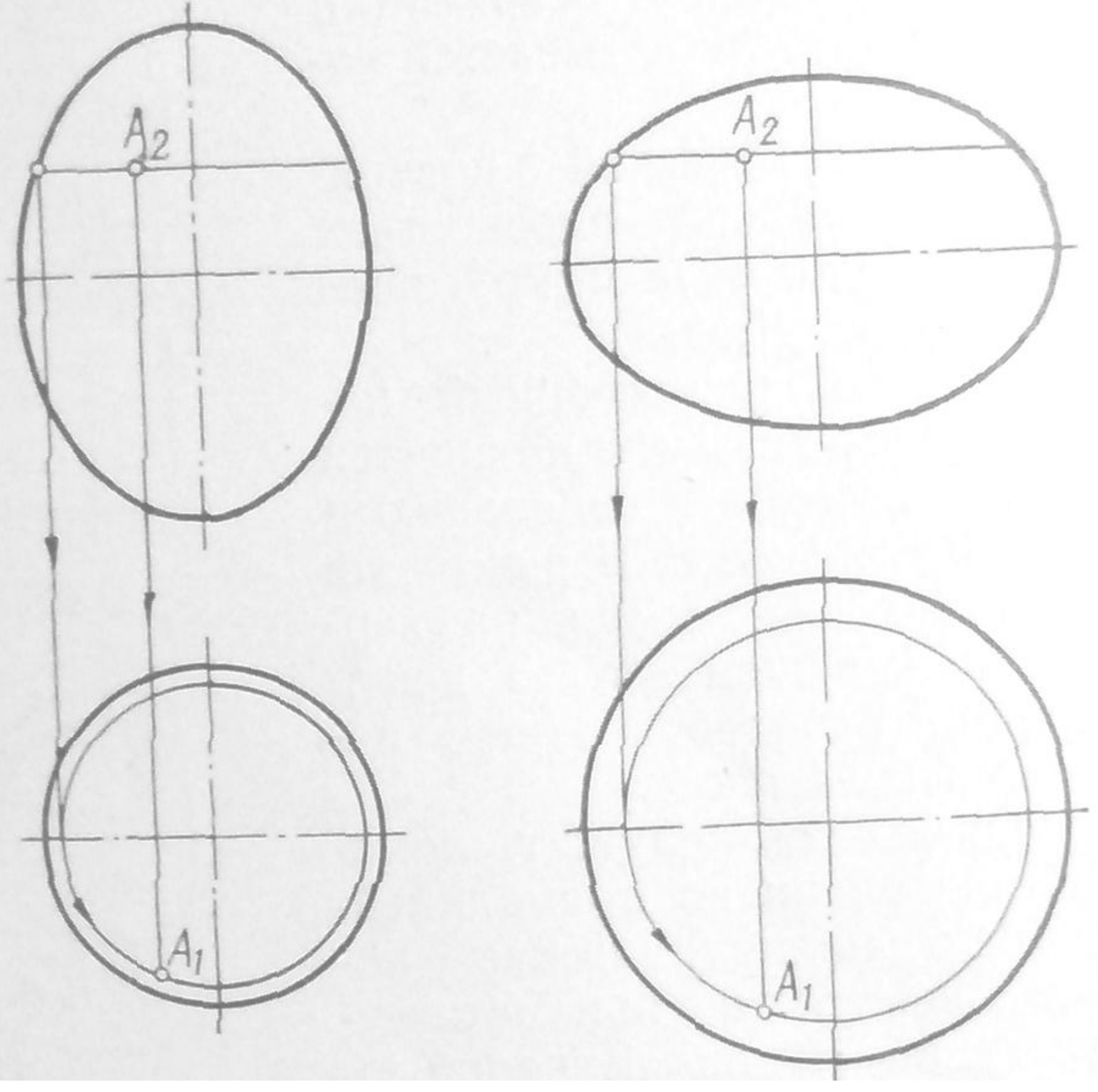
- При сжатии или растяжении сферы она преобразуется в ***эллипсоиды***, которые могут быть получены вращением эллипса вокруг одной из осей: если вращение вокруг большой оси то эллипсоид называется ***вытянутым***, если вокруг малой – ***сжатым*** или ***сфероидом***.

Образование вытянутого эллипсоида



сжатый эллипсоида или *сфероидом*



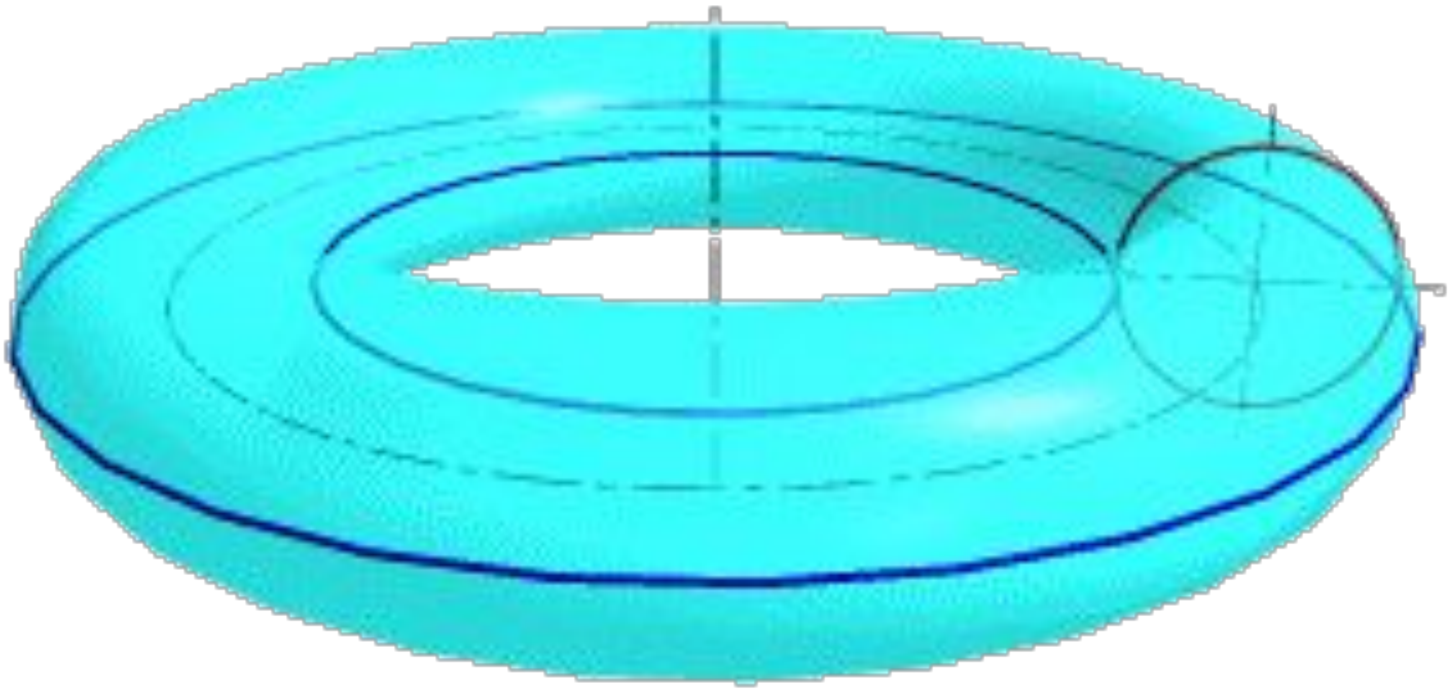


A2
A1
A2
A1

ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- ***Тор*** – поверхность тора формируется при вращении окружности вокруг оси, не проходящей через центр окружности

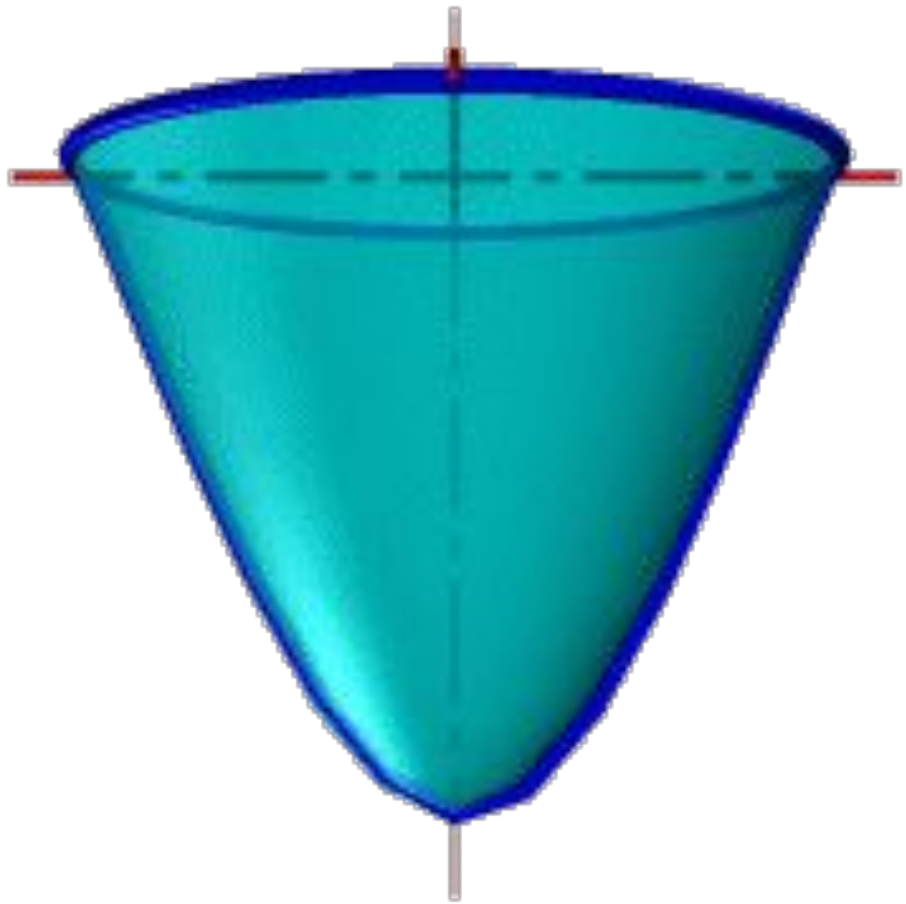
Top

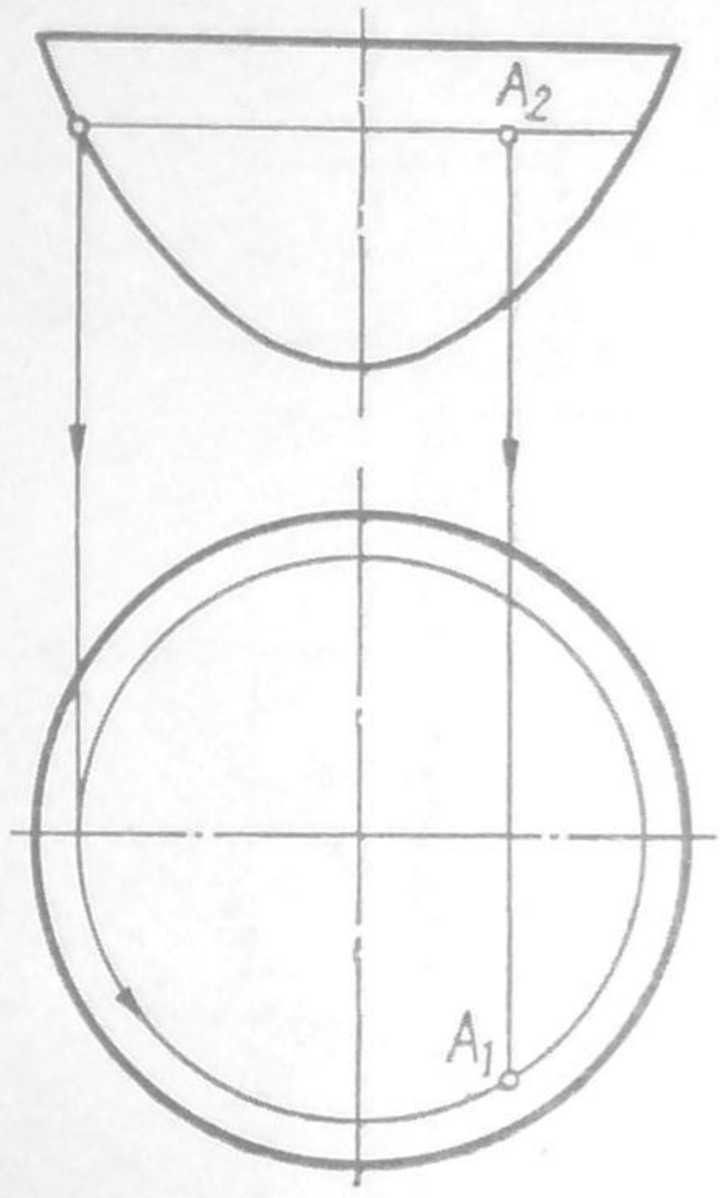


ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

- ***Параболоид вращения*** – образуется при вращении параболы вокруг своей оси

Параболоид вращения





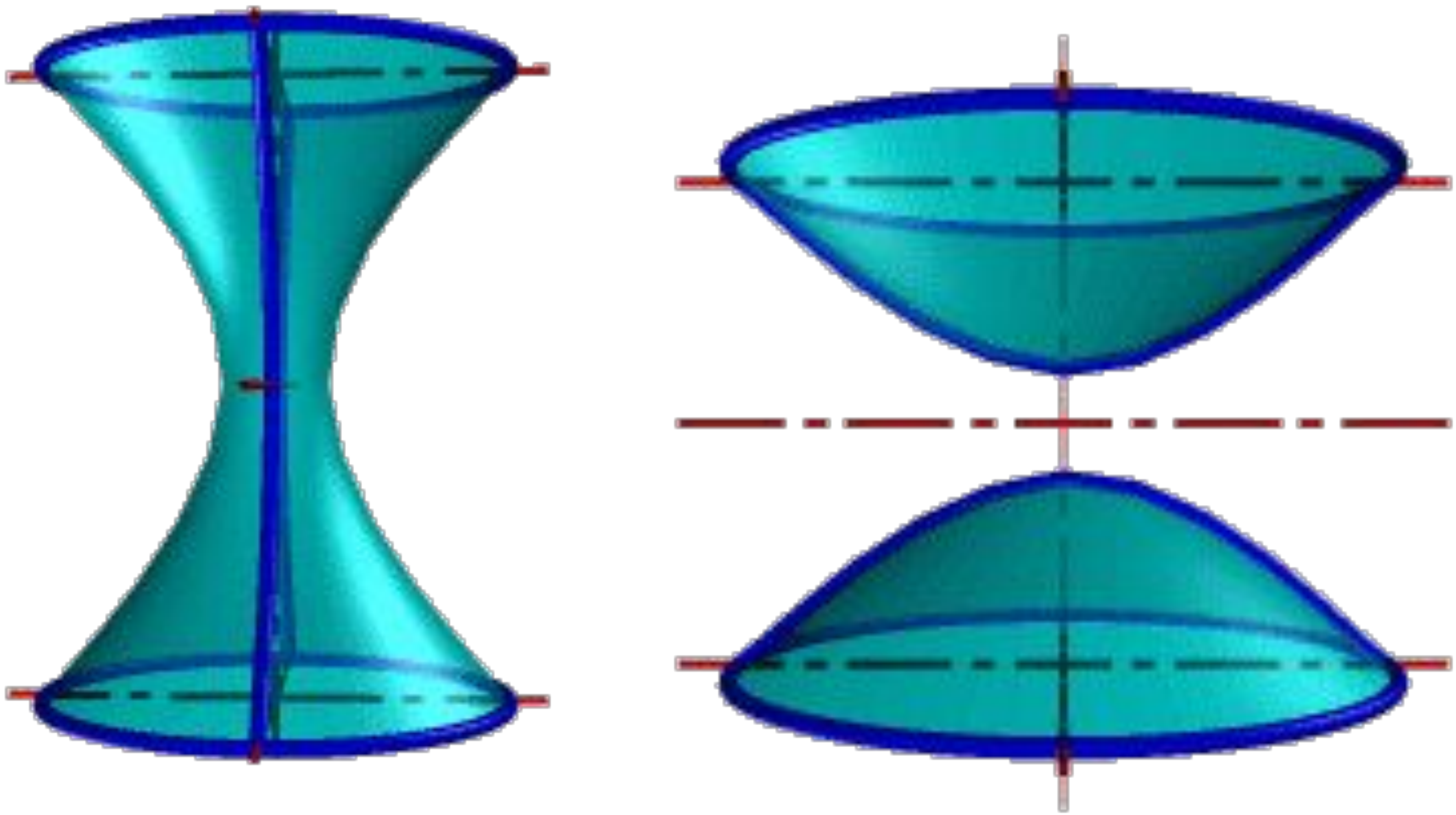
A_2
A_1

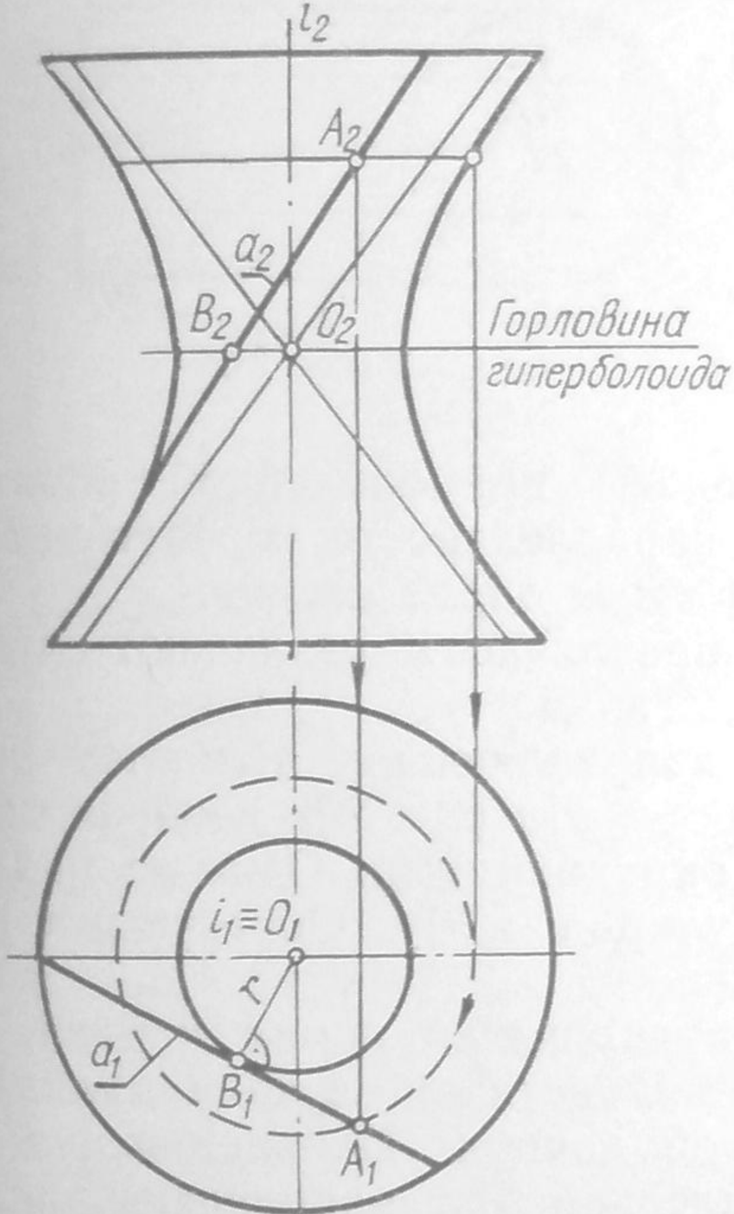
Гиперболоид вращения

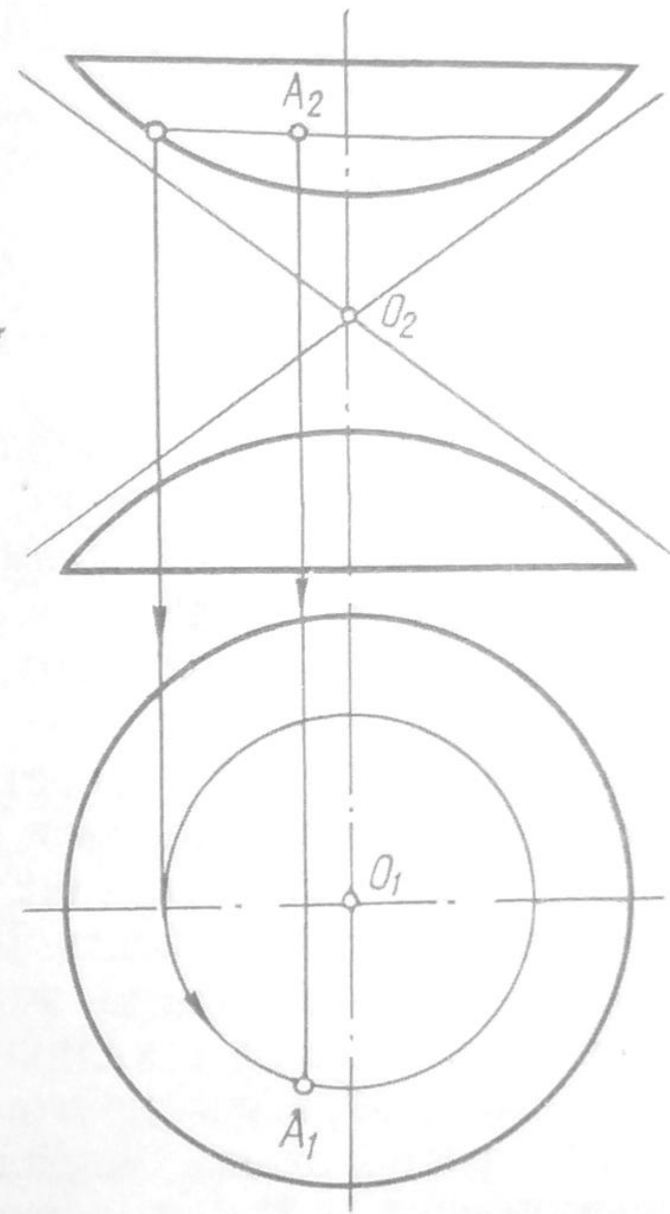
- различают ОДНО и двух полостной гиперболоиды вращения.

- Первый получается при вращении вокруг мнимой оси, а второй – вращением гиперболы вокруг действительной оси.

Гиперболоид вращения



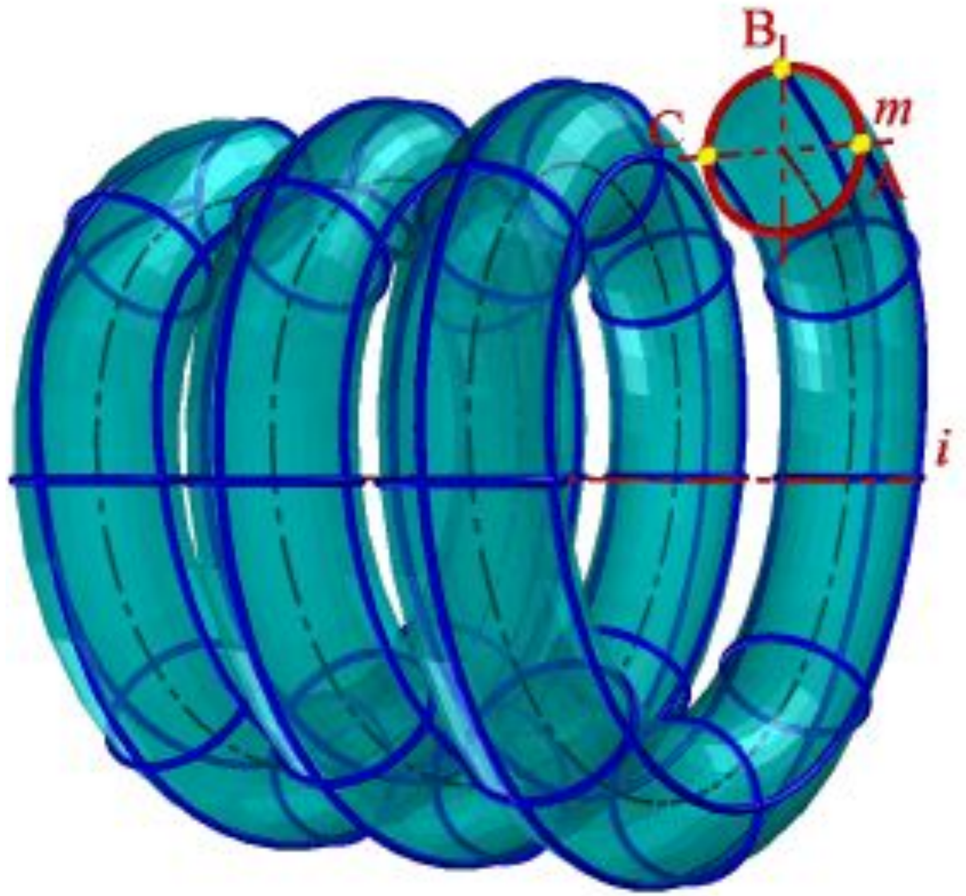

i_2
A_2
a_2
B_2
O_2
Горловина
гиперболоида
$i_1 \equiv O_1$
r
a_1
B_1
A_1


A_2
O_2
O_1
A_1

ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

- Винтовые поверхности образуются винтовым движением некоторой линии – образующей.
- Под винтовым движением понимается совокупность двух движений: поступательного параллельно некоторой оси, и вращательного, вокруг той же оси.

ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ



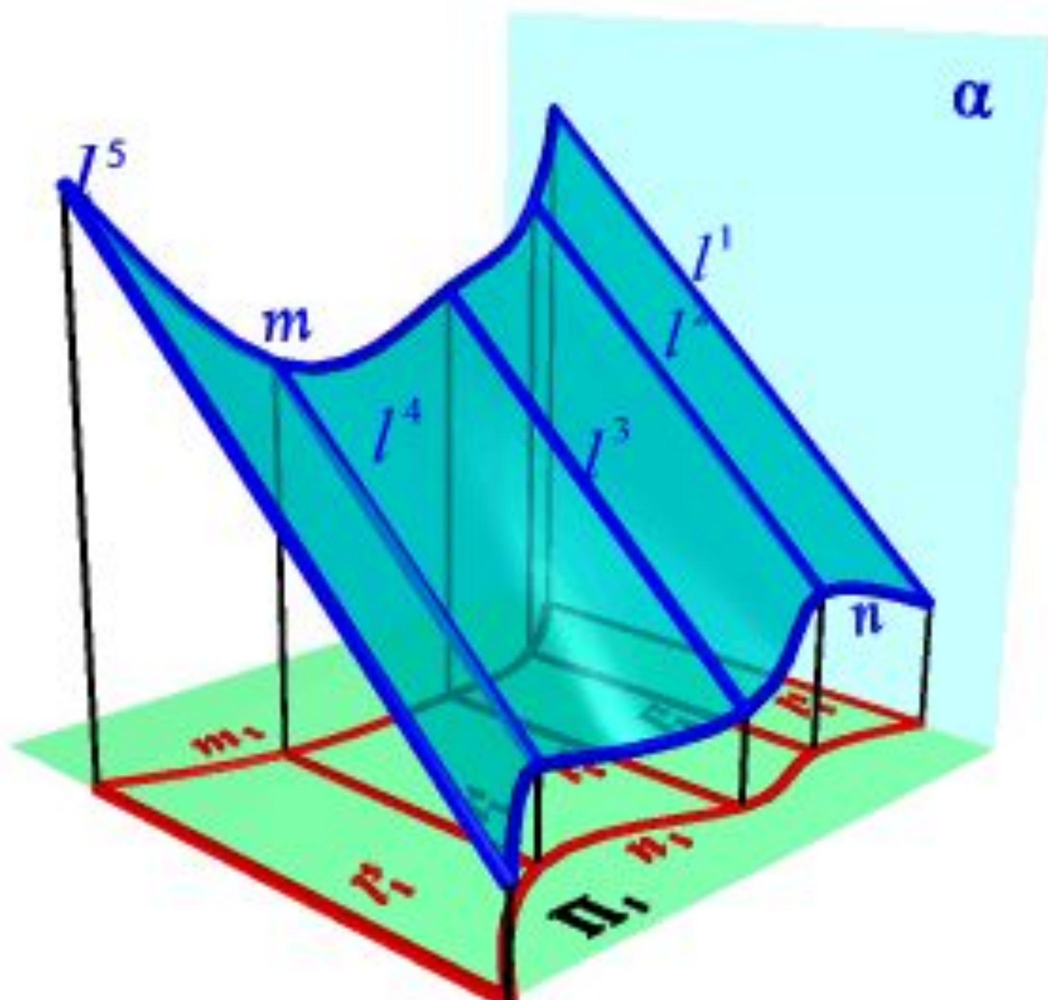
ВИНТОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

- Геометрическая часть определителя винтовой поверхности ни чем не отличается от поверхности вращения и состоит из двух линий: образующей **m**, и оси **i**.
- Алгоритмическая часть:
- 1. На образующей m выделяют ряд точек ***A, B, C***, …
- 2. Строят винтовые линии заданного шага и направления, по которым перемещаются заданные точки.

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

- Поверхность с плоскостью параллелизма представляет собой множество прямых линий ***l*** (образующих), параллельных некоторой плоскости ***α*** (плоскости параллелизма) и пересекающих две данные направляющие ***m***, ***n*** .

ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

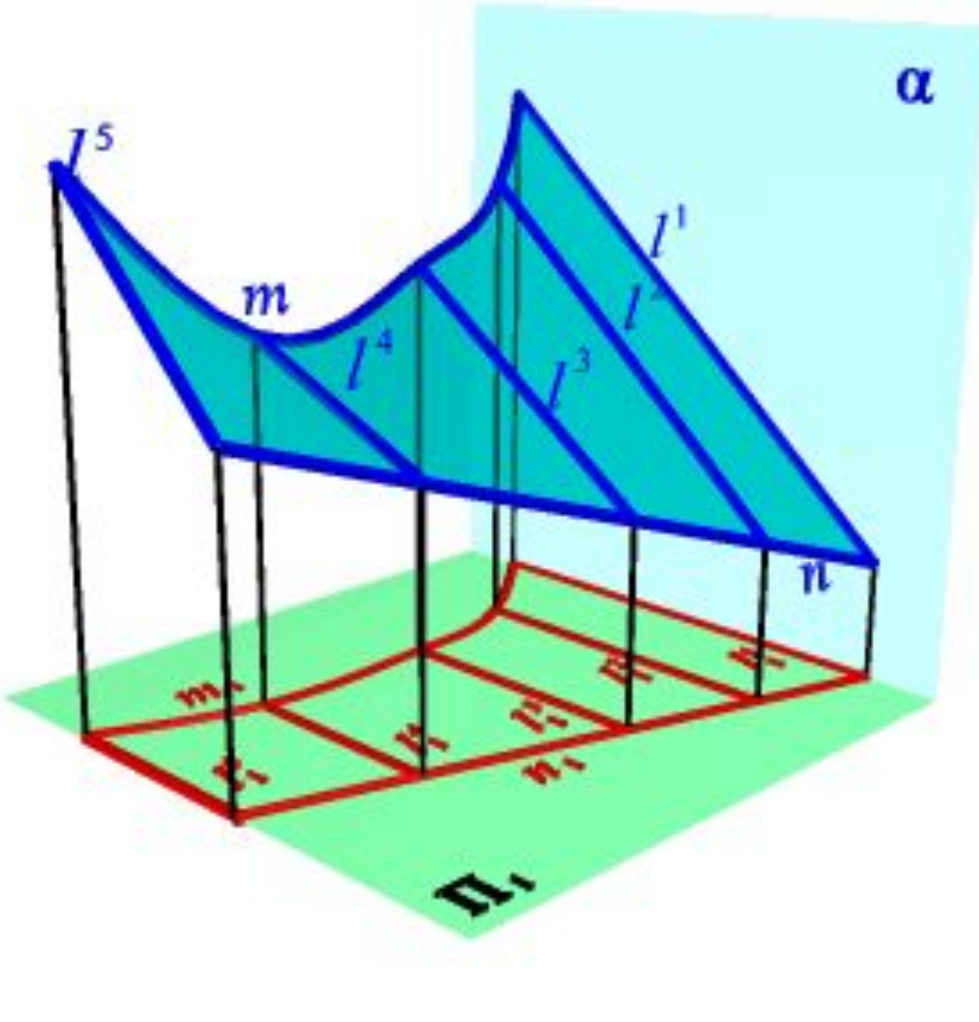


ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

- В зависимости от формы направляющих образуются три частных вида поверхностей.

- ***Цилиндроид*.** Цилиндроидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум направляющим кривым линиям, при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма

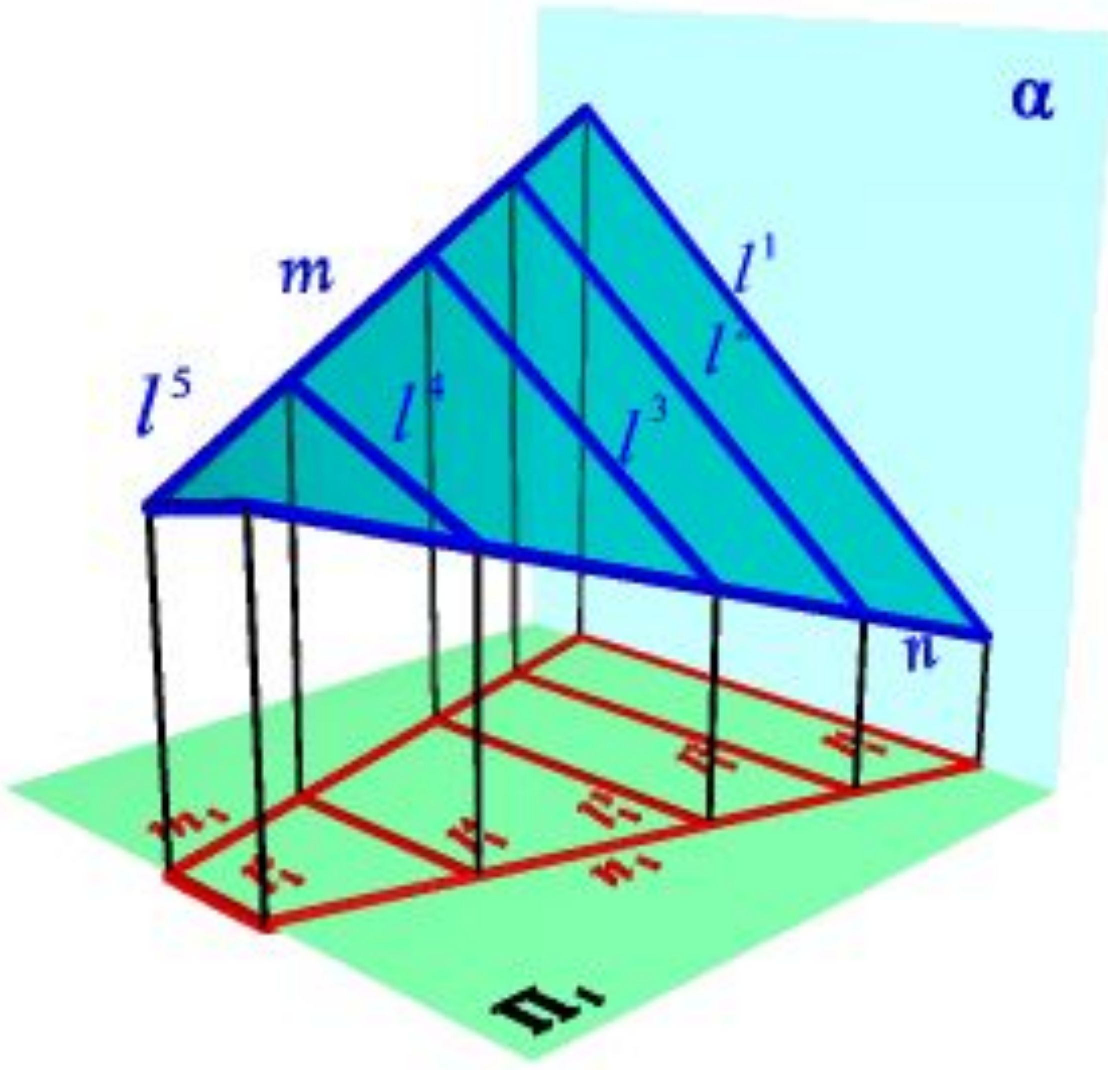
Цилиндроид



ЛИНЕЙЧАТЫЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПЛОСКОСТЬЮ ПАРАЛЛЕЛИЗМА

- ***Коноид.*** Коноидом называется поверхность, образованная движением прямолинейной образующей по двум направляющим, одна из которых кривая линия, а другая прямая, при этом образующая во всех положениях параллельна плоскости параллелизма.

Коноид.



ПОВЕРХНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

- Поверхностью параллельного переноса называется поверхность, образованная поступательным плоскопараллельным перемещением образующей - плоской кривой линии ***m*** по криволинейной направляющей ***n*** .

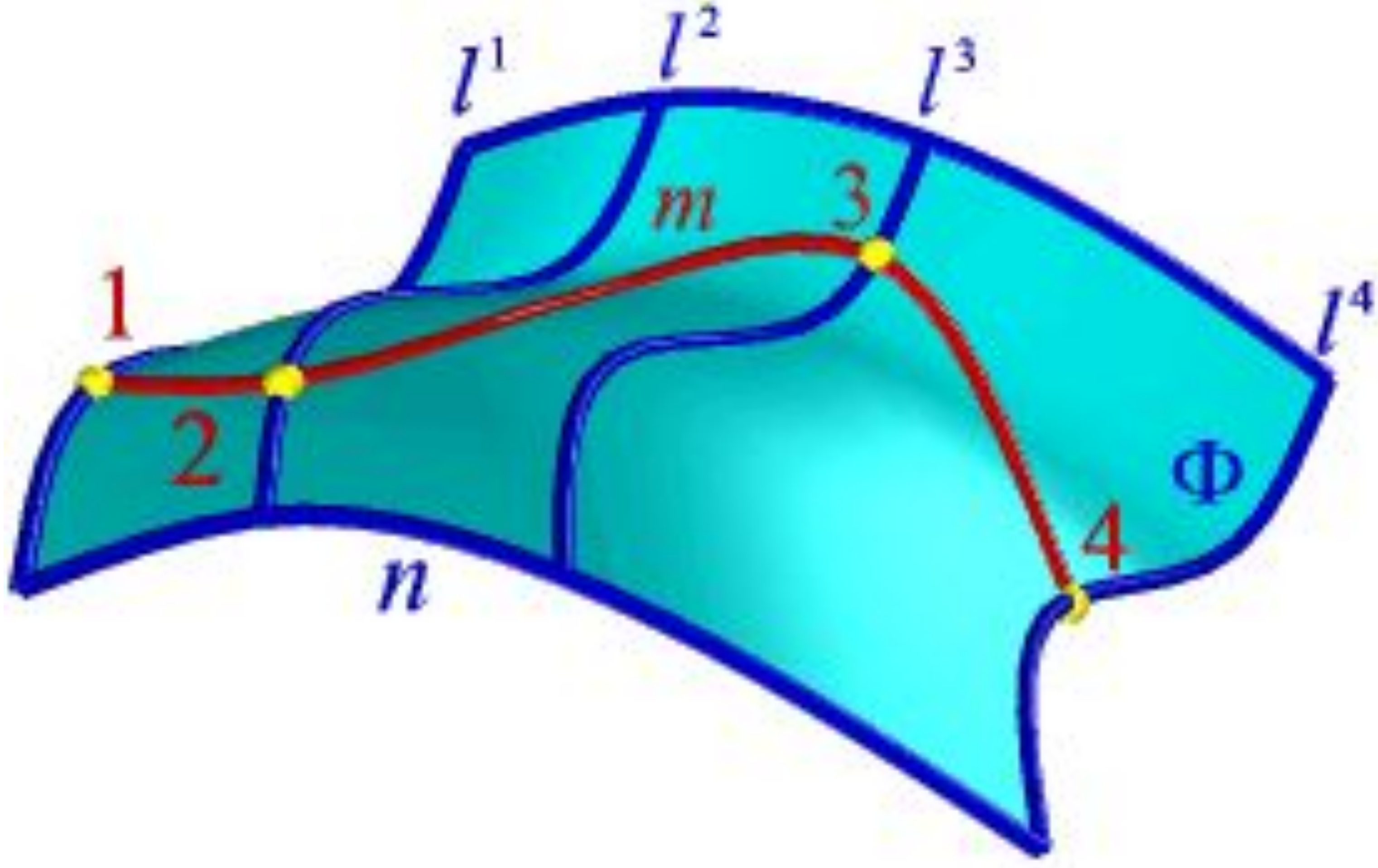
ПОВЕРХНОСТИ ПАРАЛЛЕЛЬНОГО ПЕРЕНОСА

- Геометрическая часть определителя состоит из двух кривых линий образующей - ***m*** и направляющей – ***n***.
- Алгоритмическая часть определителя содержит перечень операций:
- На направляющей ***n*** выбираем ряд точек ***A, B, C,…***
- Строим векторы ***AB*** , ***BC,…***
- Осуществляем параллельный перенос линии ***m*** по векторам ***AB***, ***BC , …***
- Наглядным примером плоскости параллельного переноса может служить скользящая опалубка, применяемая в строительстве.

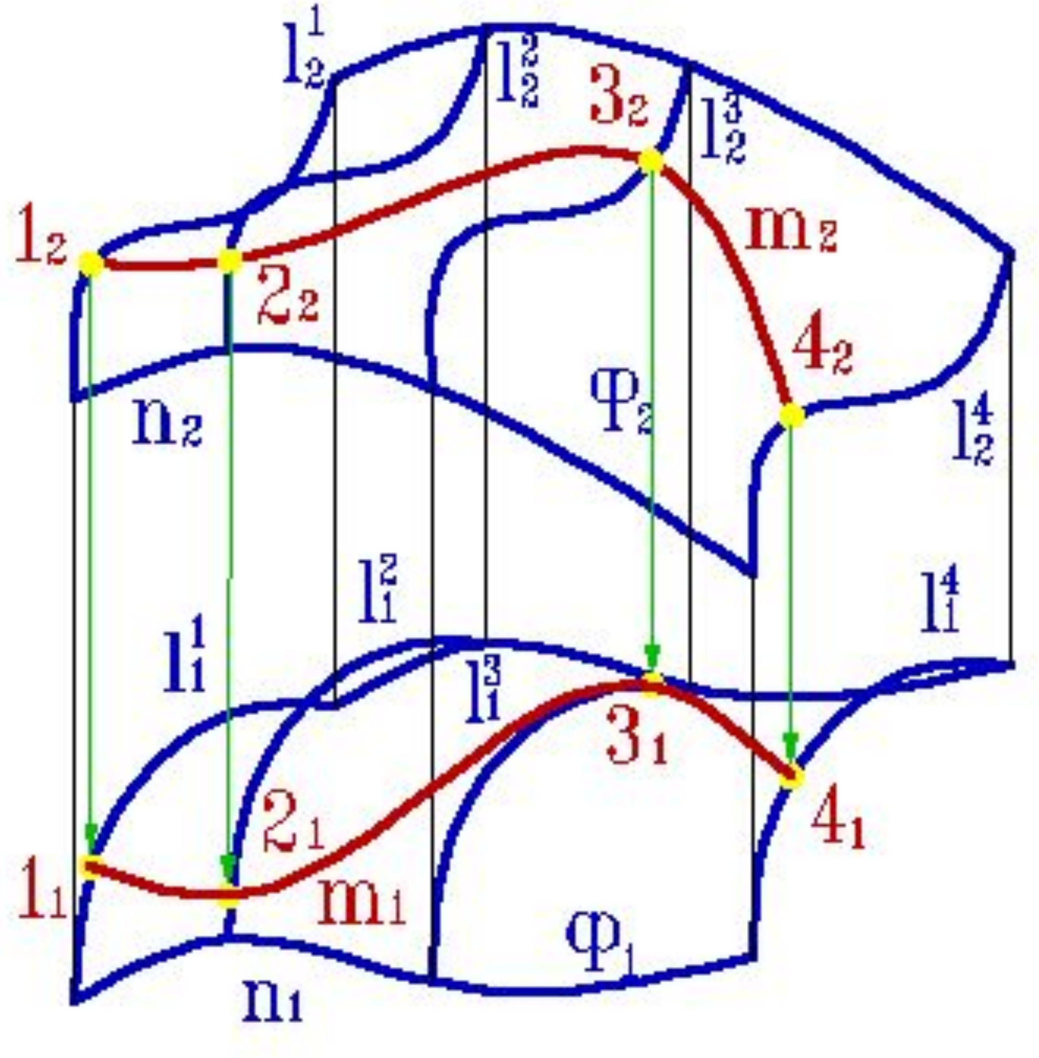
ЛИНИЯ И ТОЧКА, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ

- Для определения принадлежности точки и линии поверхности рассмотрим следующие позиционные задачи:
- ***Задача*** 1. Построение линии принадлежащей поверхности, если одна из проекций линии задана.
- Дано:1.Поверхность ***Ф*** , заданная проекциями каркаса состоящих из образующих линий ***l*** и направляющей ***n***.
- 2. Проекция линии ***m2*,** принадлежащей поверхности ***Ф***.

ЛИНИЯ И ТОЧКА, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ



ЛИНИЯ И ТОЧКА, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ



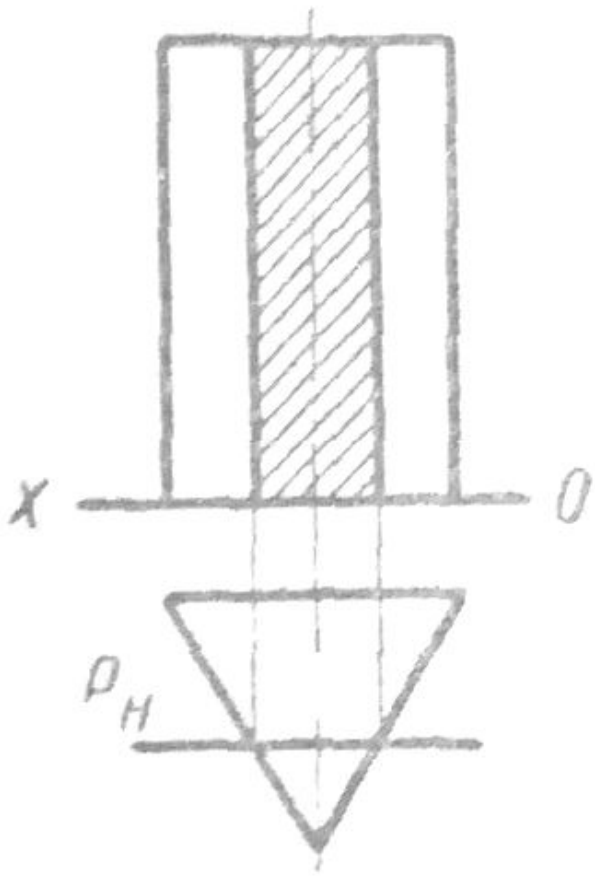
ЛИНИЯ И ТОЧКА, ПРИНАДЛЕЖАЩИЕ ПОВЕРХНОСТИ

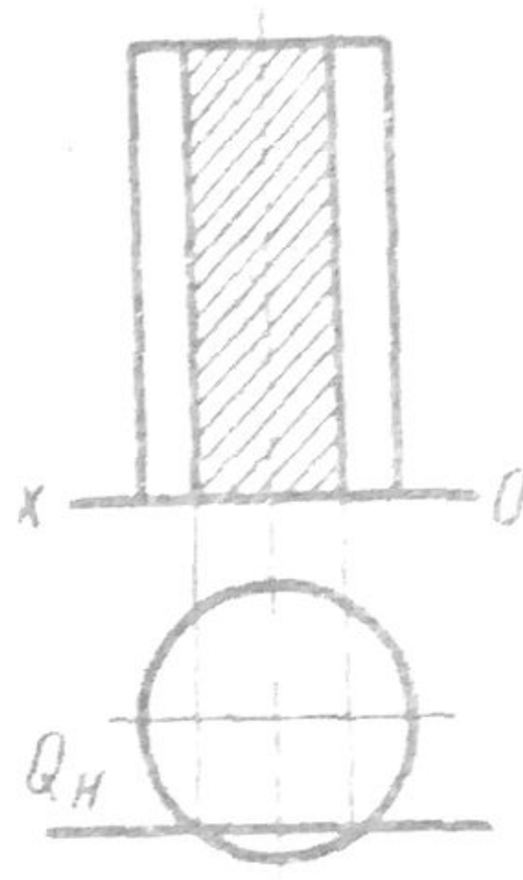
- Алгоритм решения задачи:
- 1. Находим точки 1**2**, 2**2**, 3**2**, 4**2** пересечения проекции линии ***m2*** с проекцией каркаса поверхности, т.е. соответственно с проекциями линий **_l_12, _l_22, _l_32**, **_l_42** .
- 2. По линиям связи находим проекции точек ***1*1*, 2*1*, 3*1*, 4*1*,**** как точки лежащие на проекциях образующих каркаса соответственно **_l_11, _l_21, _l_31**, **_l_41** и определяющих положение проекции линии ***m1*** на поверхности ***Ф***.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

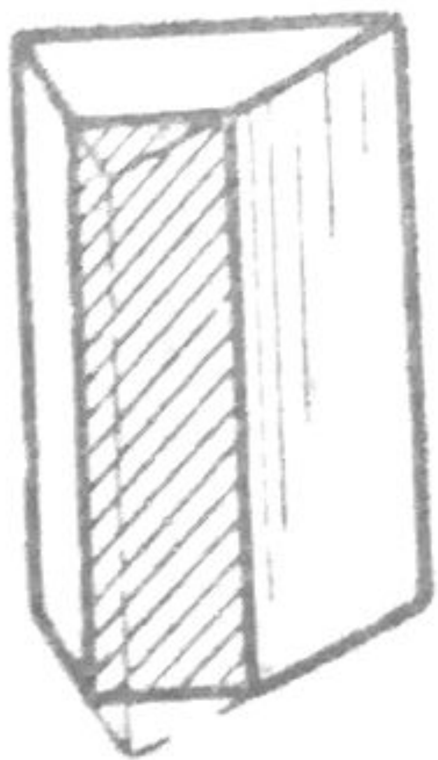
- **Пересечение плоскостью тел с параллельными образующими (призмы и цилиндры).**
- Простейшие сечения получают плоскостями, параллельными плоскостям проекций:
- 1) фронтальной
- 2) горизонтальной плоскостям

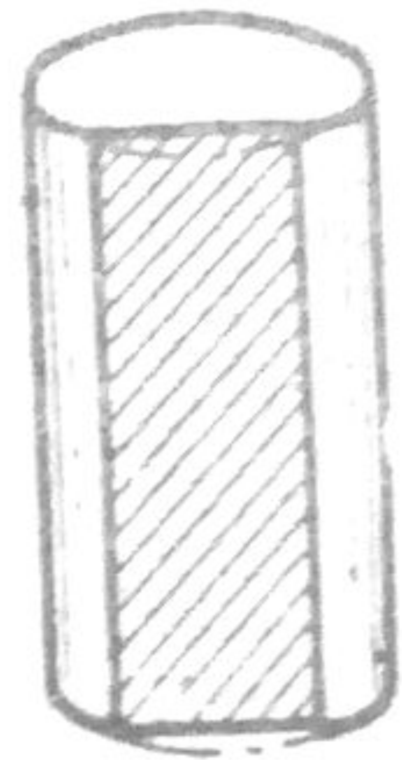
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ



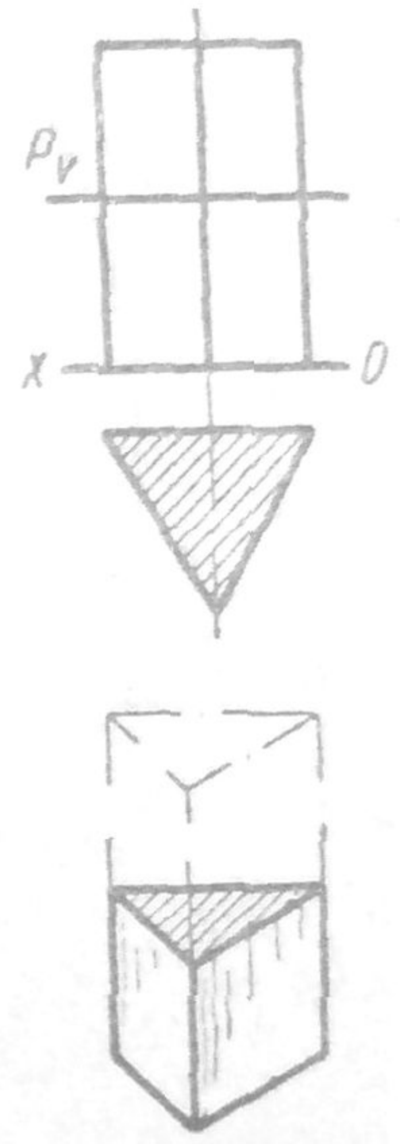


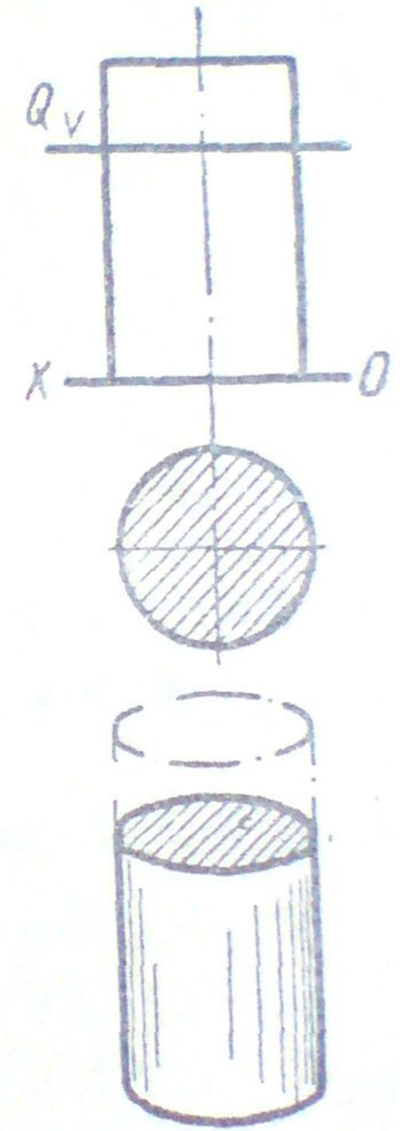
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ





ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ





Построение линий пересечения поверхностей

В общем случае линия пересечения двух кривых поверхностей представляет из себя пространственную кривую линию порядок которой равен произведению порядков поверхностей.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

- Наиболее простым является случай, когда плоскость проецирующая.

- Рассмотрим решение задачи по определению линии пересечения сферы фронтально - проецирующей плоскостью α

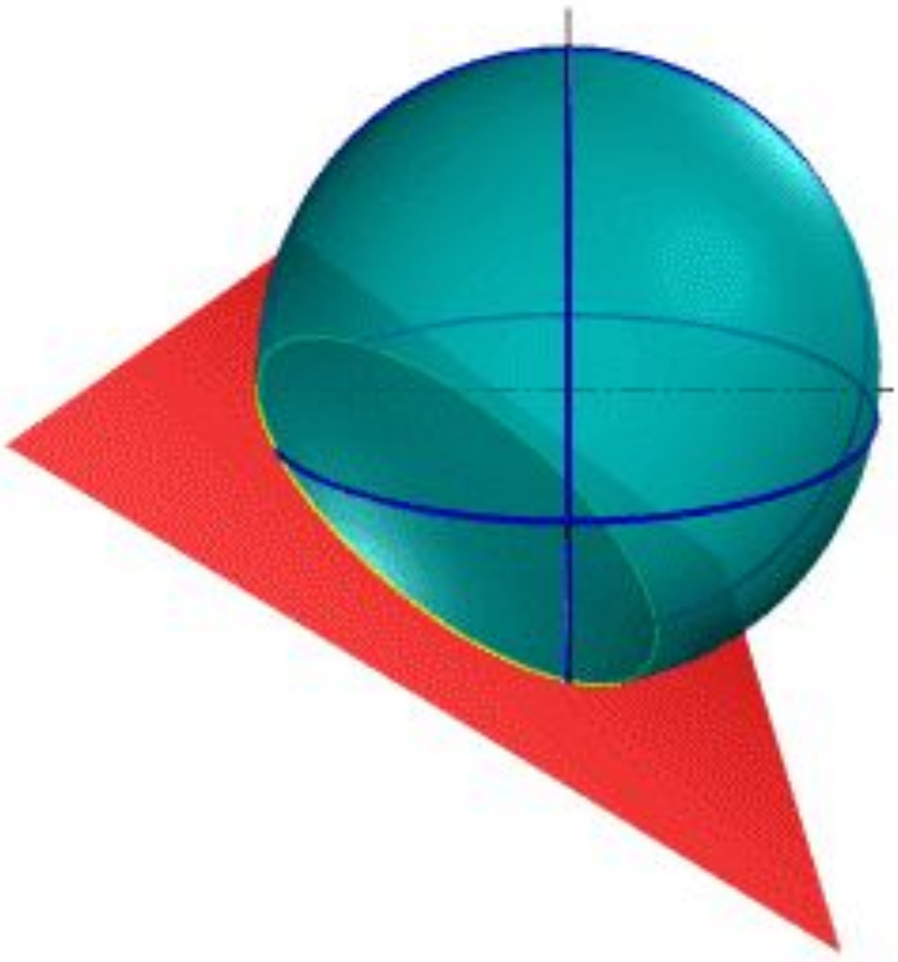
МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

- Вспомогательные секущие плоскости чаще всего выбирают проецирующими и параллельными одной из плоскостей проекций - плоскостями уровня.
- Этот способ рекомендуется применять, если сечения заданных поверхностей одной и той же плоскостью являются прямыми линиями или окружностями.

МЕТОД ВСПОМОГАТЕЛЬНЫХ СЕКУЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ

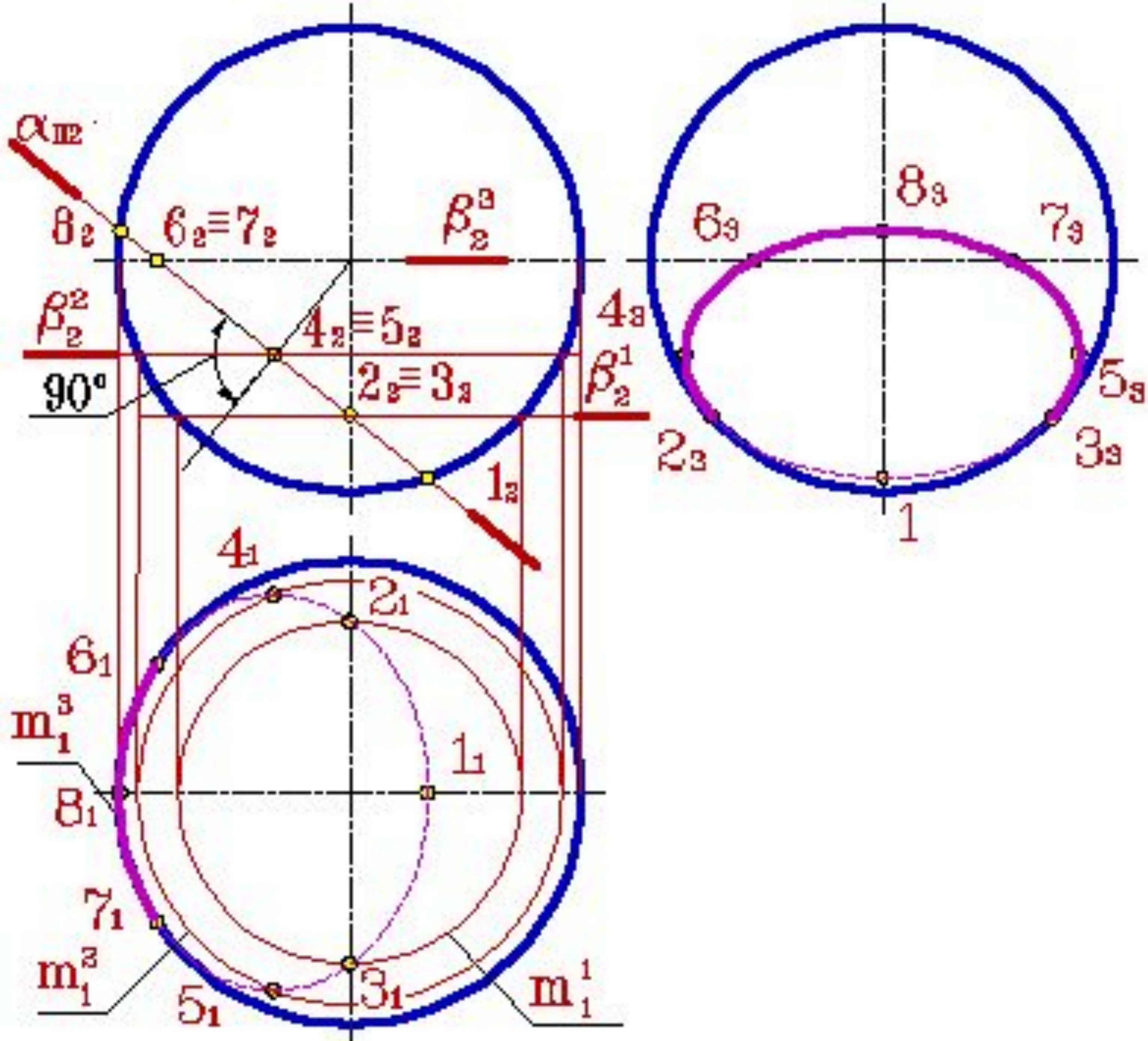
- Этот способ рекомендуется применять, если сечения заданных поверхностей одной и той же плоскостью являются прямыми линиями или окружностями. Такая возможность существует в трех случаях:
- 1. **Если образующие (окружности) расположены в общих плоскостях уровня;**
- **2. Если в общих плоскостях уровня оказываются прямолинейные образующие линейчатой поверхности и окружности циклической;**
- **3. Линейчатые каркасы заданных поверхностей принадлежат общим плоскостям уровня или пучкам плоскостей общего положения.**

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ



ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

- Окружность, по которой плоскость ***α*** пересекает сферу, проецируется на плоскости ***горизонтальную*** и ***профильную*** в виде эллипса, а на ***фронтальную*** плоскость в прямую линию ограниченную очерком сферы



$\alpha_{\Pi 2}$
8_2
$6_2 \equiv 7_2$
β_2^3
β_2^2
$4_2 \equiv 5_2$
$90°$
$2_2 \equiv 3_2$
β_2^1
1_2
8_3
6_3
7_3
4_3
5_3
2_3
3_3
1
4_1
2_1
6_1
m_1^3
1_1
8_1
7_1
m_1^2
3_1
5_1
m_1^1

- **Охарактеризуем выбранные для построения точки:**
- ·1, 8- две вершины эллипса, определяющие положение малой оси, их фронтальные проекции определяют пересечение следа плоскости ***α*** с очерком сферы, а горизонтальные проекции являются высшей и низшей точками сечения
- ·2, 3- фронтальные проекции этих точек лежит на вертикальной оси сферы, а профильные проекции будут лежать на очерке сферы и определять зону видимости при построении эллипса на ***профильной плоскости проекций***.
- · 4, 5- две вершины эллипса, определяющие положение большой оси эллипса, положение их фронтальной проекции определяет перпендикуляр, опущенный из центра сферы к следу плоскости ***α***.
- · 6, 7- Фронтальные проекции этих точек лежат на горизонтальной оси сферы, т.е. принадлежат экватору сферы, их горизонтальная проекция лежит на очерке сферы и определяет зону видимости при построении эллипса.

- Линия пересечения плоскости $\boldsymbol{\alpha}$ и сферы на фронтальной плоскости проекций совпадает со следом плоскости на ней отмечаем точки $\boldsymbol{1_2 \ldots 8_2}$.
- *Для нахождения горизонтальных проекций этих точек в общем случае используется метод вспомогательных секущих плоскостей (**β**- горизонтальные плоскости уровня).*
- Например, через точки $\boldsymbol{2_2}$, $\boldsymbol{3_2}$ проведем след плоскости $\boldsymbol{\beta 1_2}$, на горизонтальной плоскости проекций линией пересечения плоскости $\boldsymbol{\beta_1}$ и сферы будет окружность $\boldsymbol{m1_1}$, а точки $\boldsymbol{2_1}$ и $\boldsymbol{3_1}$ лежат на этой окружности по линии связи (в данном случае осевой линии). Таким образом находятся все точки, кроме $\boldsymbol{1_1}$ и $\boldsymbol{8_1}$, которые ввиду своего положения на очерке фронтальной проекции сферы будут принадлежать горизонтальной осевой линии. Построенные точки $\boldsymbol{1_1 \ldots 8_1}$ соединим плавной кривой линией с учетом видимости.

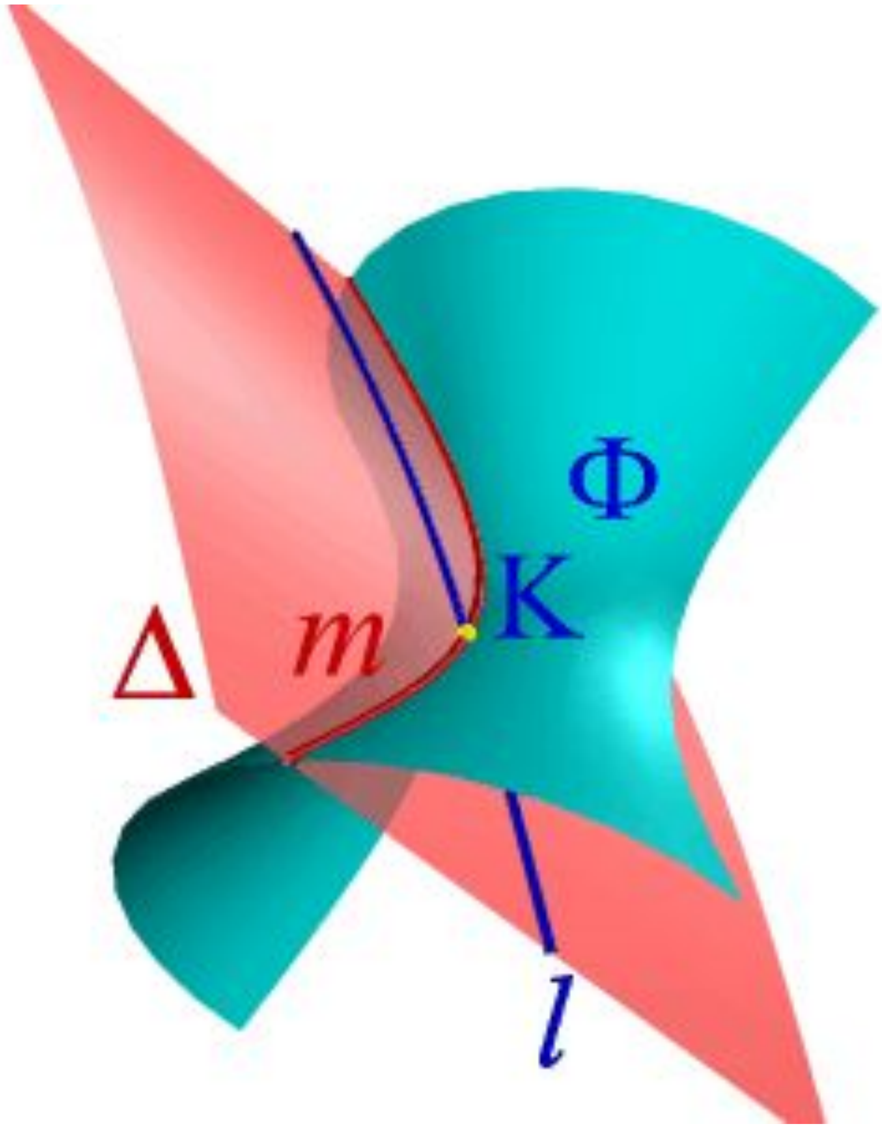
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ

- В общем случае для графического определения точек пересечения линии с поверхностью необходимо выполнить ряд геометрических построений, описываемых следующим алгоритмом:

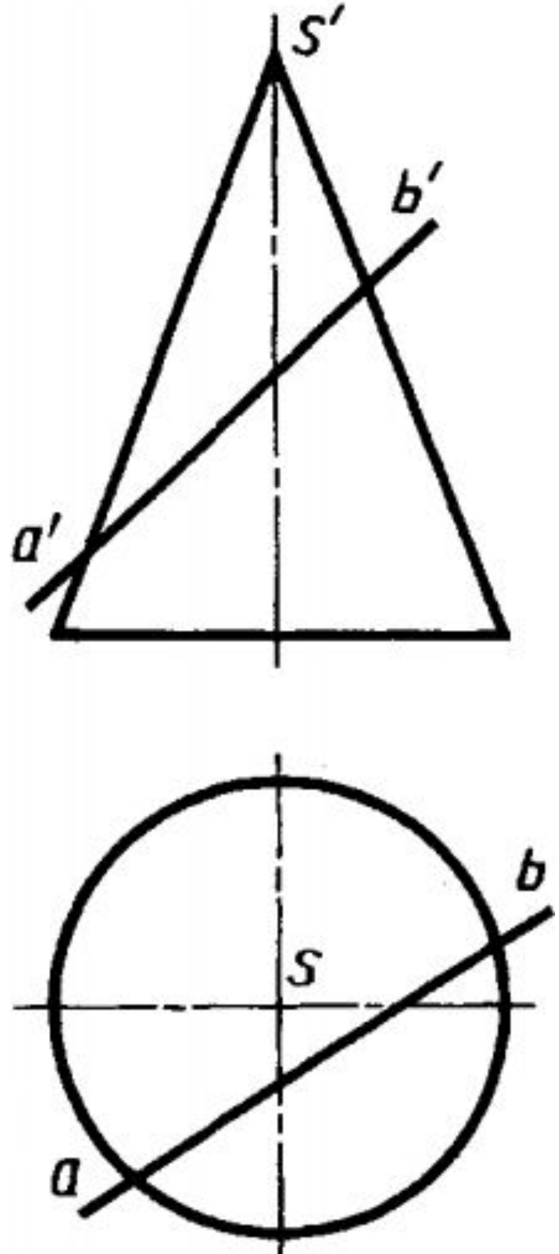
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ТОЧЕК ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПРЯМОЙ С ПОВЕРХНОСТЬЮ ПЛОСКОСТИ

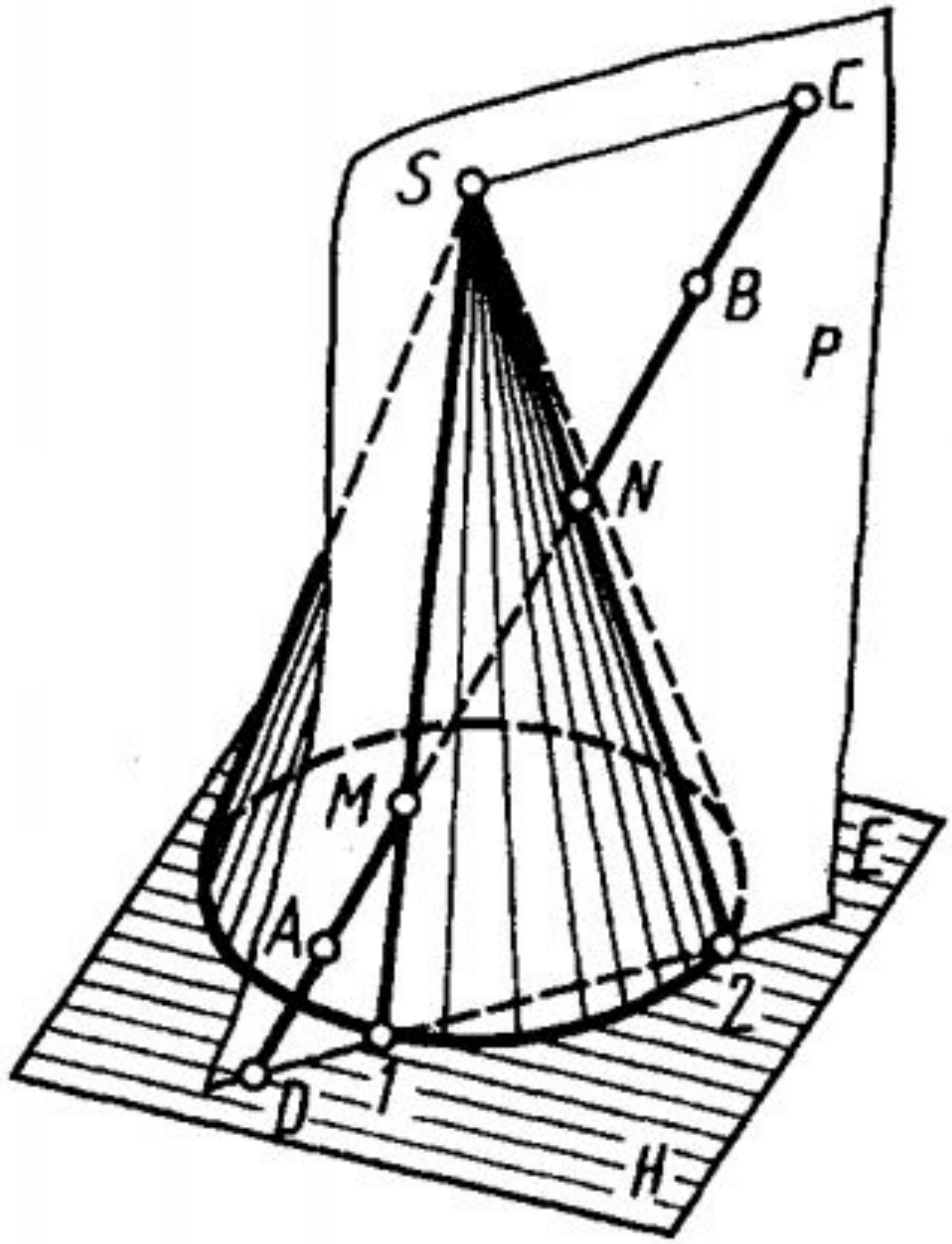
- 1. Заключаем прямую линию в некоторую дополнительную плоскость (в которой будет получаться простейшая фигура(окружность, треугольник, квадрат));
- 1. Строим линию пересечения заданной плоскости и дополнительной поверхности;
- 2. Определяем искомую точку пересечения прямой с линией сечения плоскости (точка может быть не единственная).

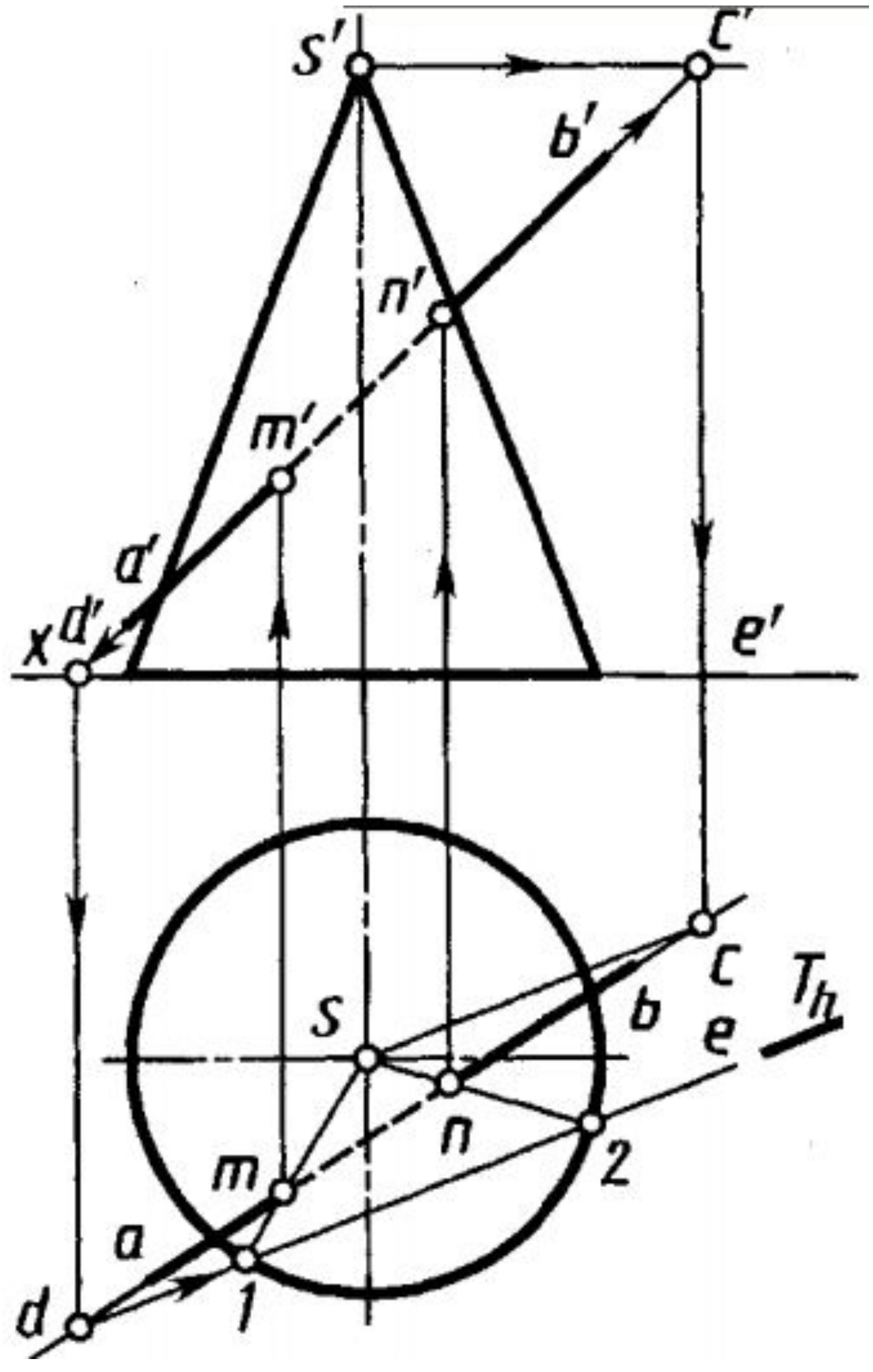
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ



Построение точки пересечения прямой с конусом




S
C
B
P
N
M
A
E
2
1
D
H

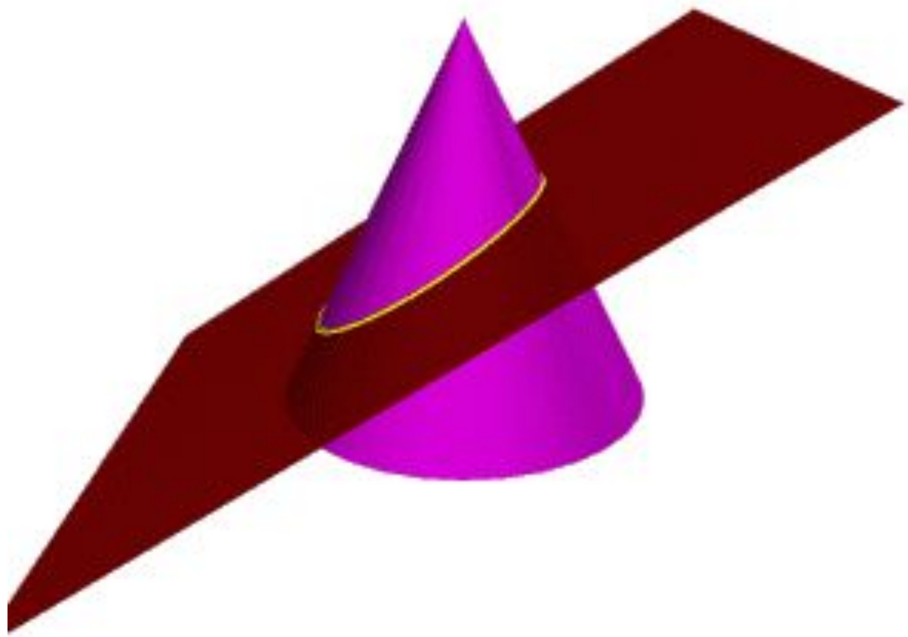


s'
c'
b'
n'
m'
a'
x
d'
e'
c
T_h
s
b
e
n
m
2
a
d
1

Конические сечения

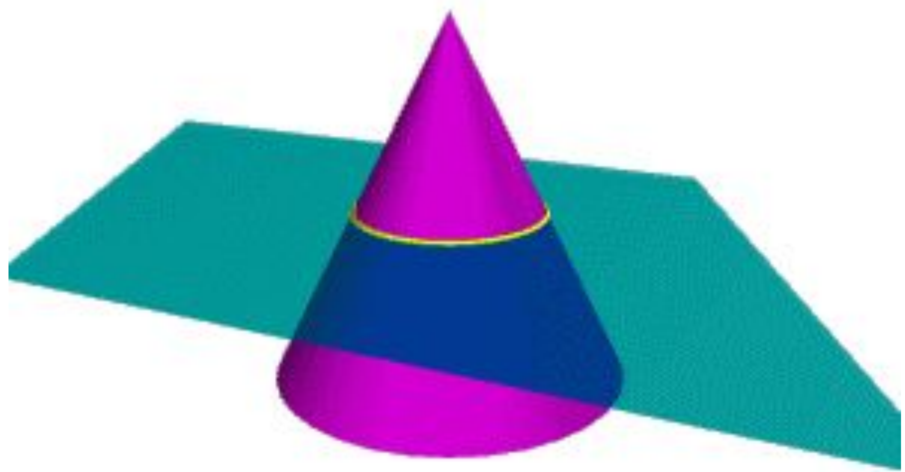
- В зависимости от положения секущей плоскости линиями сечения конической поверхности могут быть :
- **эллипс,**
- **парабола,**
- **гипербола,**
- а в частных случаях: **окружность, прямая, две пересекающиеся прямые и точка.**

Если плоскость пересекает все образующие поверхности конуса вращения, то линией сечения является ***эллипс***.



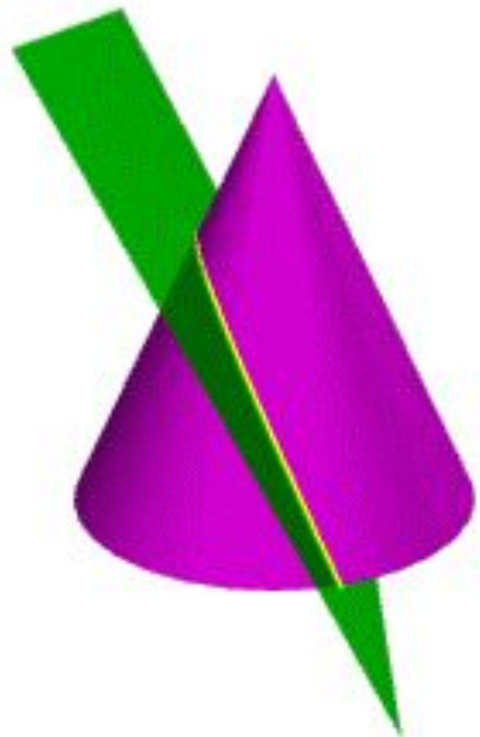
В этом случае секущая плоскость не параллельна ни одной из образующих поверхности конуса.

В частном случае ***если*** плоскость пересекает поверхность конуса по ***окружности***



- сечение вырождается в ***точку***, если плоскость проходит через вершину конуса

Если плоскость параллельна одной образующей поверхности конуса, то линией пересечения является



- В частном случае (плоскость является касательной к поверхности конуса) сечение вырождается в ***прямую***.

Если плоскость параллельна двум образующим поверхности конуса, то линией сечения является ***гипербола***

- случае прохождения плоскости через вершину конической поверхности фигурой сечения могут быть сами образующие, т.е. гипербола вырождается в ***две пересекающие прямые***

ВЗАИМНОЕ ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

- Линией пересечения двух поверхностей является множество точек, общих для данных поверхностей.

- 1. **Из множества выделяют характерные (опорные, или главные) точки, с которых следует начинать построение этой линии.** **(К таким точкам относятся: *экстремальные* точки- верхняя и нижняя точки относительно той или иной плоскости проекций; точки, расположенные на очерковых образующих некоторых поверхностей точки границы зоны видимости и т.д.)**

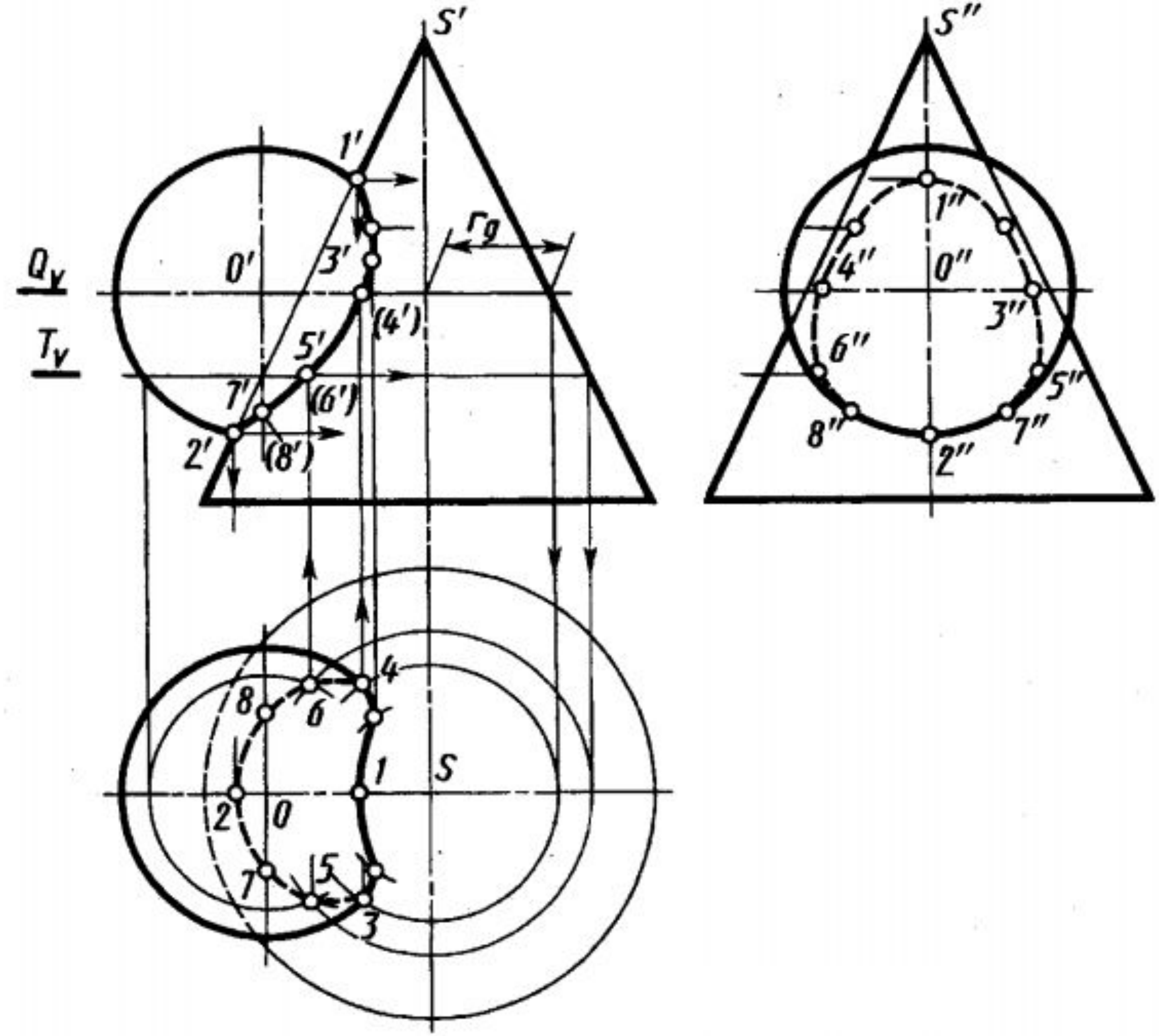
- Секущие поверхности-посредники выбираются так, чтобы они, пересекаясь с данными поверхностями, давали простые для построения линии, например прямые и окружности.

- Из общей схемы построения линии пересечения поверхностей выделяют два основных метода:
- метод ***секущих плоскостей***
- метод ***секущих сфер***.

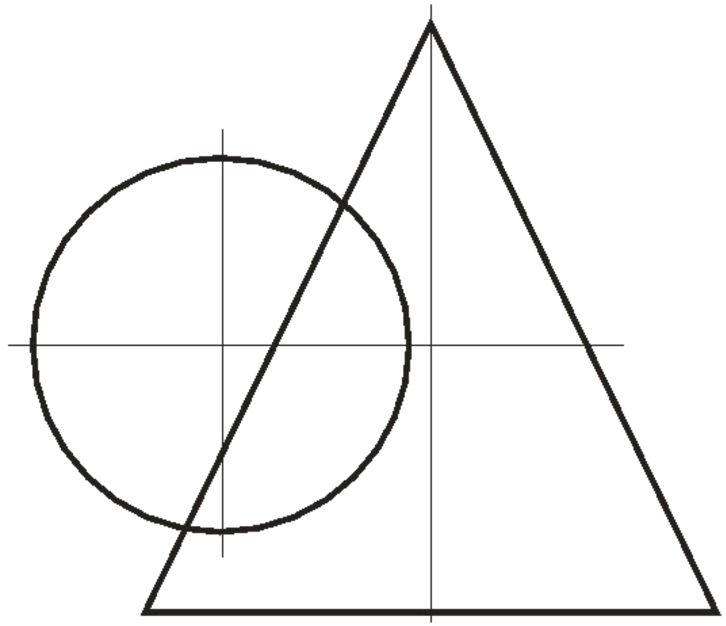
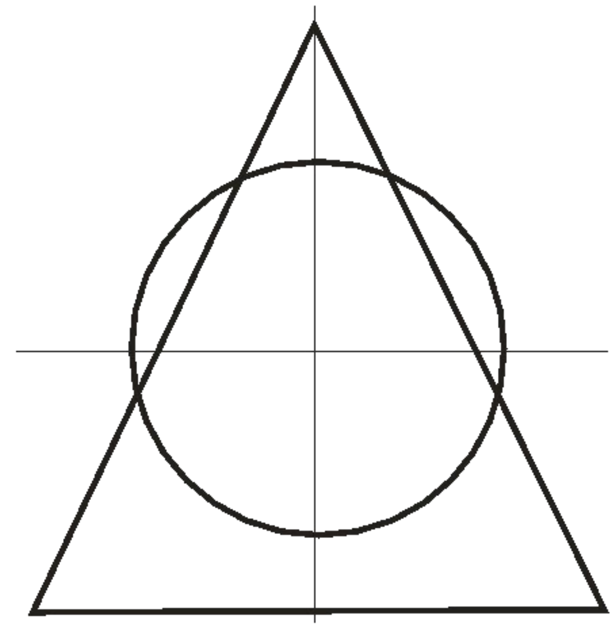
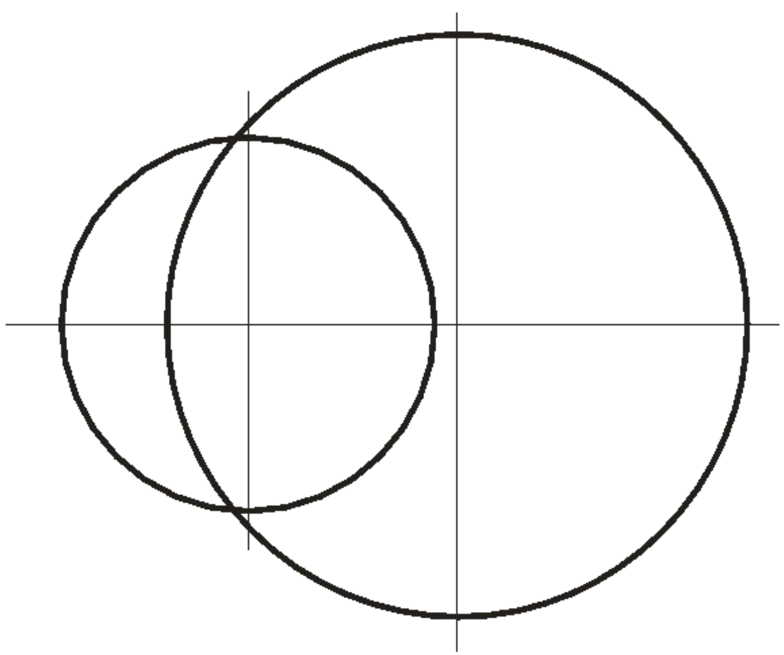
Метод секущих плоскостей

- Вспомогательные секущие плоскости чаще всего выбирают проецирующими и параллельными одной из плоскостей проекций - плоскостями уровня.
- Этот способ рекомендуется применять, если сечения заданных поверхностей одной и той же плоскостью являются прямыми линиями или окружностями. Такая возможность существует в трех случаях:
- 1. Если образующие (окружности) расположены в общих плоскостях уровня;
- 2. Если в общих плоскостях уровня оказываются прямолинейные образующие линейчатой поверхности и окружности циклической;
- 3. Линейчатые каркасы заданных поверхностей принадлежат общим плоскостям уровня или пучкам плоскостей общего положения.

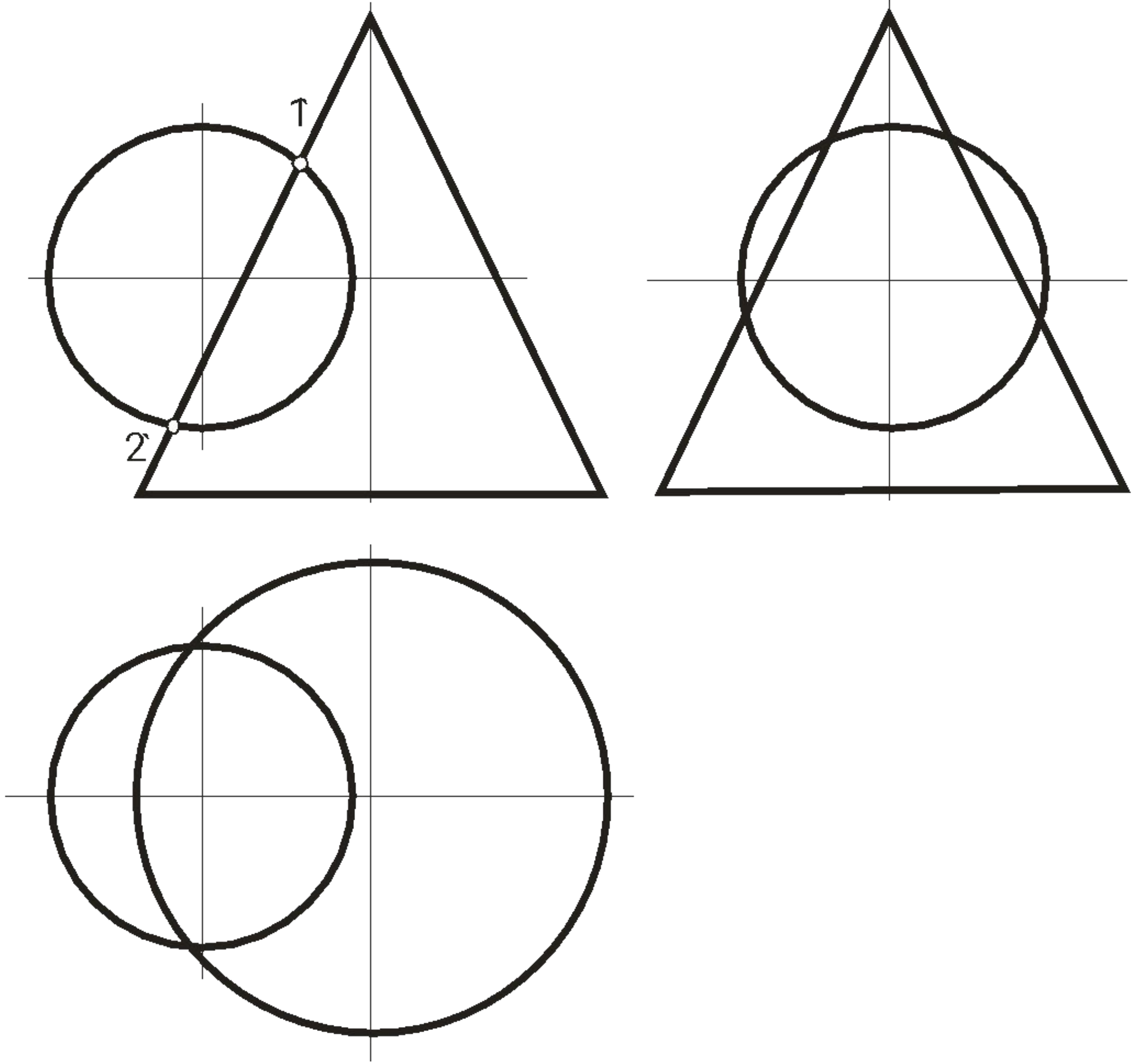
- Алгоритм
- 1) Определяем опорные точки линии пересечения
- 2) Находим их горизонтальные проекции
- 3) Рассекаем обе поверхности для получения простых фигур
- 4) Вторично рассекаем обе поверхности для получения простых фигур
- 9)Определяем видимость точек



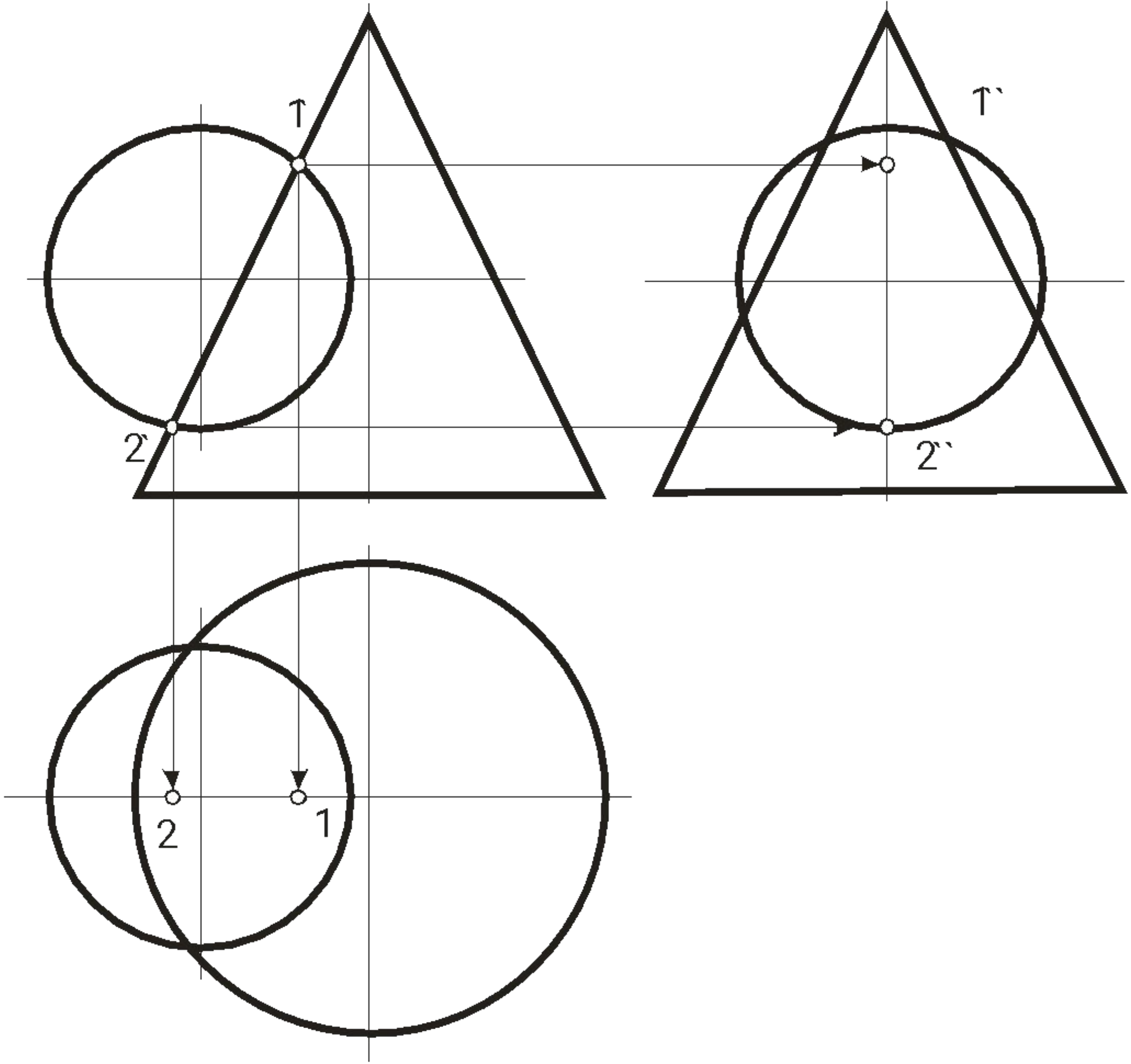
S′
S″
1′
r_g
Q_V
T_V
0′
3′
(4′)
5′
7′
(6′)
2′
(8′)
1″
4″
0″
3″
6″
5″
8″
7″
2″
4
8
6
1
S
2
0
5
7
3

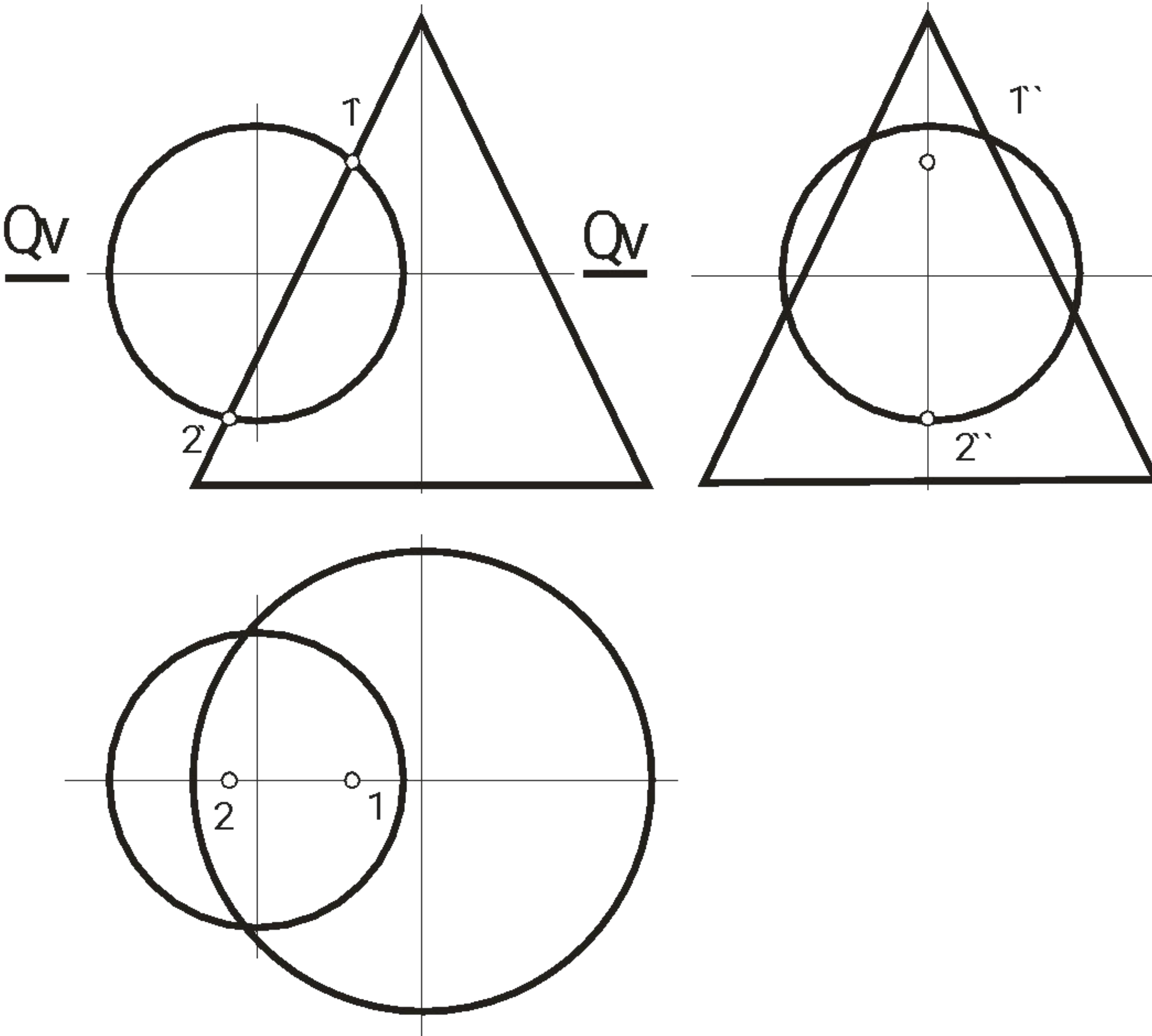




Определяем опорные точки линии пересечения

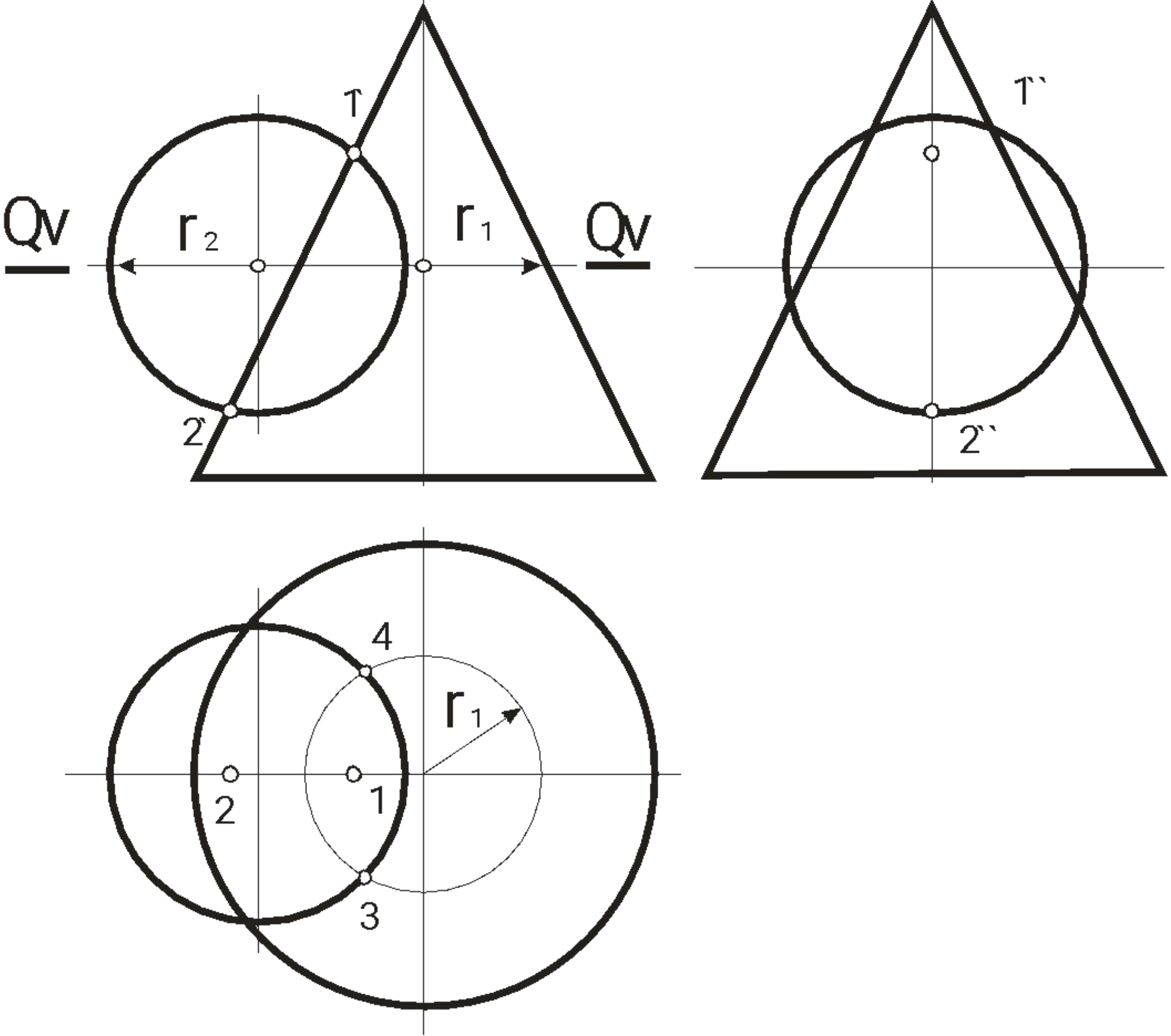

1'
2'

Находим их горизонтальные и профильные проекции

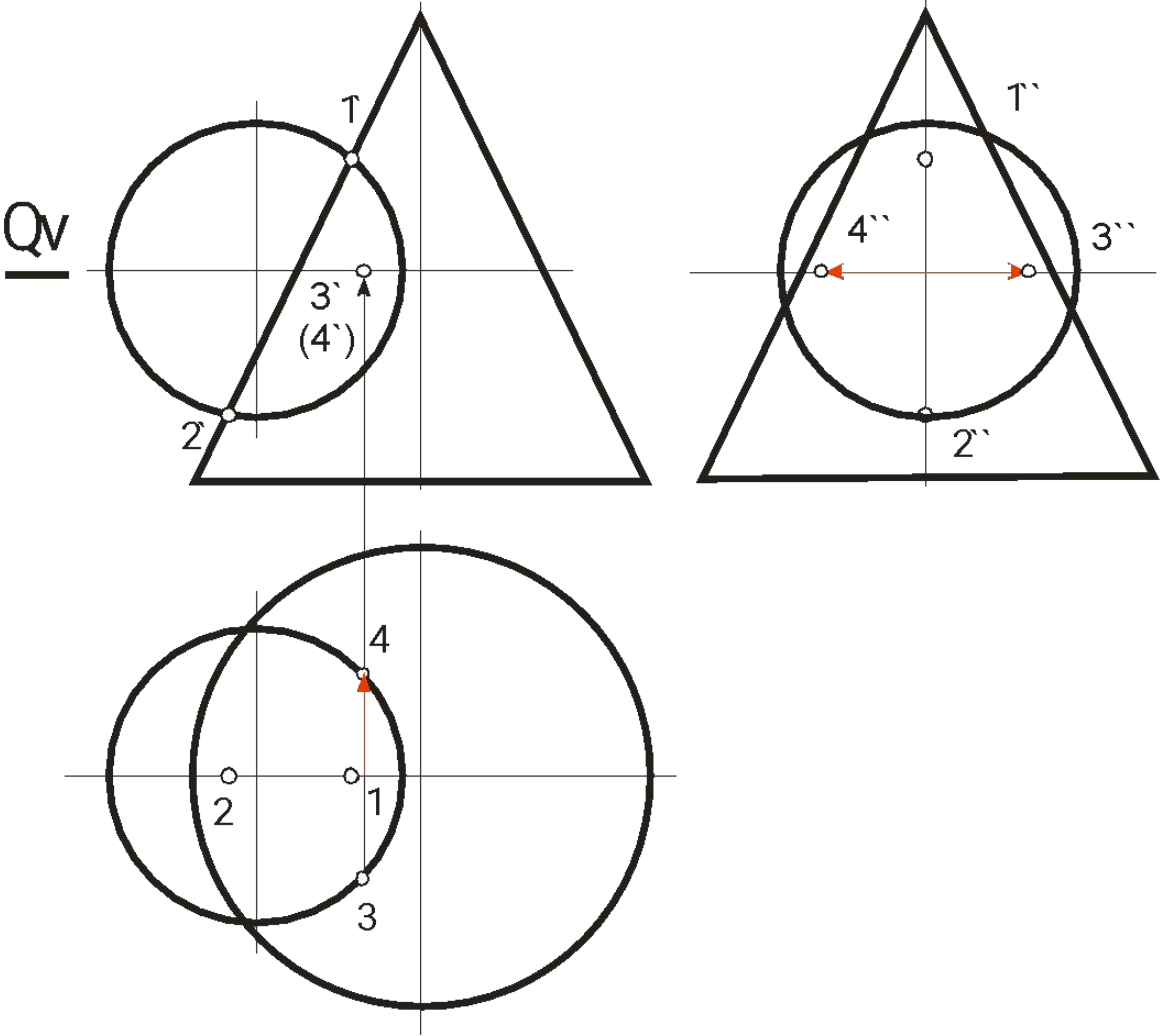

1`
2`
1``
2``
2
1

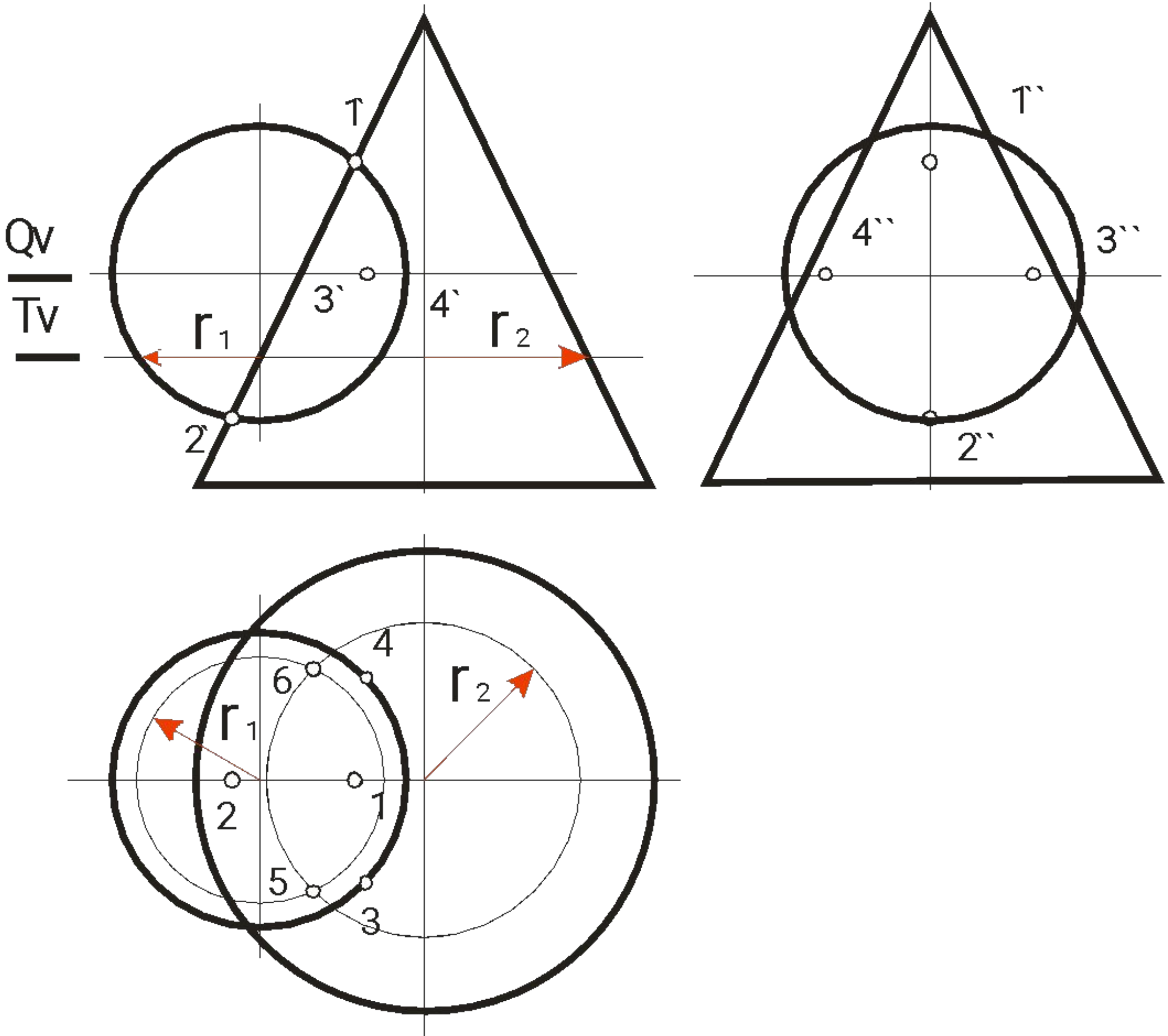


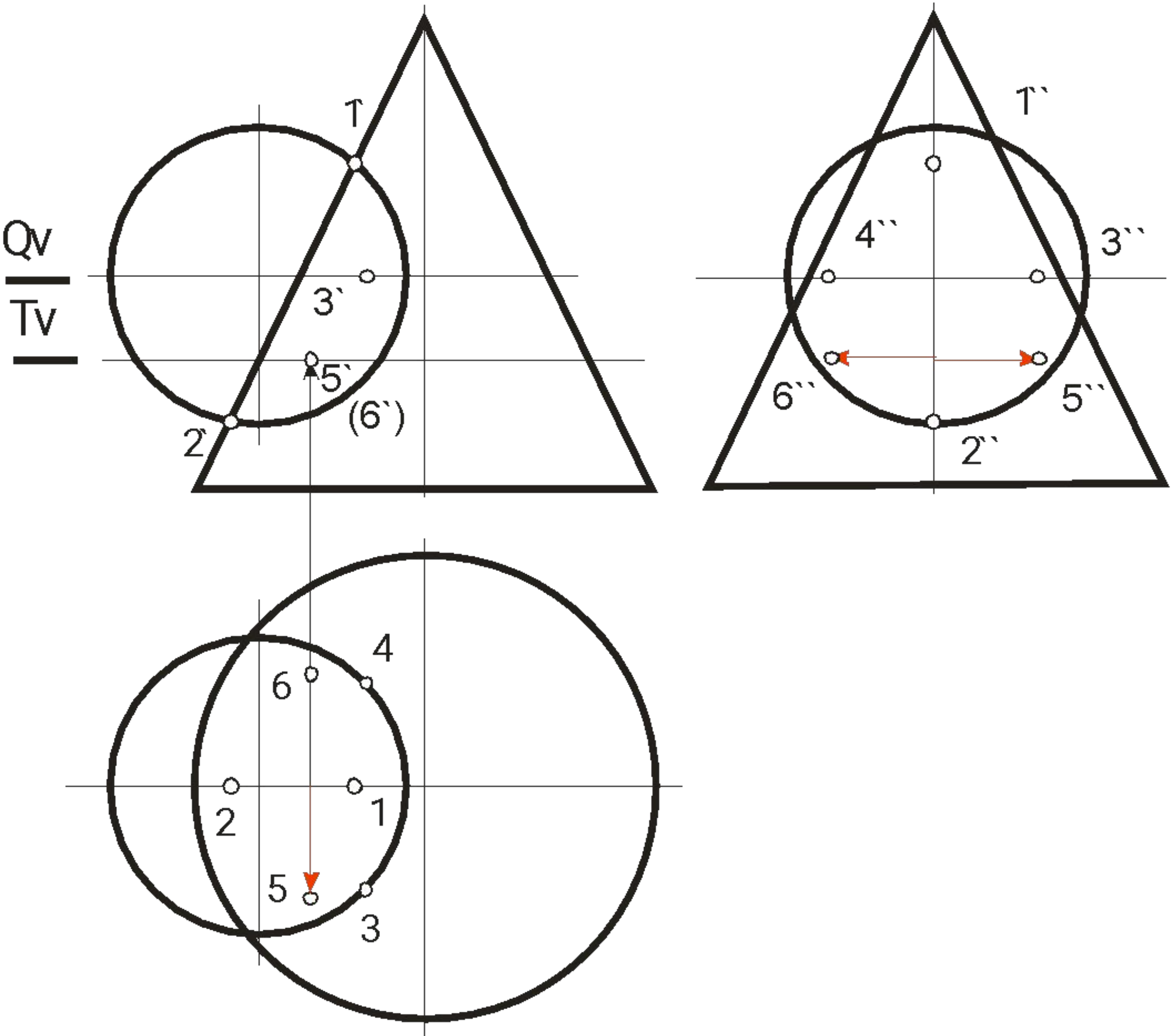
Qv
1`
2`
Qv
1``
2``
2
1

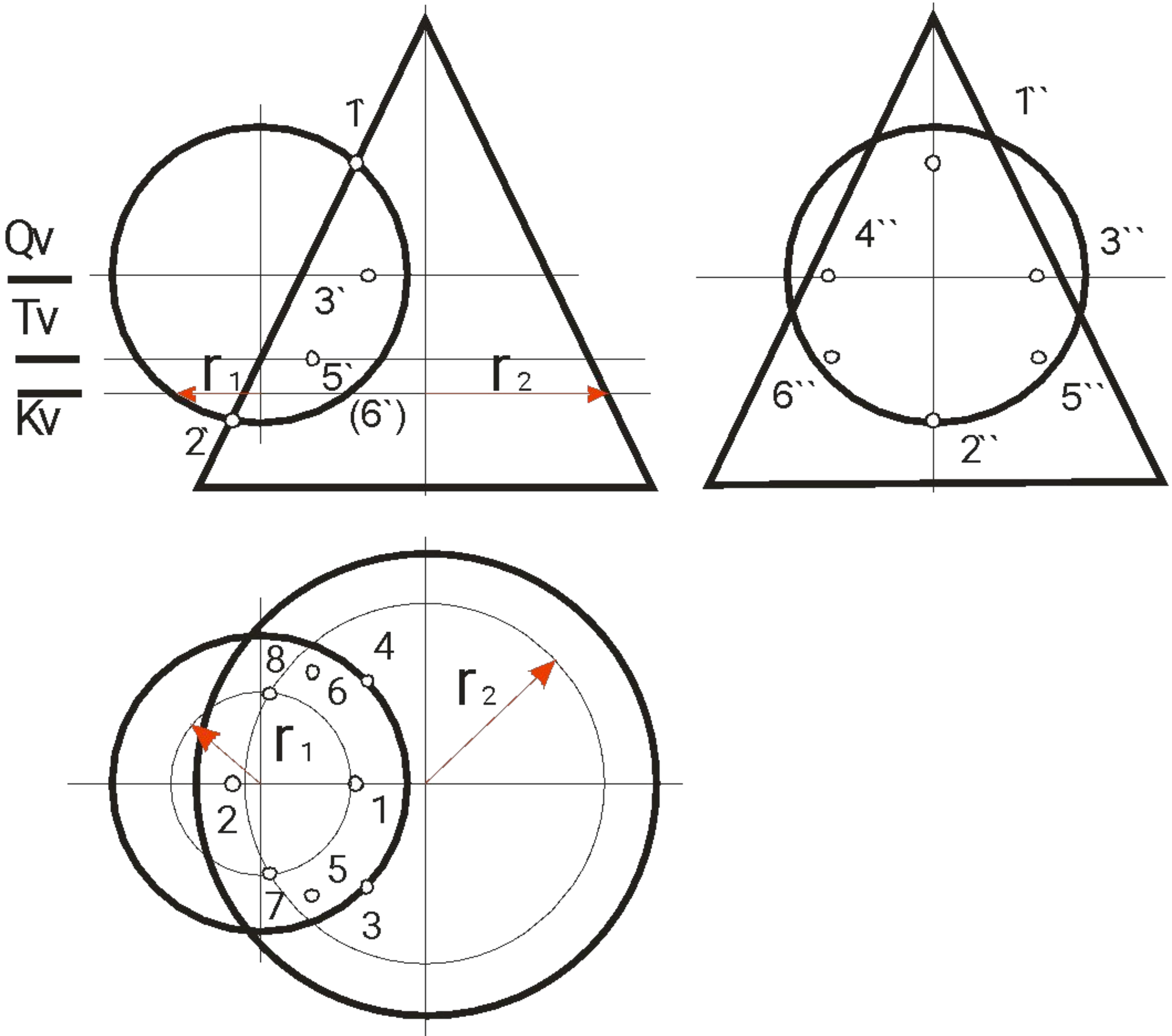


Qv
r₂
1`
r₁
Qv
2`
1``
2``
4
r₁
2
1
3

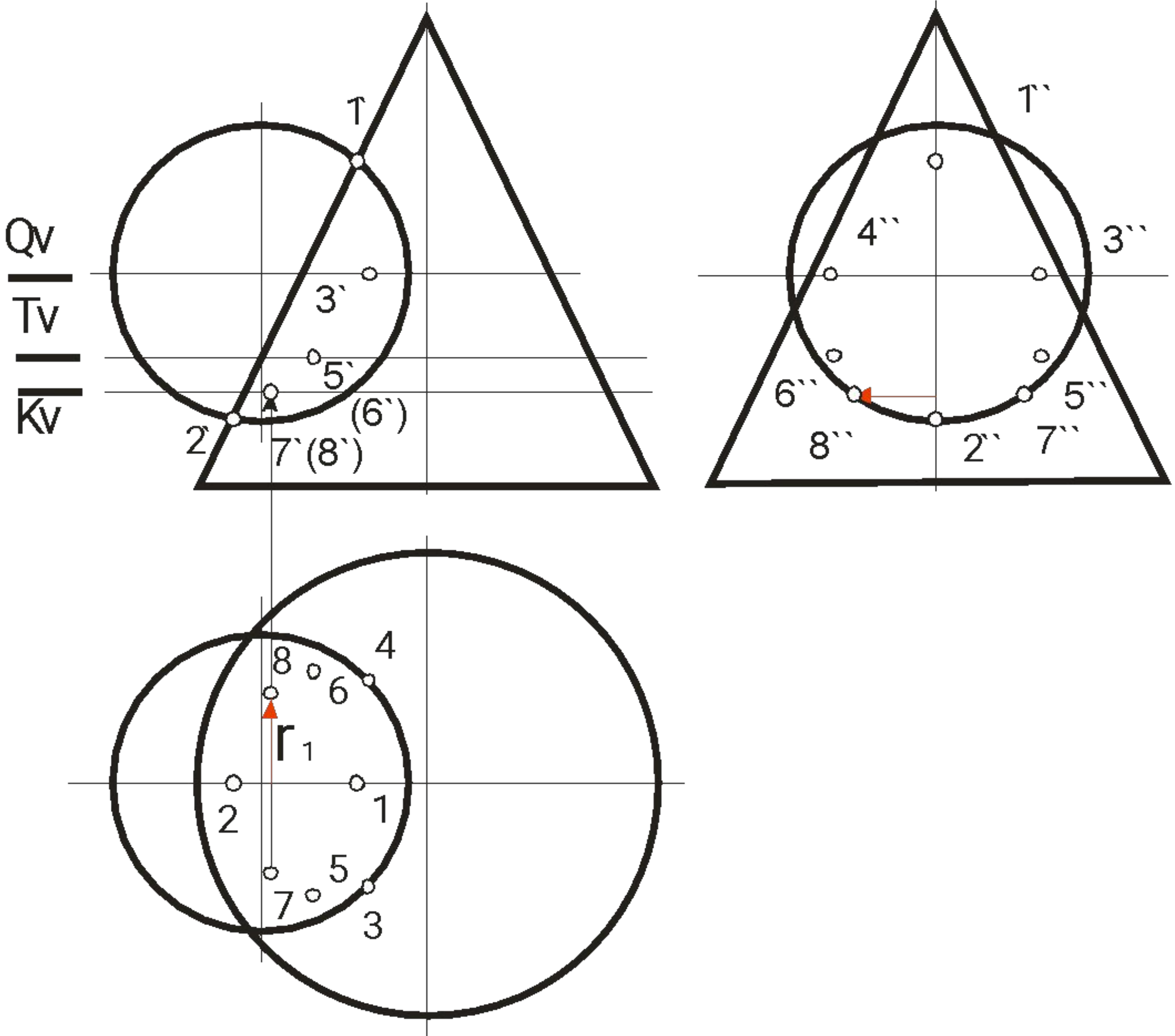

Qv
1`
2`
3`
(4`)
1``
2``
3``
4``
1
2
3
4


1`
Qv
Tv
3`
4`
r 1
r 2
2`
1``
4``
3``
2``
4
6
r 1
r 2
2
1
5
3

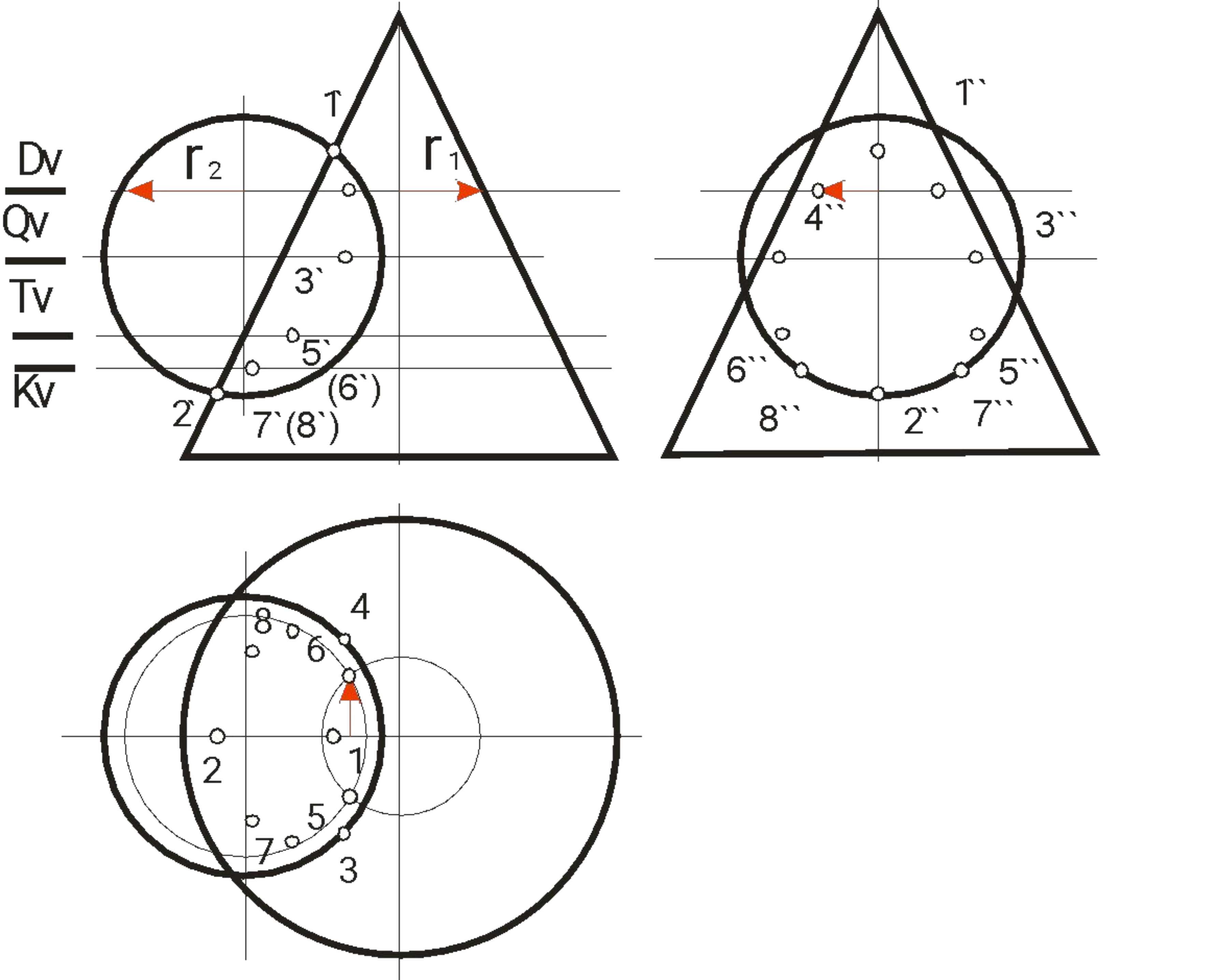

Qv
Tv
1`
3`
5`
(6`)
2`
1``
4``
3``
6``
5``
2``
4
6
2
1
5
3



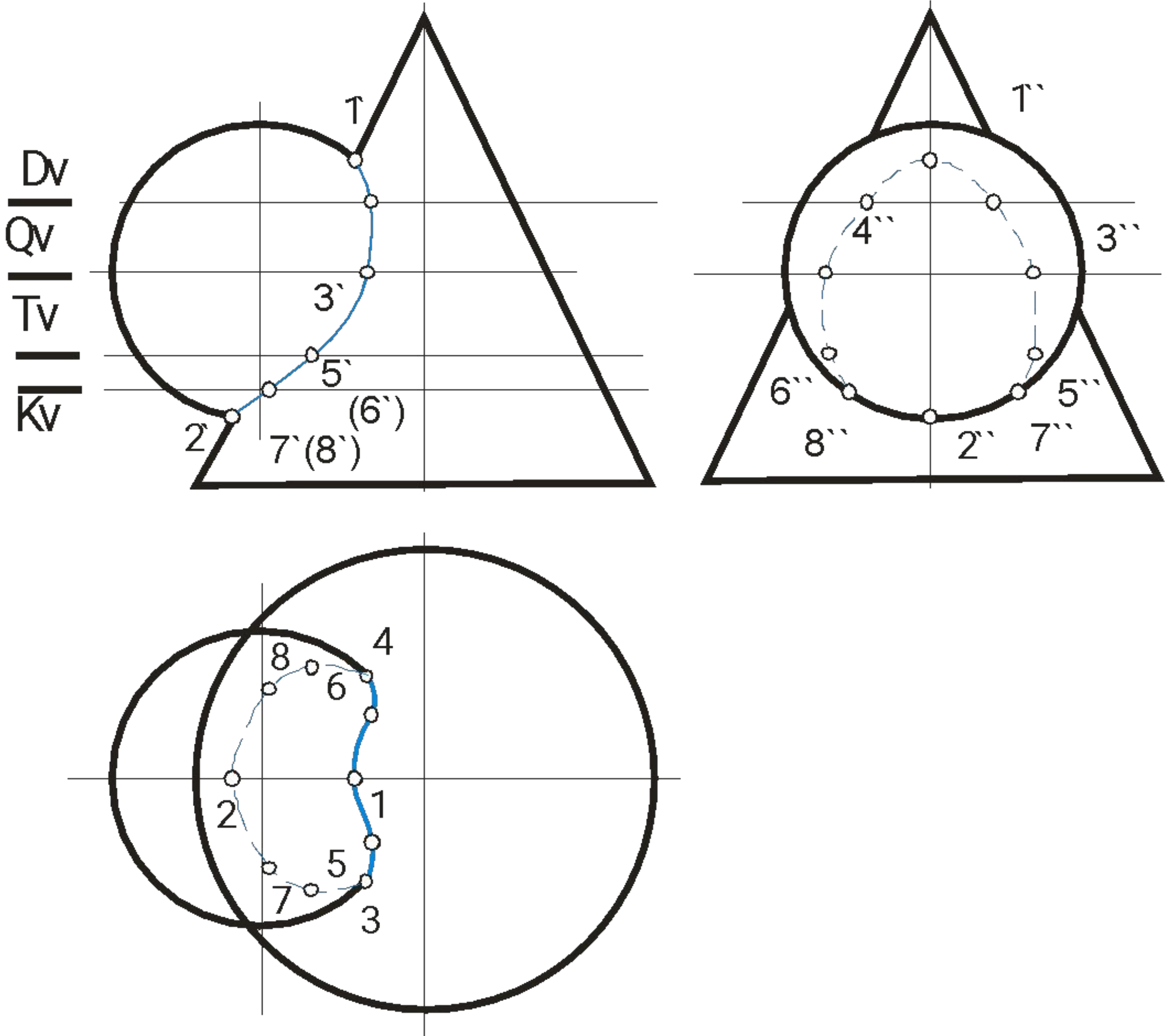
Qv
Tv
Kv
1`
3`
5`
(6`)
2`
r1
r2
1``
4``
3``
6``
5``
2``
8
4
6
r2
r1
2
1
5
7
3



1`
Qv
Tv
Kv
3`
5`
(6`)
2`
7`(8`)
1``
4``
3``
6``
5``
8``
2``
7``
4
8
6
r 1
2
1
5
7
3



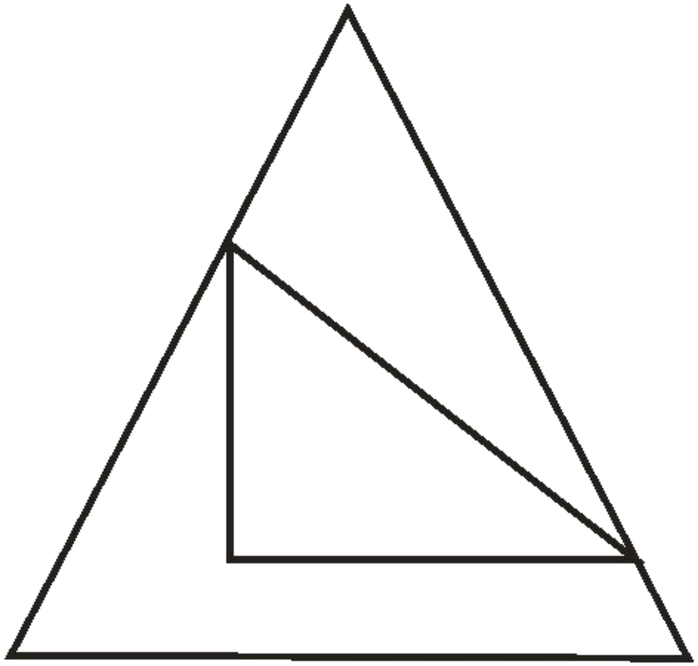
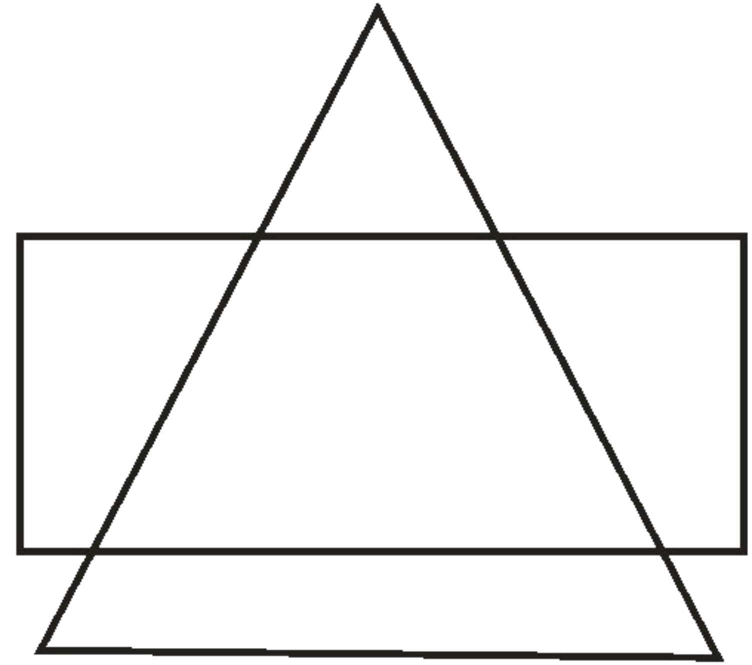
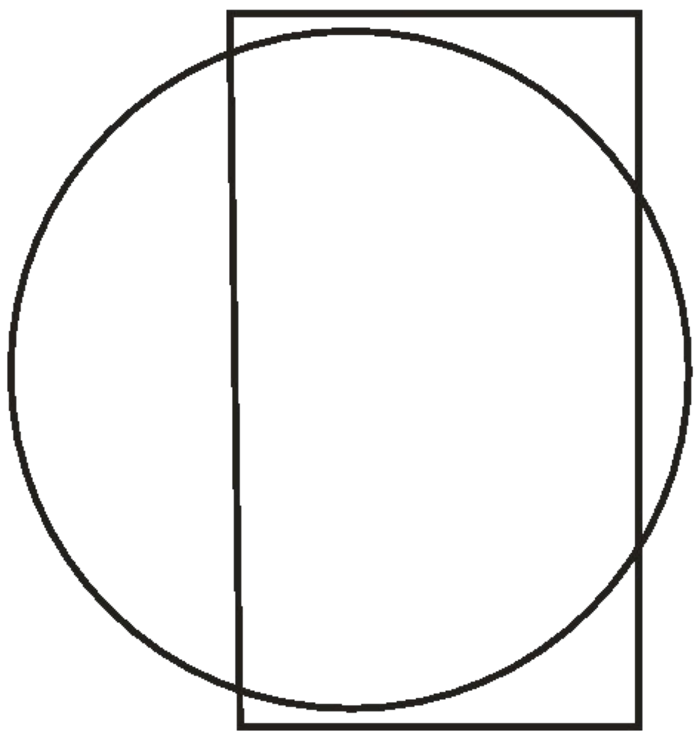
Dv
Qv
Tv
Kv
r2
r1
1`
3`
5`
(6`)
2`
7`(8`)
1``
4``
3``
6``
5``
8``
2``
7``
4
8
6
2
1
5
7
3


Dv
Qv
Tv
Kv
1`
3`
5`
(6`)
2`
7`(8`)
1``
4``
3``
6``
5``
8``
2``
7``
4
8
6
2
1
5
7
3

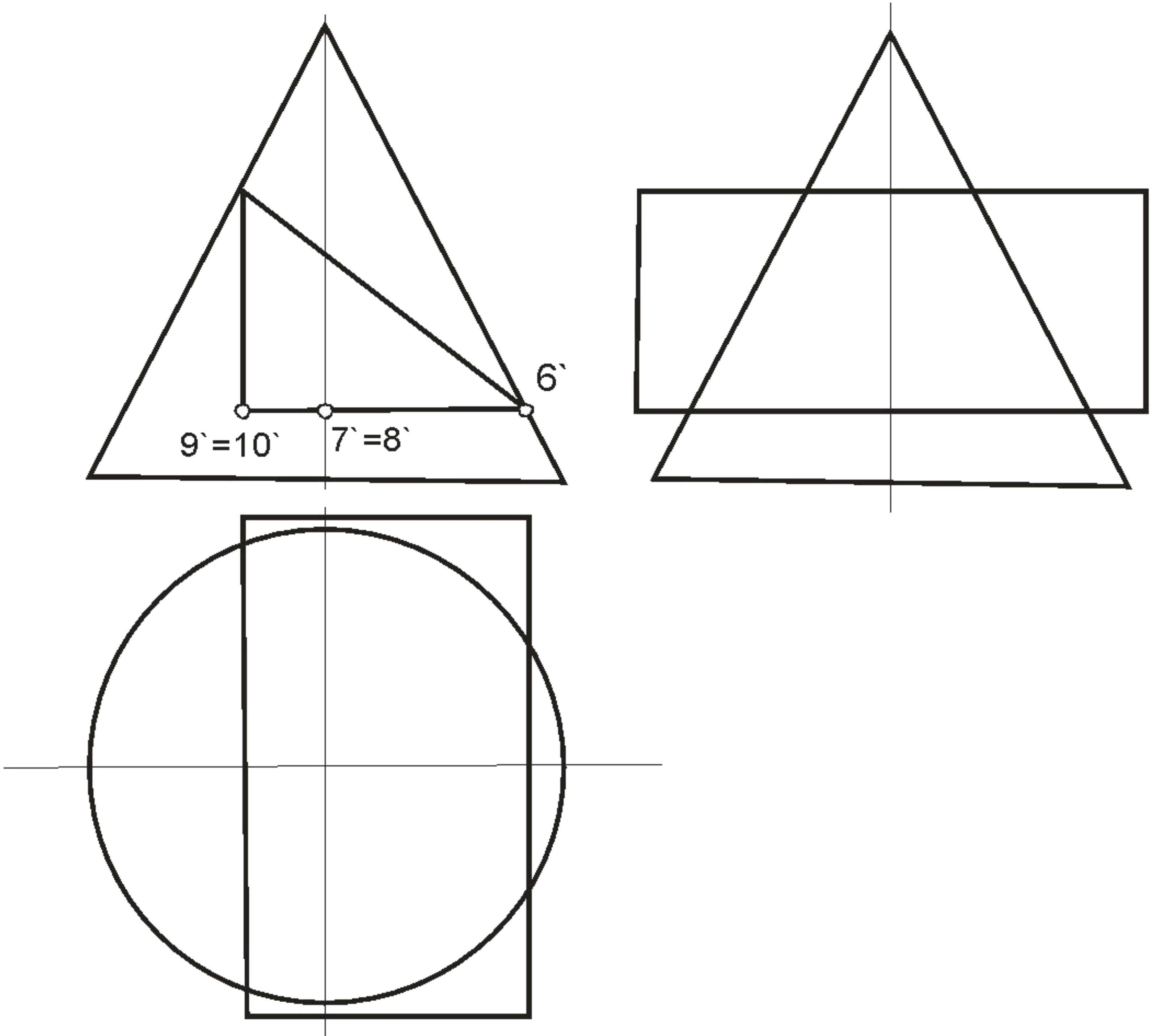
Построение линии пересечения треугольной призмы с конусом

Алгоритм

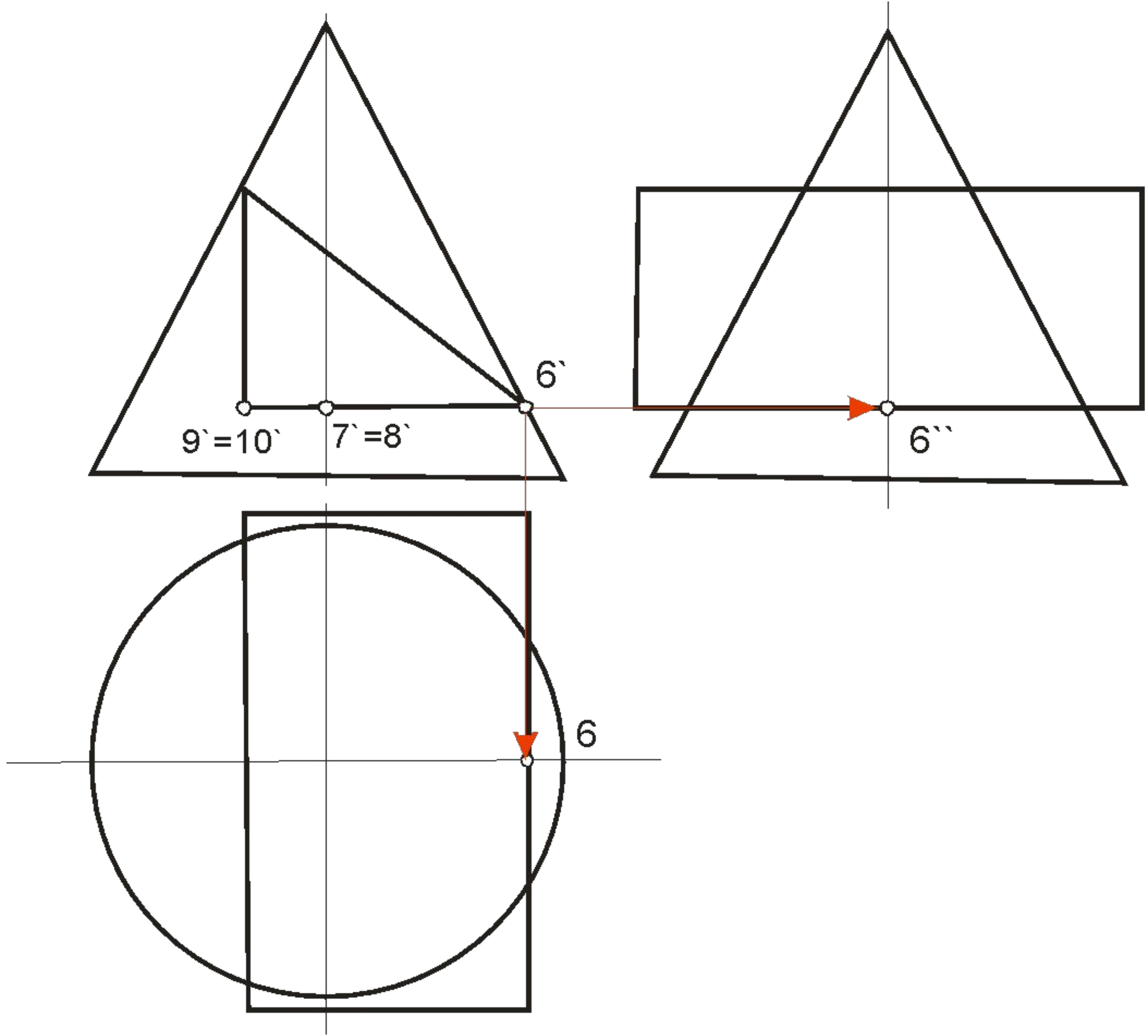
1) Определяем опорные точки линии пересечения
2) Находим их горизонтальные проекции
3) Рассекаем обе поверхности для получения простых фигур
4) Вторично рассекаем обе поверхности для получения простых фигур
9)Определяем видимость точек

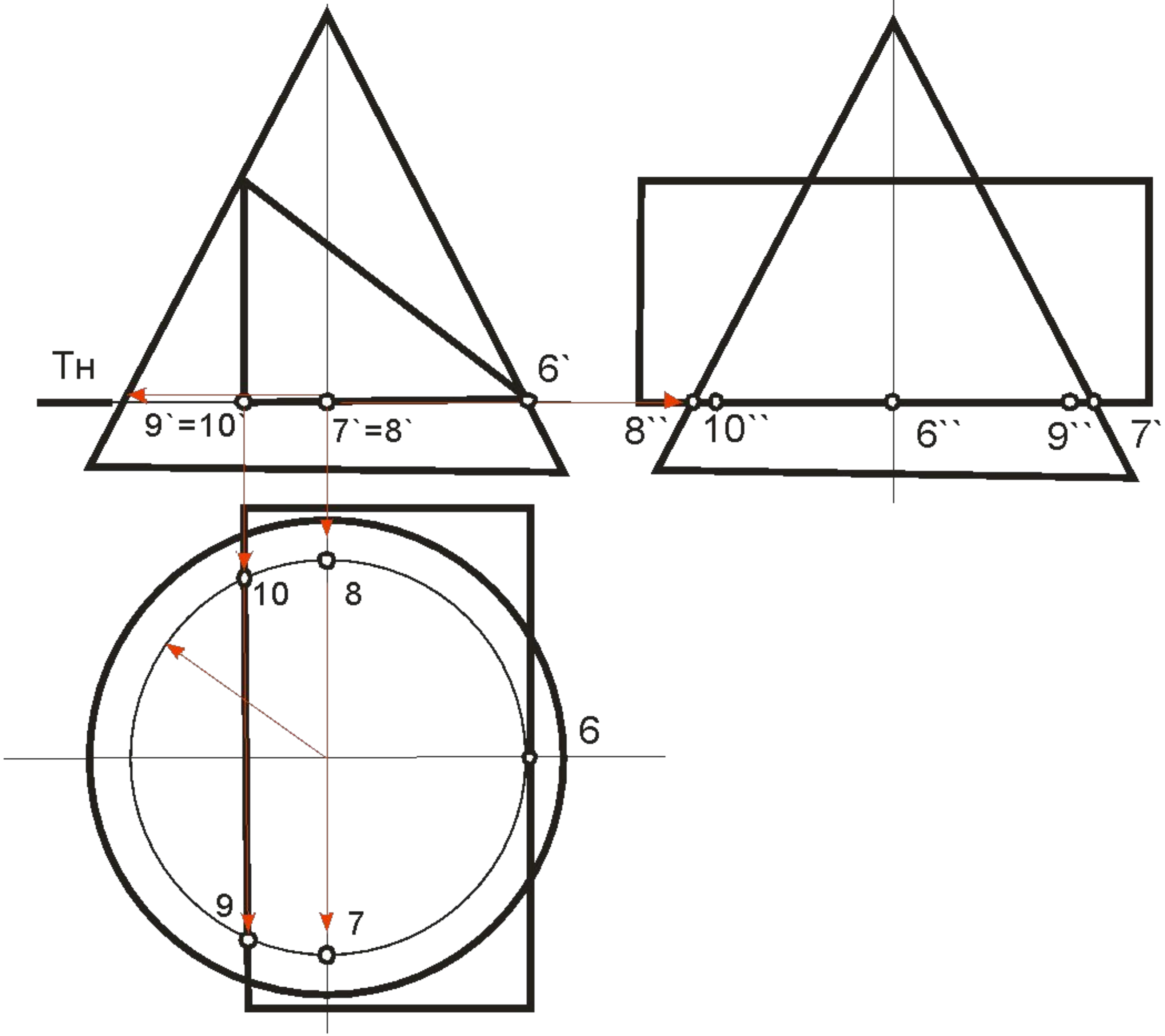




- В этом случае призму можно рассматривать, как три плоскости ***α, β, γ,*** проходящие через ее грани, а задача сводится к нахождению линий пересечения этих плоскостей с конусом.
- При этом в соответствии с характерными сечениями конуса известно, что плоскость ***α*** пересекает конус по окружности параллельной $\boldsymbol{\Pi_1}$, ***β-*** по гиперболе параллельной $\boldsymbol{\Pi_3}$, а *γ*- по эллипсу.
- На плоскость $\boldsymbol{\Pi_2}$ линии пересечения от всех плоскостей проецируются в прямые, совпадающие со следами плоскостей ***α, β,*** и *γ*.
- Для построения проекций этих линий на плоскости $\boldsymbol{\Pi_1}$ **и** $\boldsymbol{\Pi_3}$ отметим характерные точки на уже имеющейся фронтальной проекции линий пересечения:

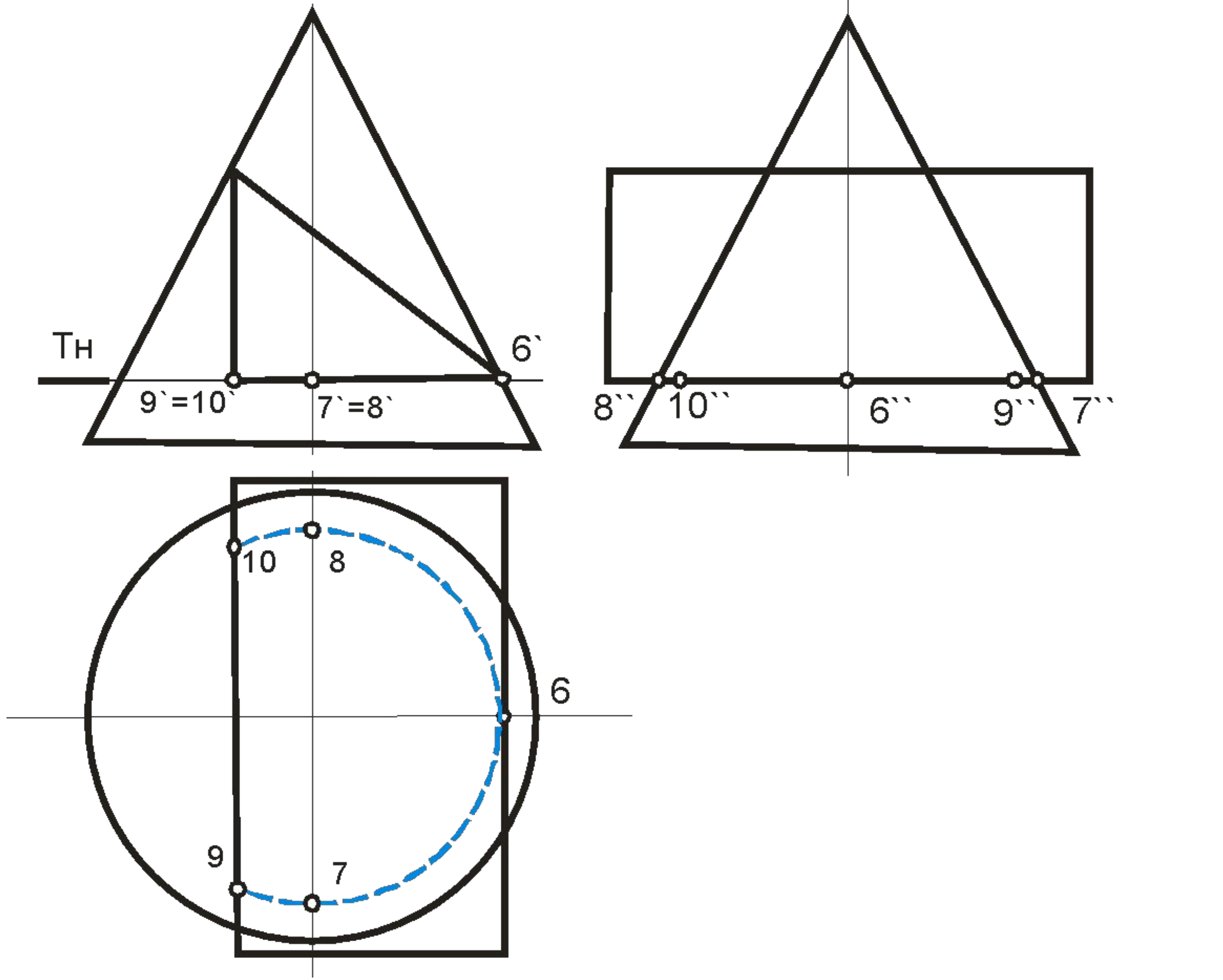


6`
9`=10`
7`=8`

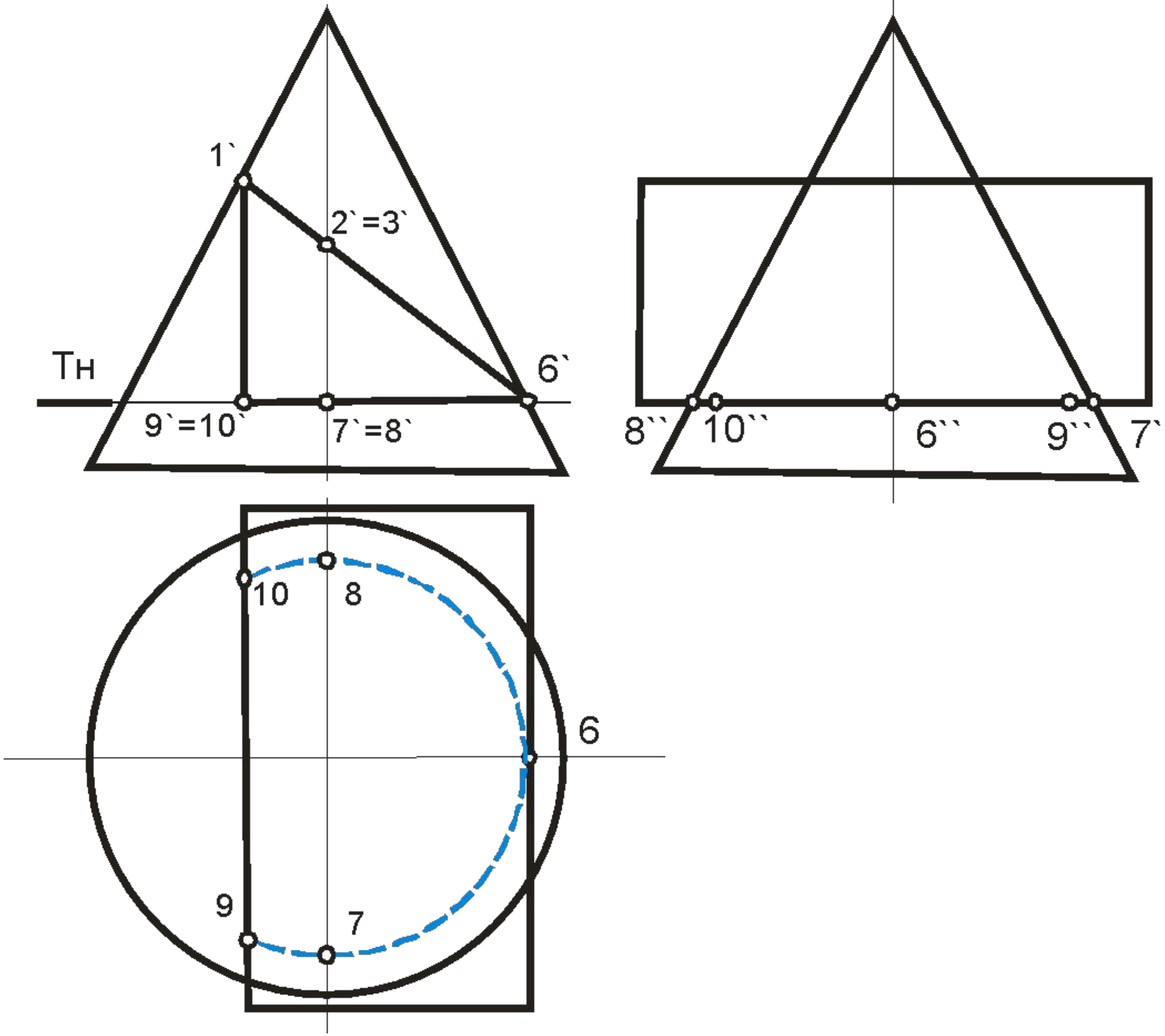

6`
9`=10`
7`=8`
6``
6



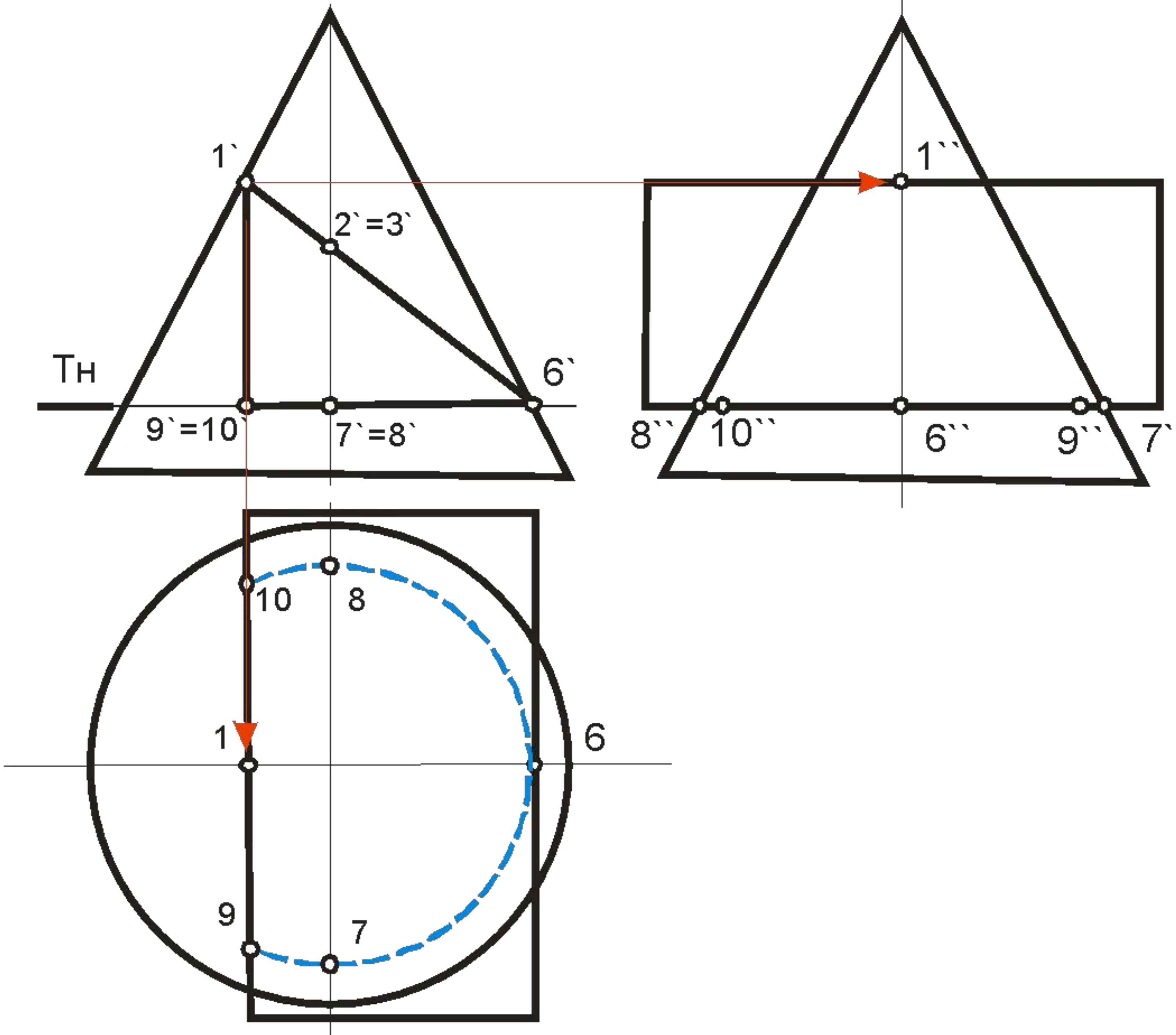
Tн
6`
9`=10`
7`=8`
8``
10``
6``
9``
7``
10
8
6
9
7



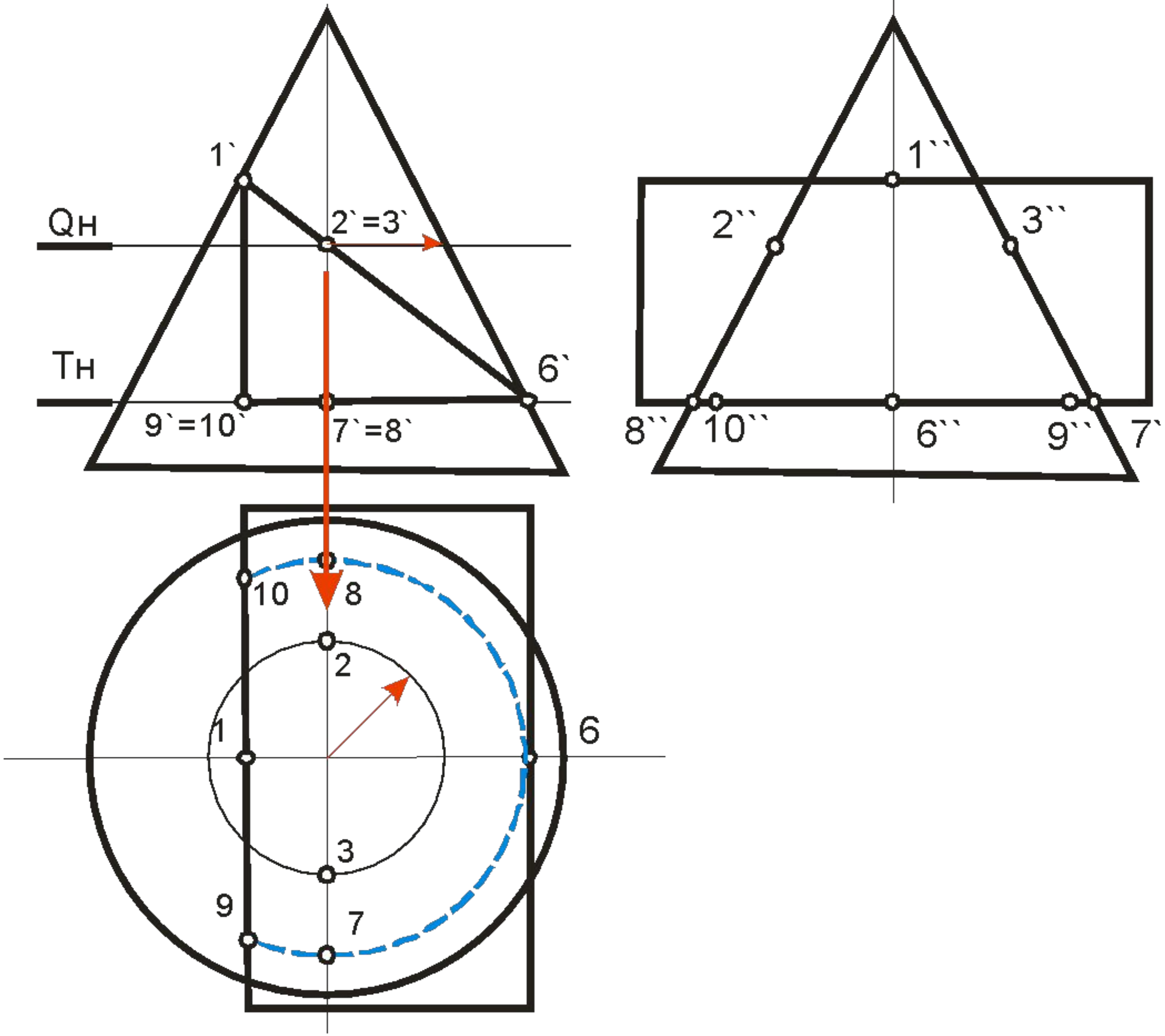
Tн
6`
9`=10`
7`=8`
8``
10``
6``
9``
7``
10
8
6
9
7



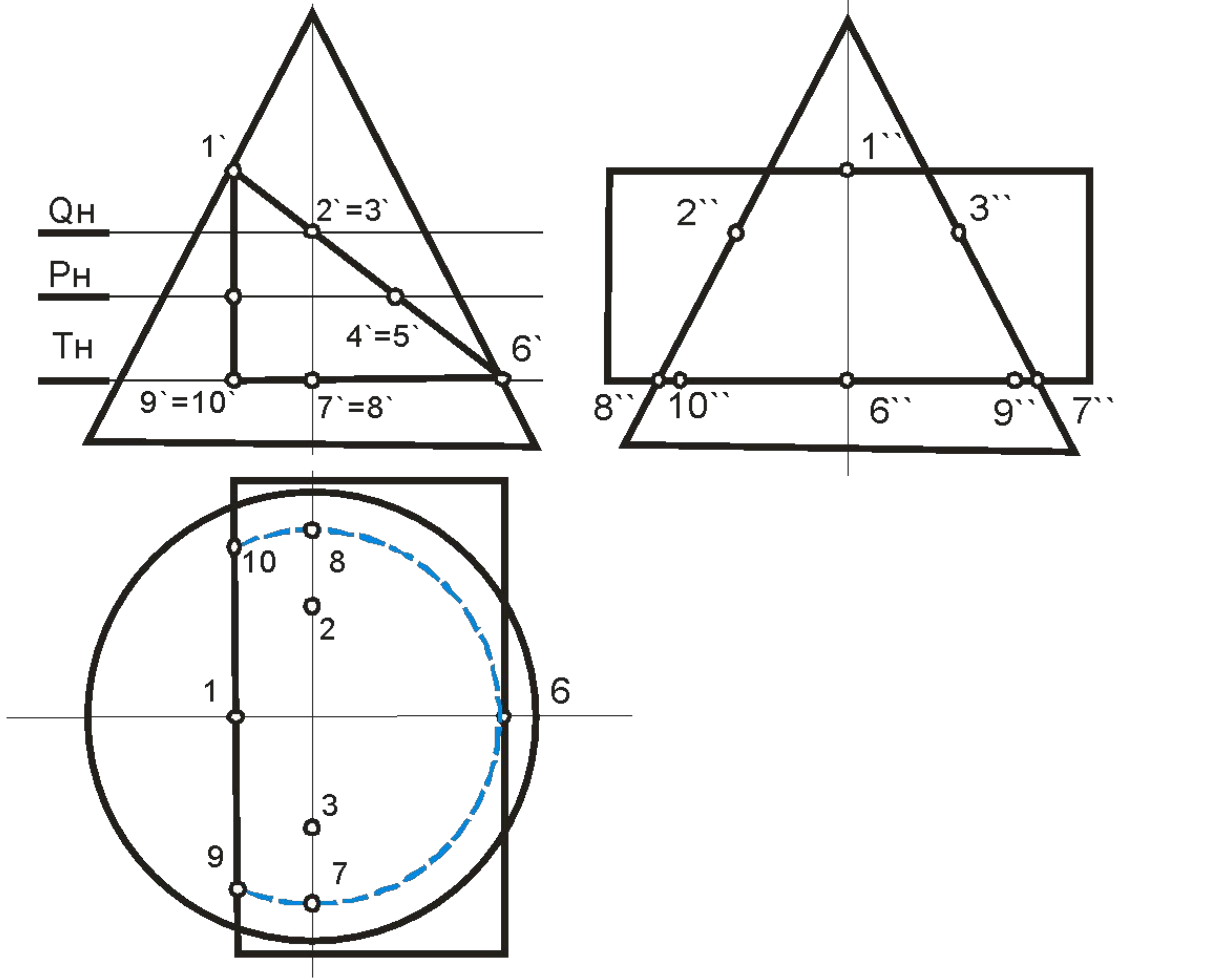
1`
2`=3`
Тн
6`
9`=10`
7`=8`
8``
10``
6``
9``
7``
10
8
6
9
7



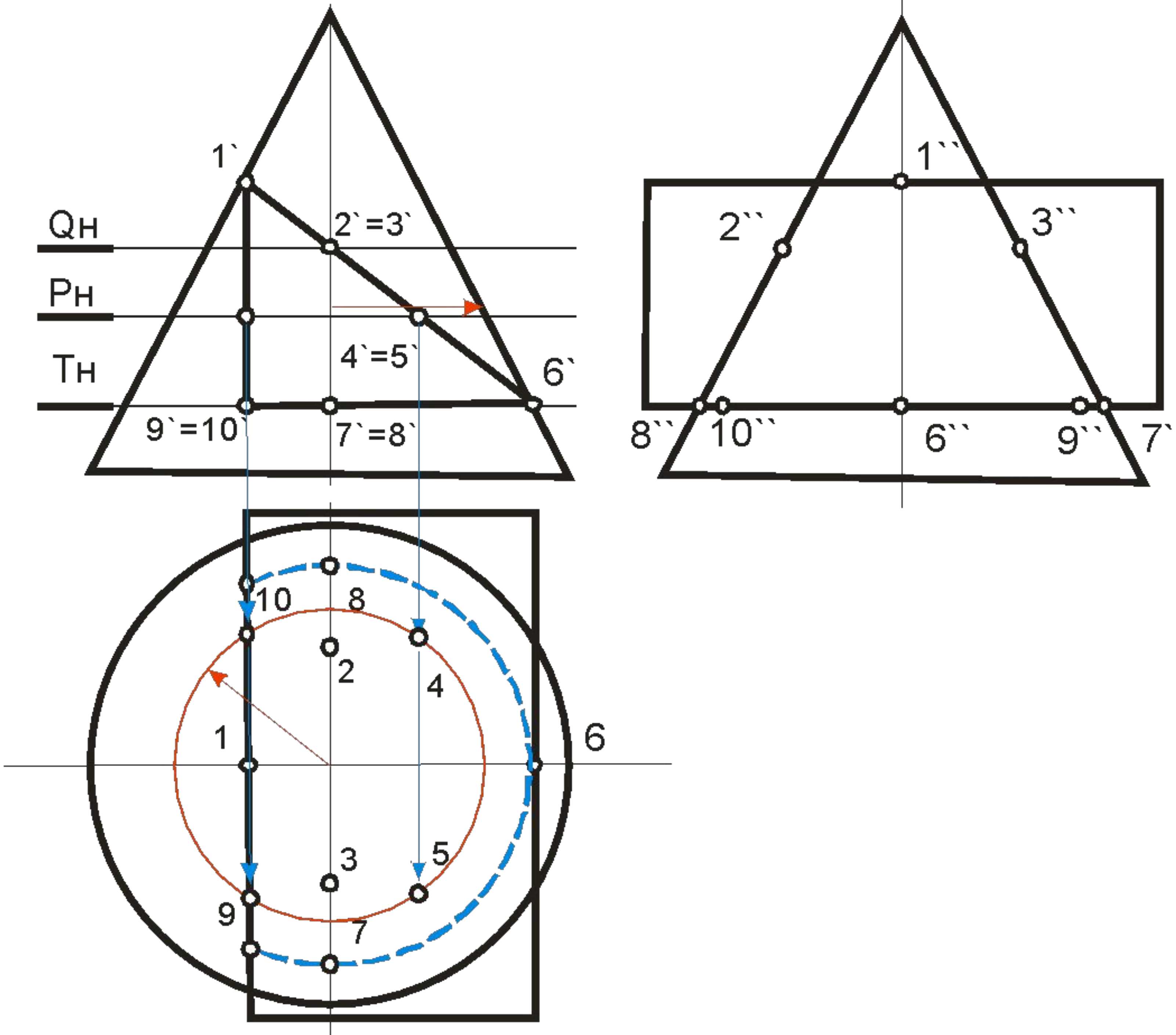
1`
2`=3`
Tн
6`
9`=10`
7`=8`
1``
8``
10``
6``
9``
7``
10
8
1
6
9
7



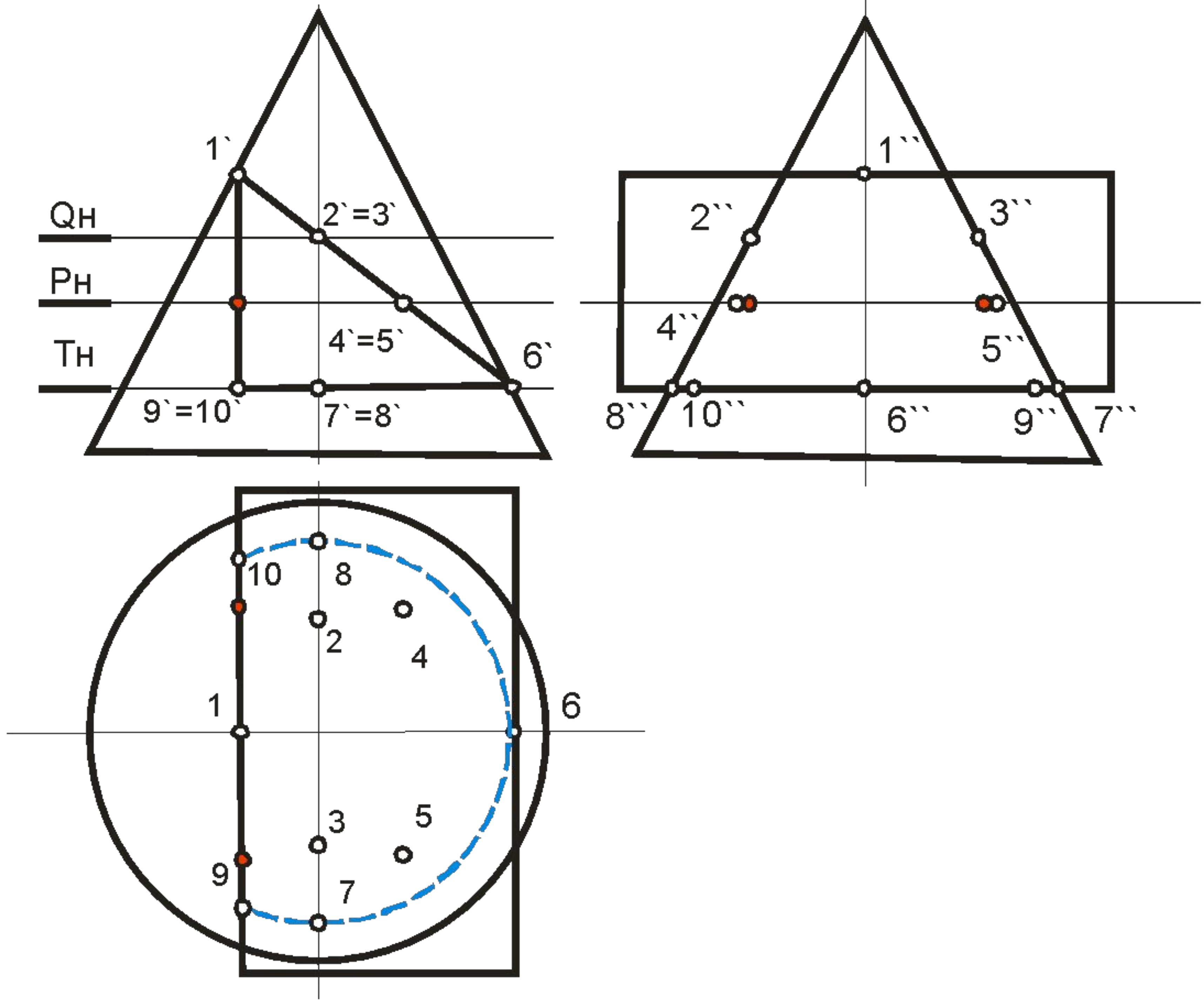
1`
QН
2`=3`
ТН
6`
9`=10`
7`=8`
1``
2``
3``
8``
10``
6``
9``
7``
10
8
2
1
6
3
9
7



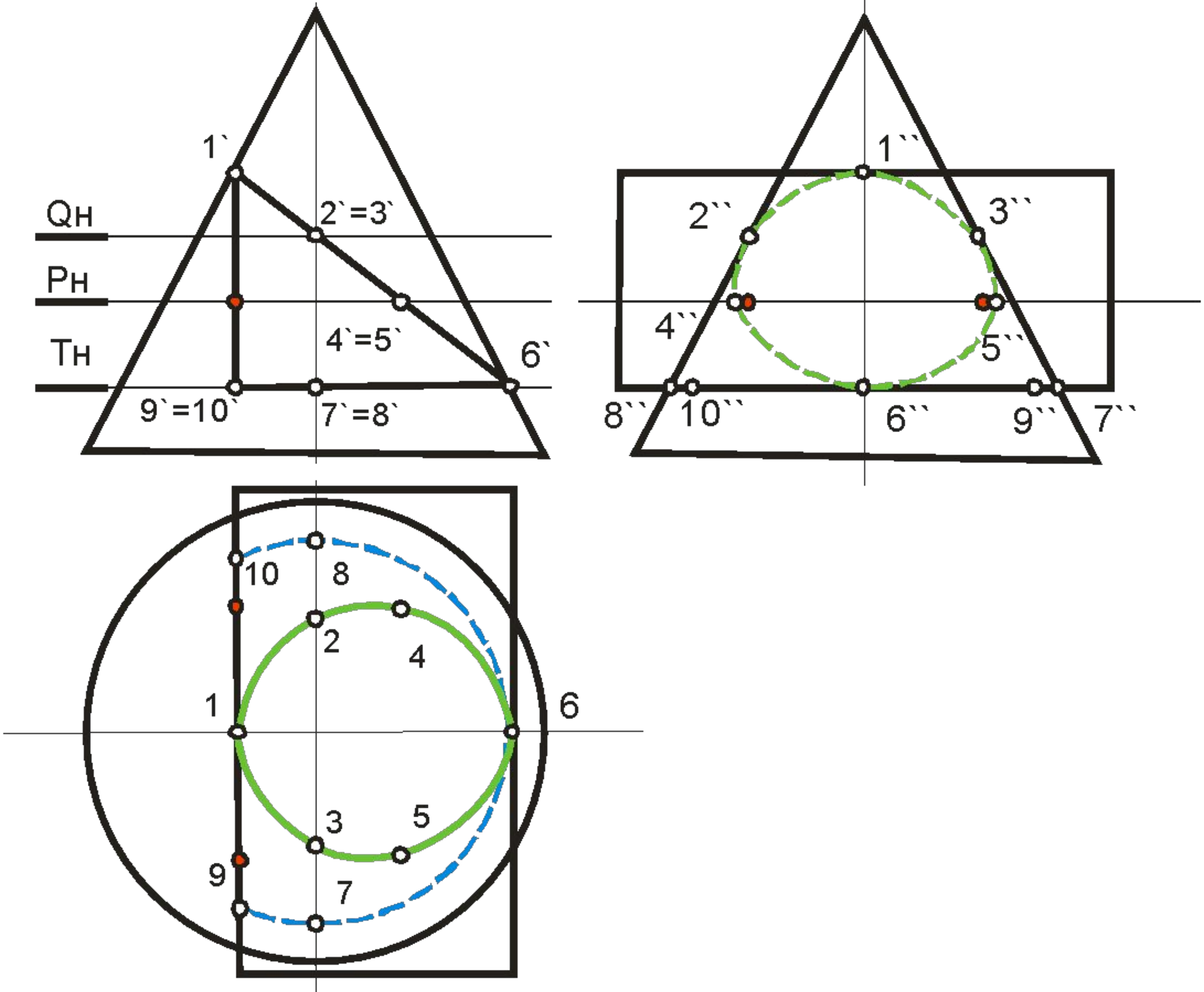
1`
Qн
2`=3`
Pн
Tн
4`=5`
6`
9`=10`
7`=8`
1``
2``
3``
8``
10``
6``
9``
7``
10
8
2
1
6
3
9
7

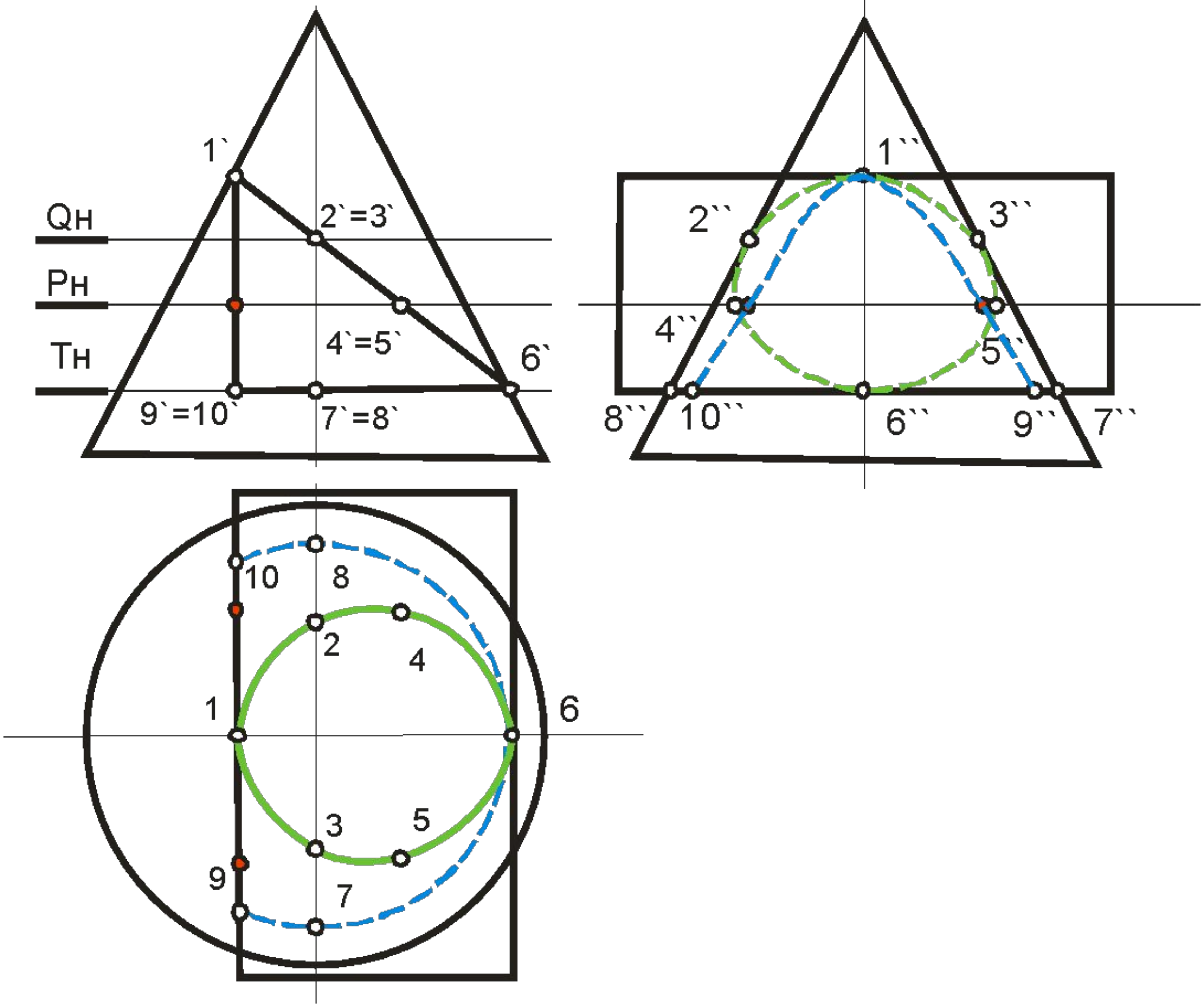


1`
QH
2`=3`
PH
4`=5`
TH
6`
9`=10`
7`=8`
1``
2``
3``
8``
10``
6``
9``
7``
10
8
2
4
1
6
3
5
9
7



1`
QН
2`=3`
PН
4`=5`
TН
6`
9`=10`
7`=8`
1``
2``
3``
4``
5``
8``
10``
6``
9``
7``
10
8
2
4
1
6
3
5
9
7


1`
Qн
2`=3`
Pн
4`=5`
Tн
6`
9`=10`
7`=8`
1``
2``
3``
4``
5``
8``
10``
6``
9``
7``
10
8
2
4
1
6
3
5
9
7



1`
Qн
2`=3`
Pн
4`=5`
Tн
6`
9`=10`
7`=8`
1``
2``
3``
4``
5``
8``
10``
6``
9``
7``
10
8
2
4
1
6
3
5
9
7

- Точки **12** и **62** – пересечения плоскости ***γ*** с очерком проекции конуса на плоскость ***П*2** (главным меридианом), эти точки определяют положение большой оси эллипса, кроме того точка **12** –проекция точки вершины гиперболы и одновременно принадлежит конусу (лежит на очерке фронтальной проекции конуса) и ребру призмы (линии пересечения плоскостей ***α*** и ***β***), а точка **62**- проекция точки, одновременно принадлежащей конусу и ребру призмы (линии пересечения плоскостей ***α*** и ***γ***); точки **2**, **3, 7** и **8** – характерны тем, что их профильные проекции лежат на очерке проекции конуса; **42, 52**-точки, лежащие на середине отрезка **1262** (большой оси эллипса) и определяют положение малой оси эллипса; **9,10** – точки одновременно принадлежащие конусу и ребру призмы (образованному пересечением плоскостей ***α*** и ***β***).
- Рассмотрим последовательность нахождения проекций точек **4** и **5.** Через фронтальные проекции этих точек проведем вспомогательную секущую плоскость **φ.** Эта плоскость пересекает конус по параллели ***р***, а грань призмы по прямой линии ***m***, параллельной ребру. На горизонтальной плоскости проекций пересечение ***р*** **1** и ***m*** **1** определяют положение точек **41** и **51**. Для точного построения кривых линий пересечения поверхностей обозначенных точек не достаточно. После нахождения проекций всех точек их необходимо соединить с учетом видимости.

МЕТОД СЕКУЩИХ СФЕР

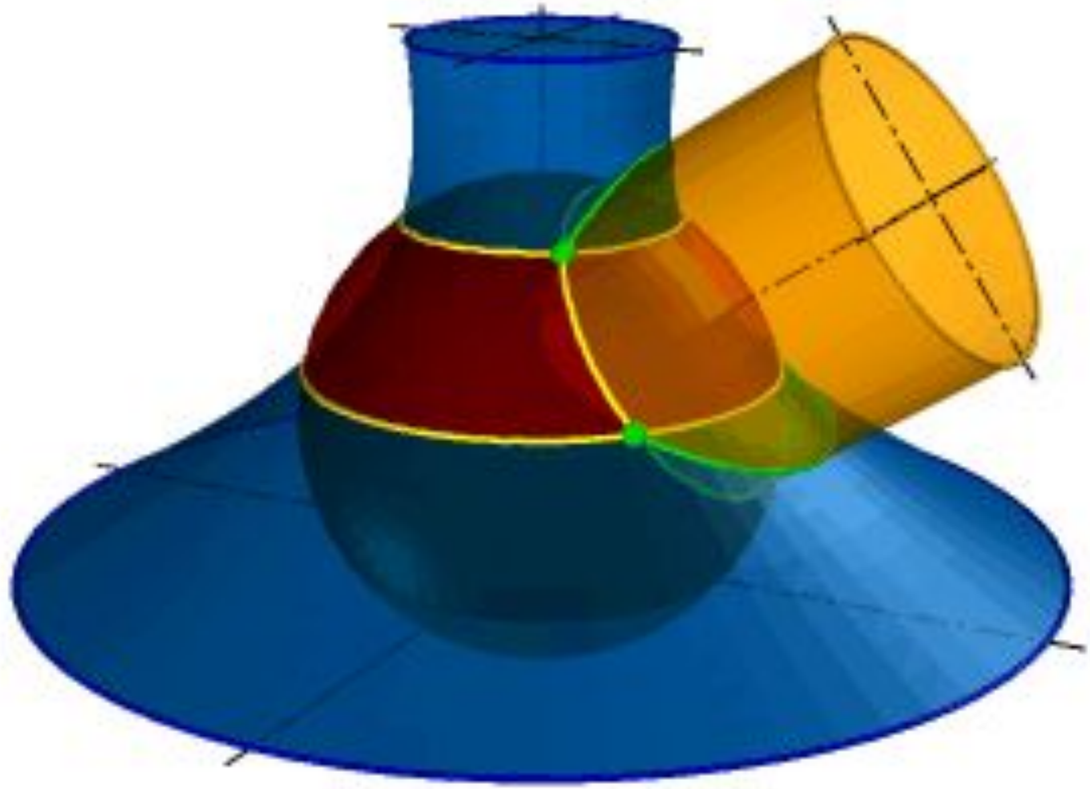
- Способ секущих сфер с постоянным центром для построения линии пересечения двух поверхностей применяют при следующих условиях

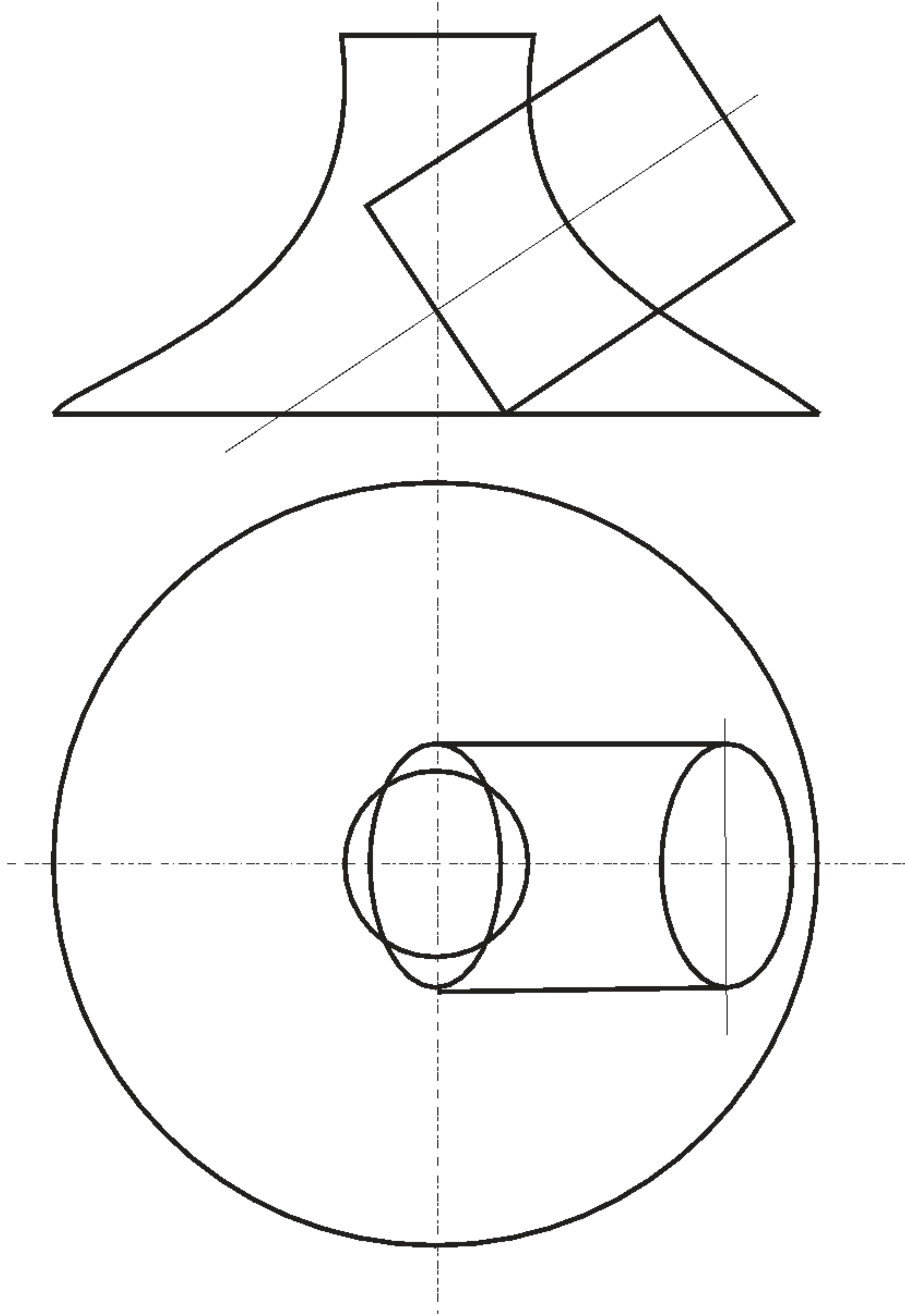
- 1) **обе пересекающиеся поверхности – поверхности вращения;**
- **2) оси поверхностей вращения пересекаются, точку пересечения принимают за центр вспомогательных сфер;**
- **3)плоскость образованная осями поверхностей, должна быть параллельна плоскости проекций**

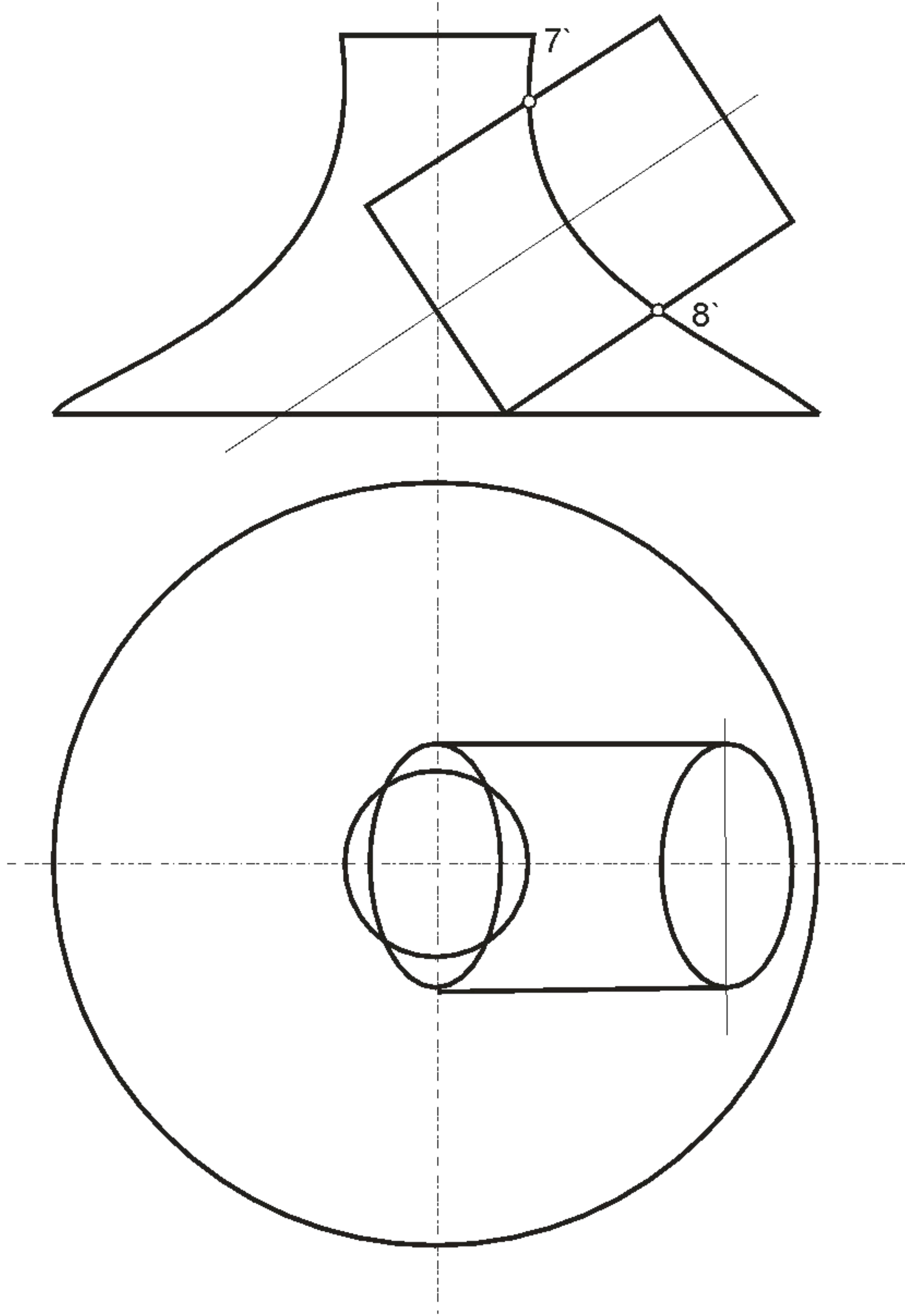
Алгоритм

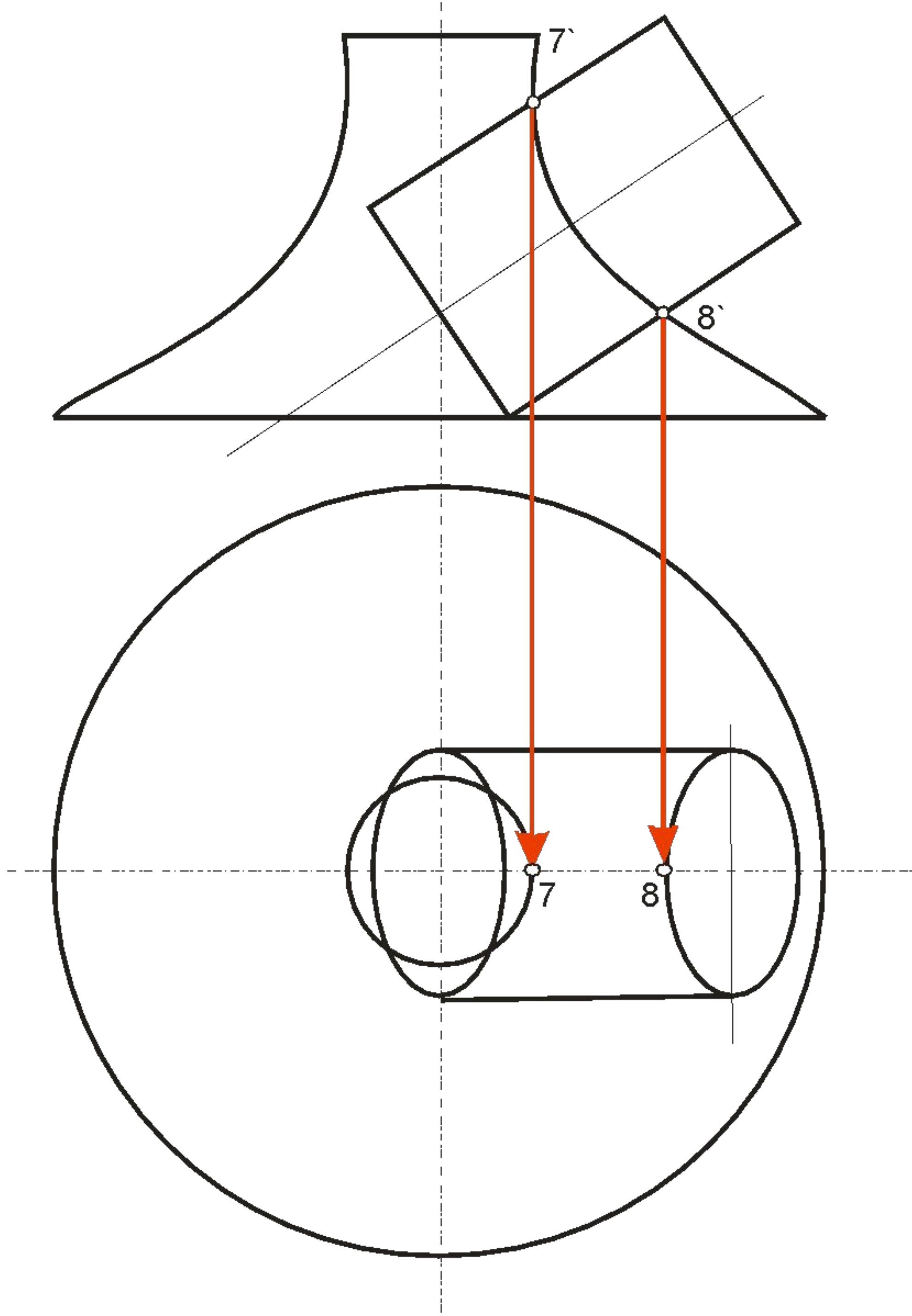
1) За центр выбираем точку пересечения осей.
2) С данной точки проводим сферу, чтобы она одной из поверхности касалась, а другую пересекала
3) Линия касания конуса и сферы перпендикулярна оси на пересечении находим точку
4) Увеличиваем радиус сферы и повторяем
9)Определяем видимость точек

МЕТОД СЕКУЩИХ СФЕР

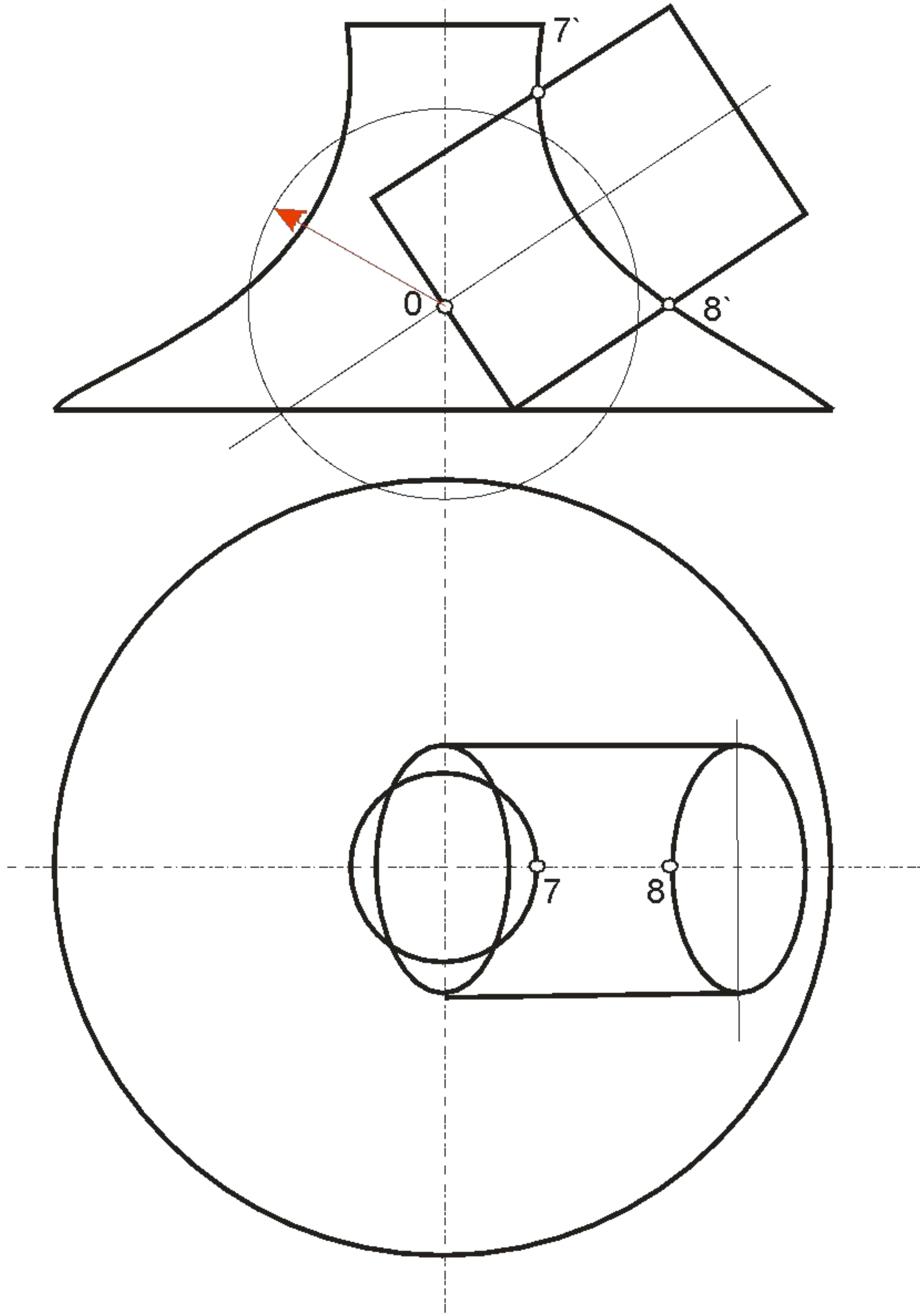


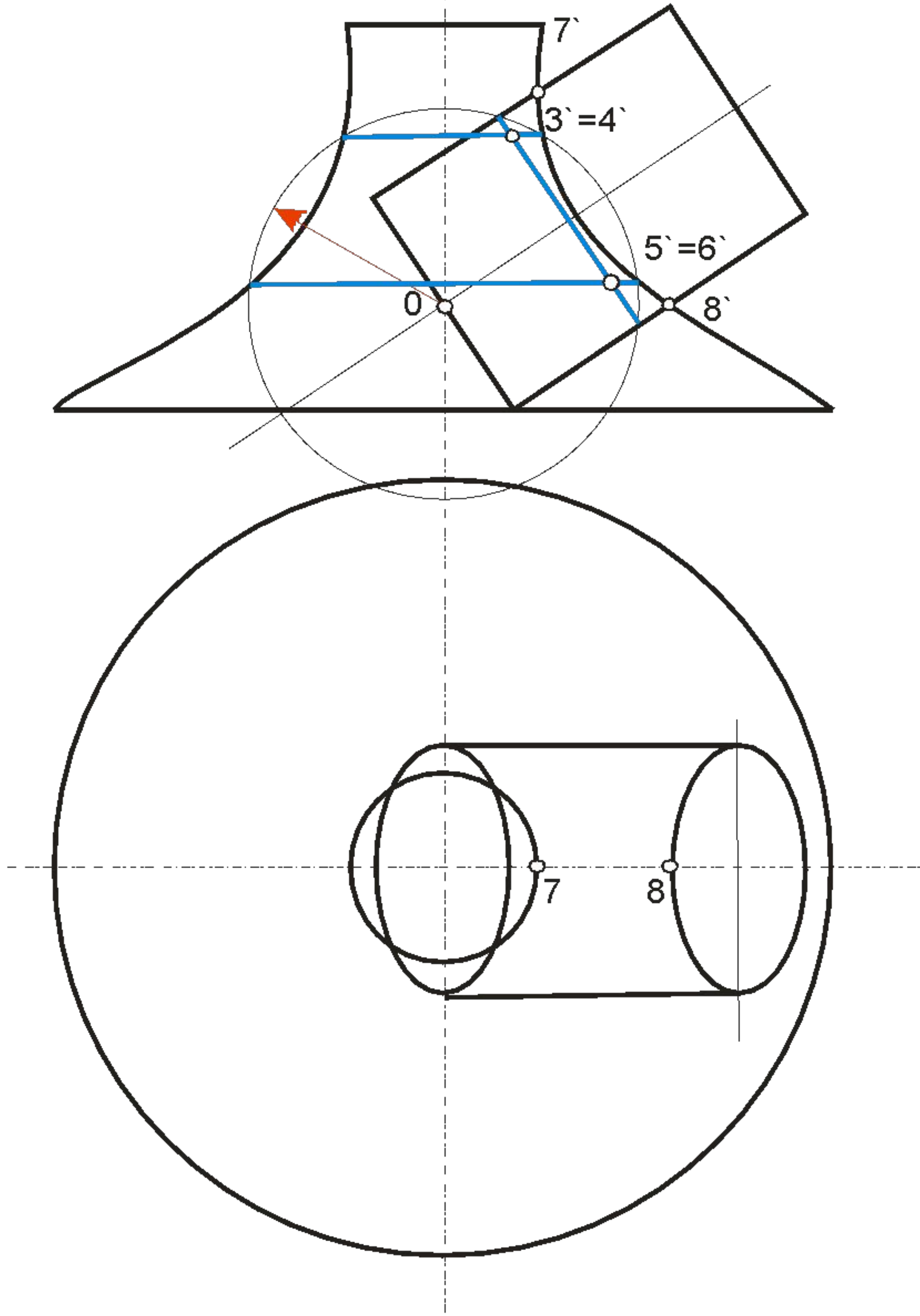



7`
8`

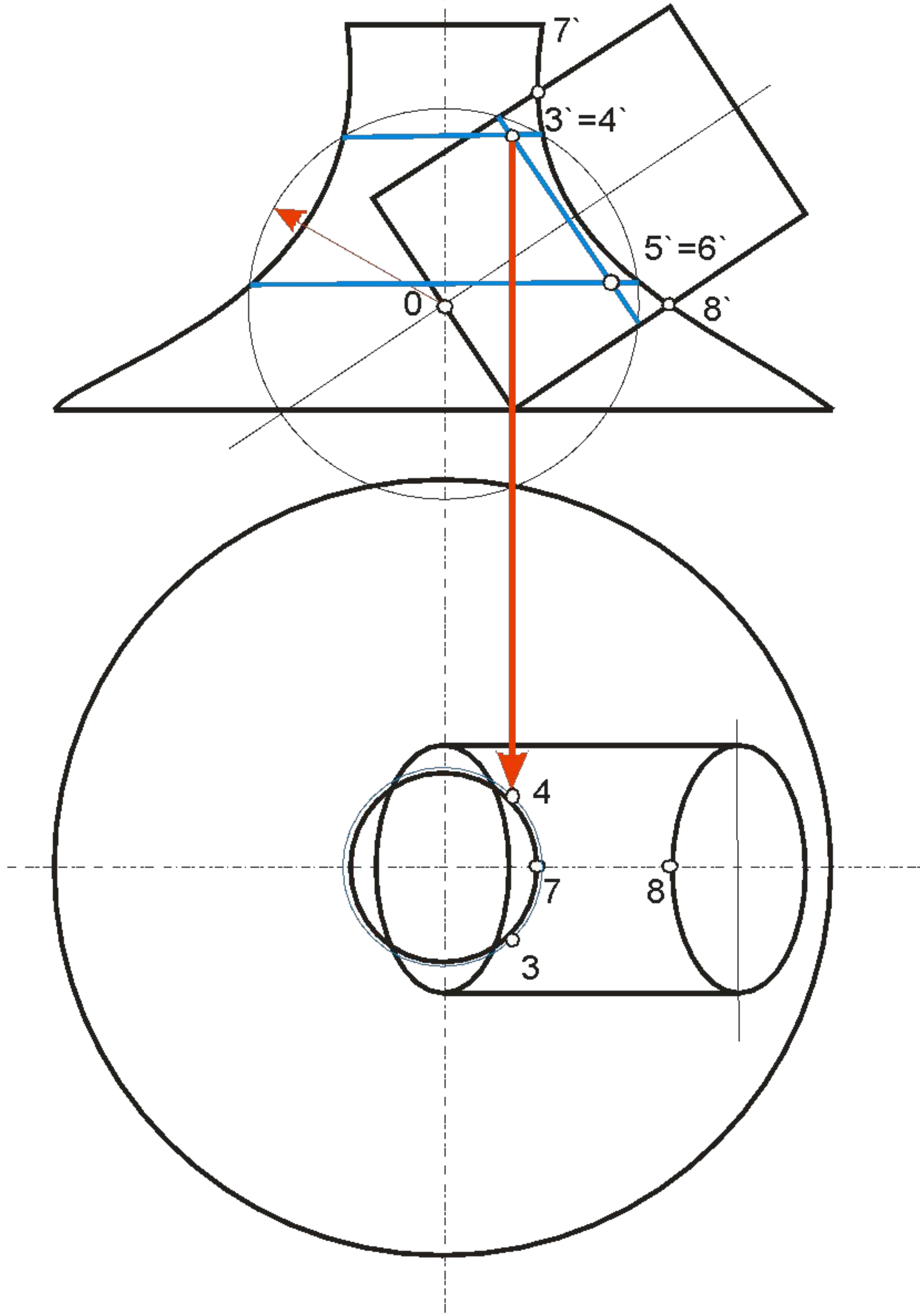


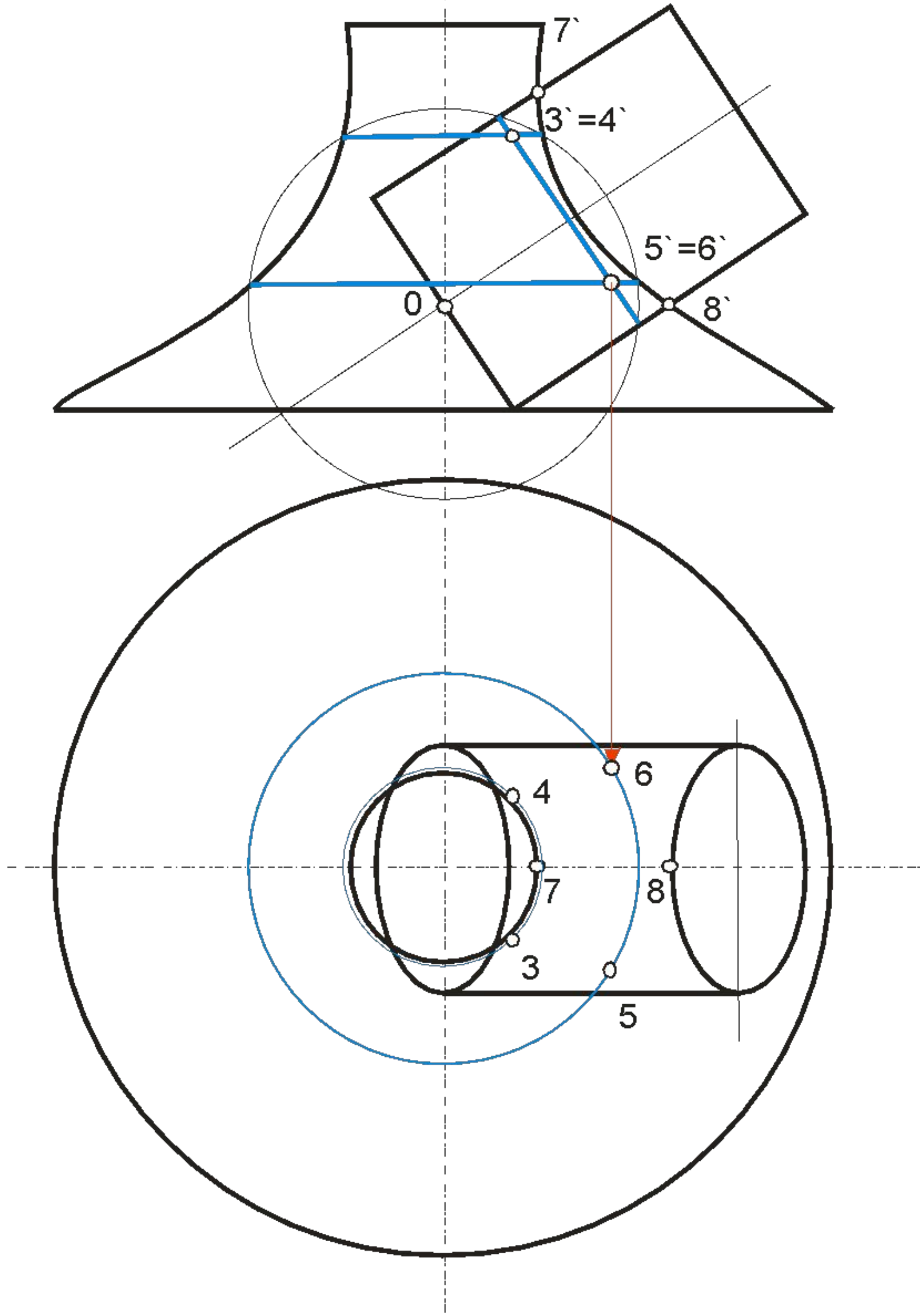
7`
8`
7
8

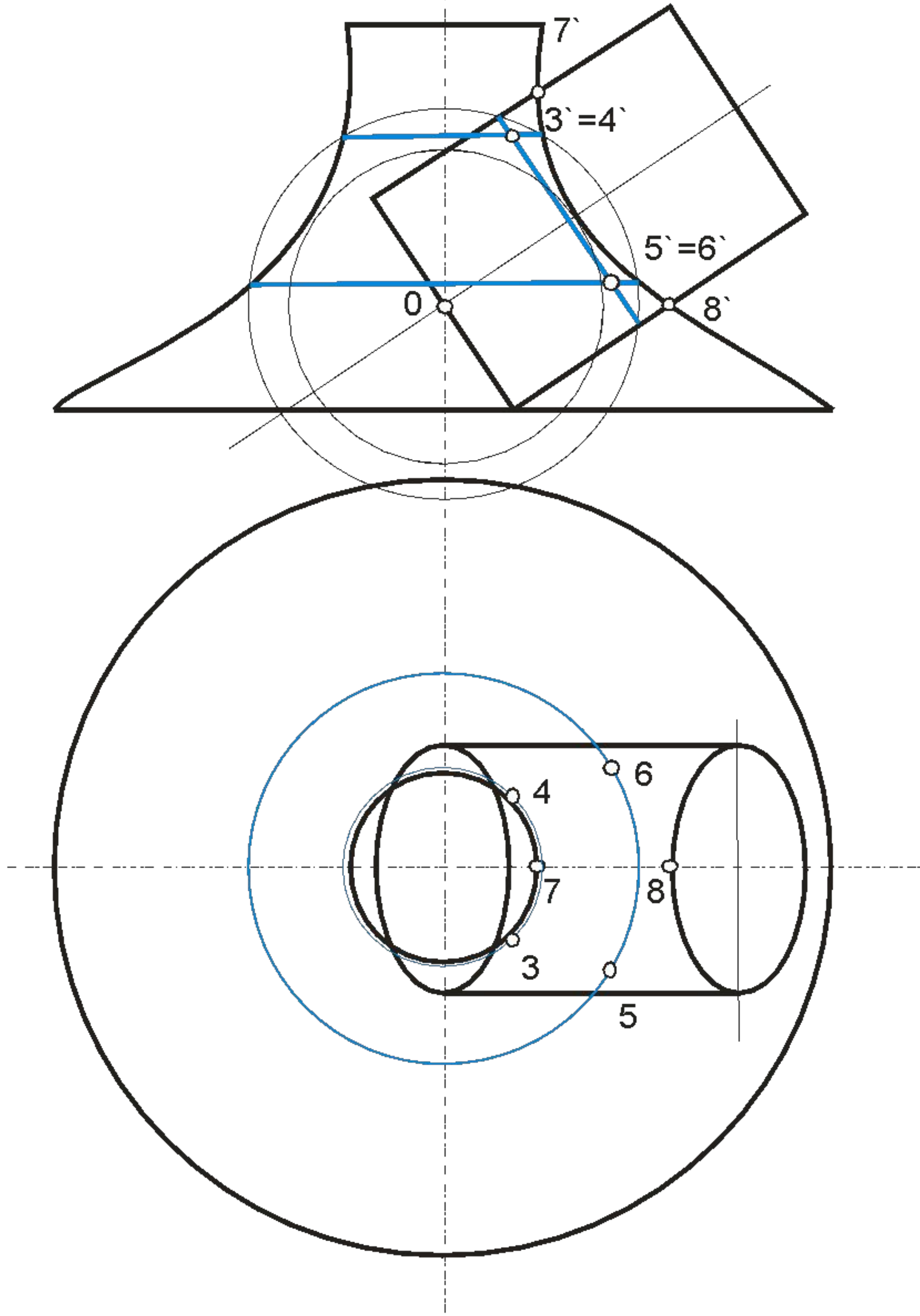

7`
0
8`
7
8

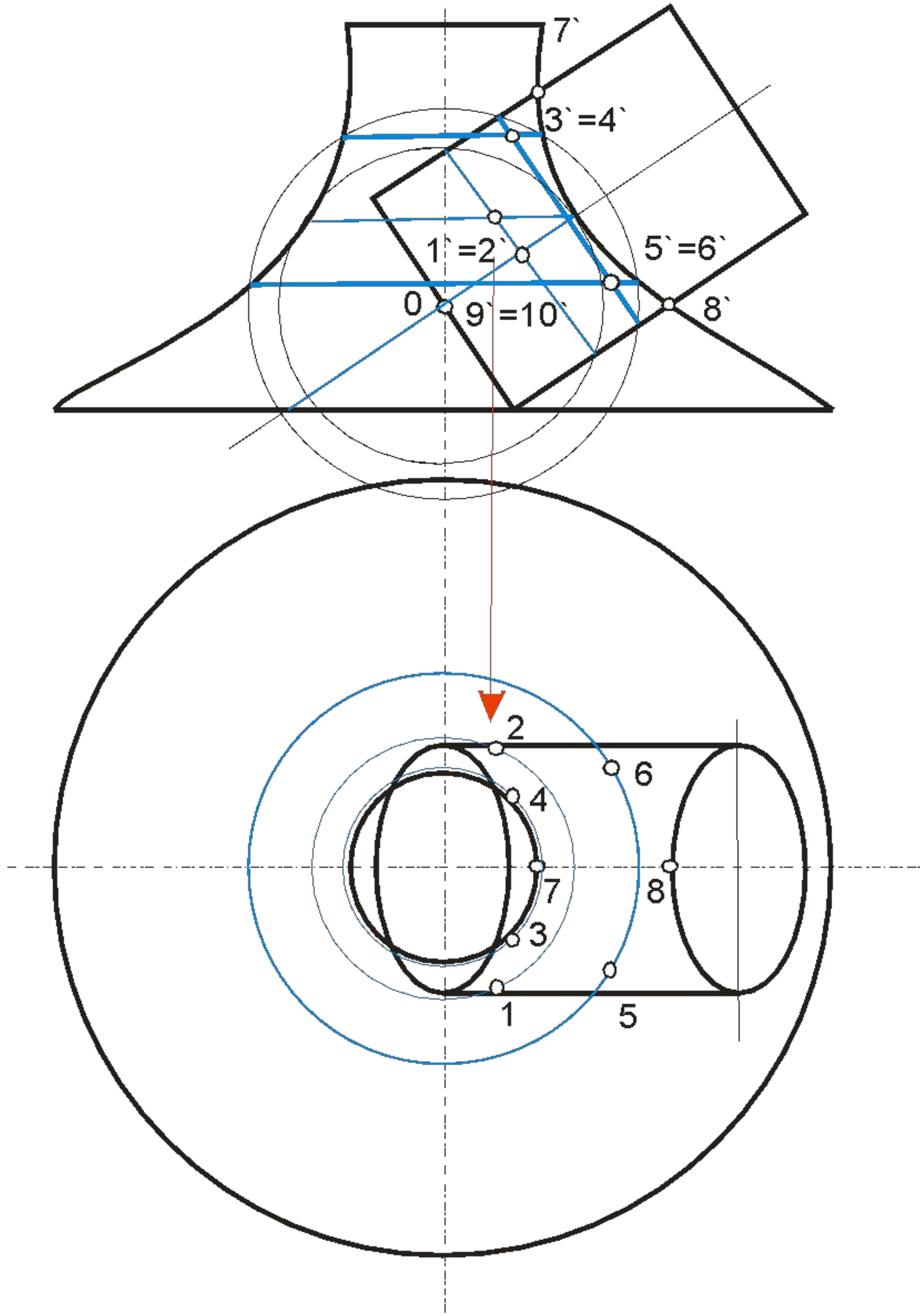


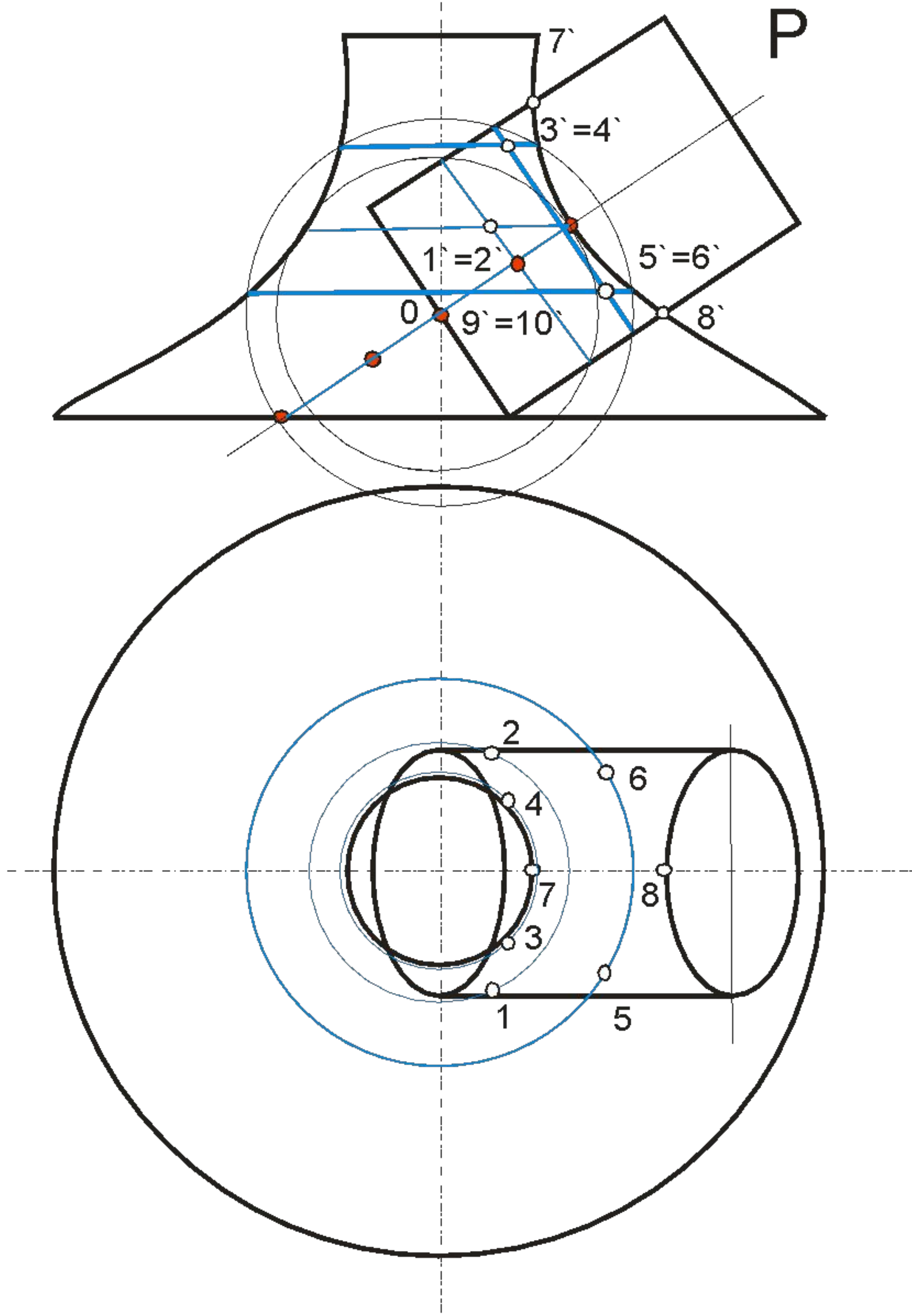
7`
3`=4`
5`=6`
0
8`
7
8


7`
3`=4`
5`=6`
0
8`
4
7
8
3

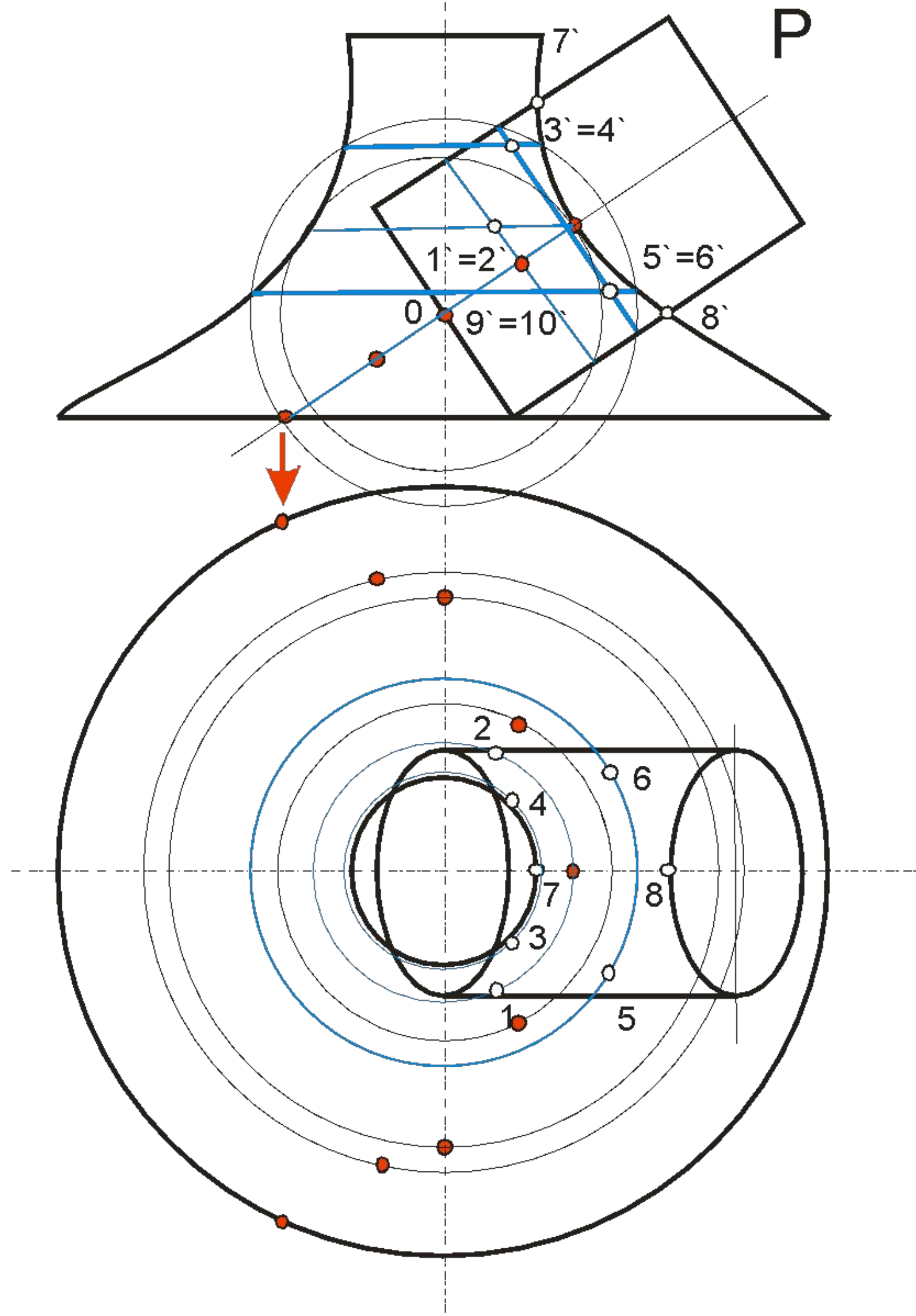

7`
3`=4`
5`=6`
0
8`
6
4
7
8
3
5


7`
3`=4`
5`=6`
0
8`
6
4
7
8
3
5

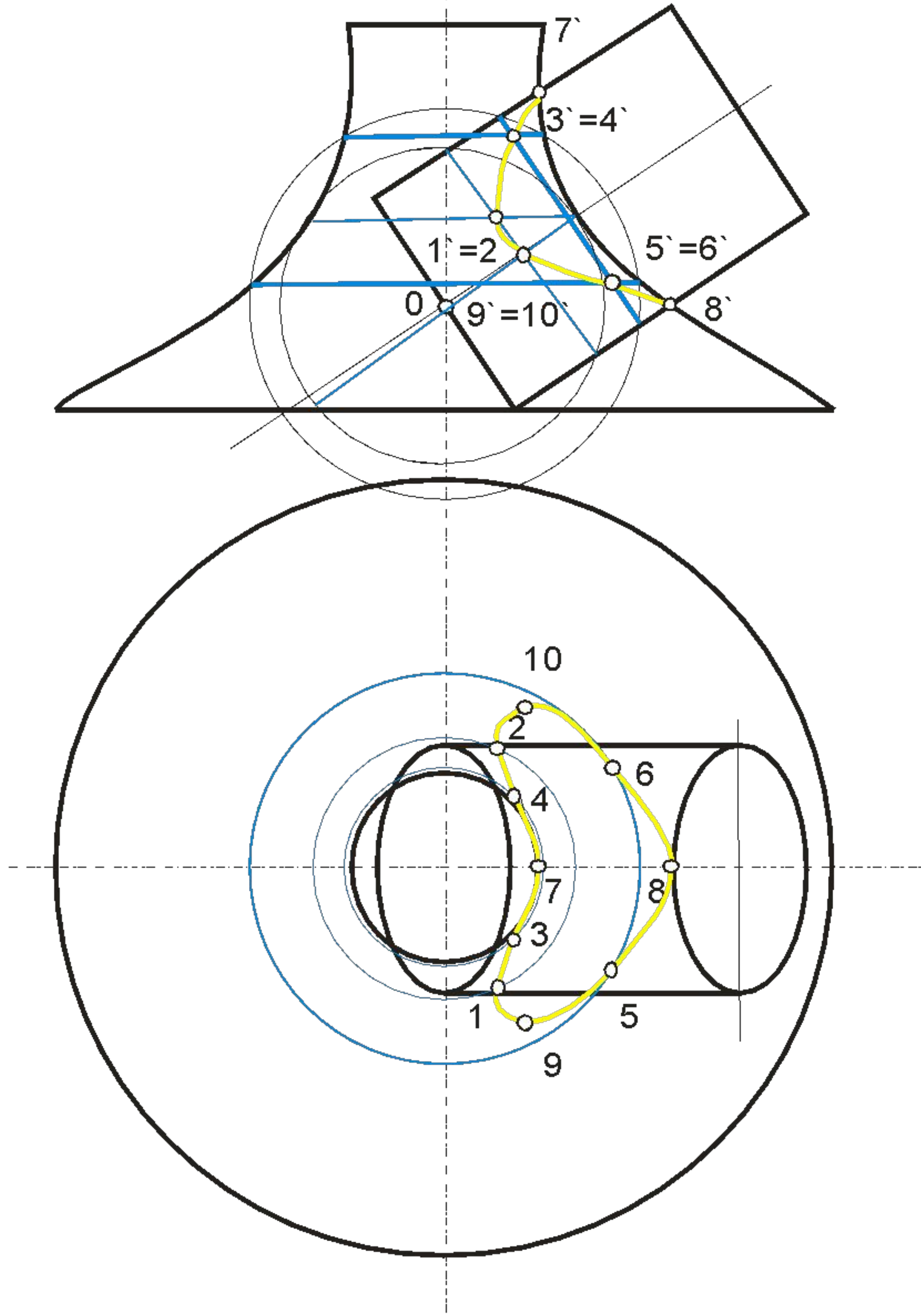

7`
3`=4`
1`=2`
5`=6`
0
9`=10`
8`
2
6
4
7
8
3
1
5



P
7`
3`=4`
1`=2`
5`=6`
0
9`=10`
8`
2
6
4
7
8
3
1
5



P
7`
3`=4`
1`=2`
5`=6`
0
9`=10`
8`
2
6
4
7
8
3
1
5

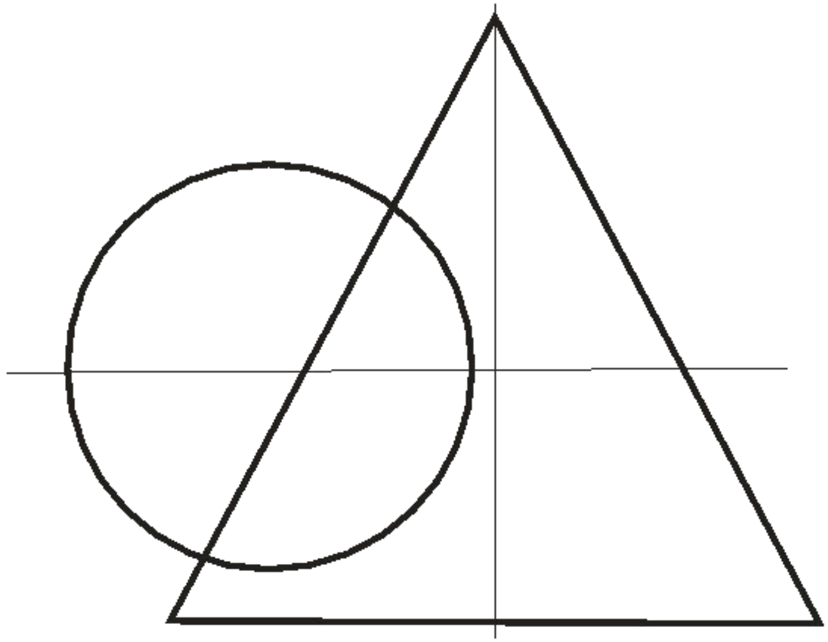


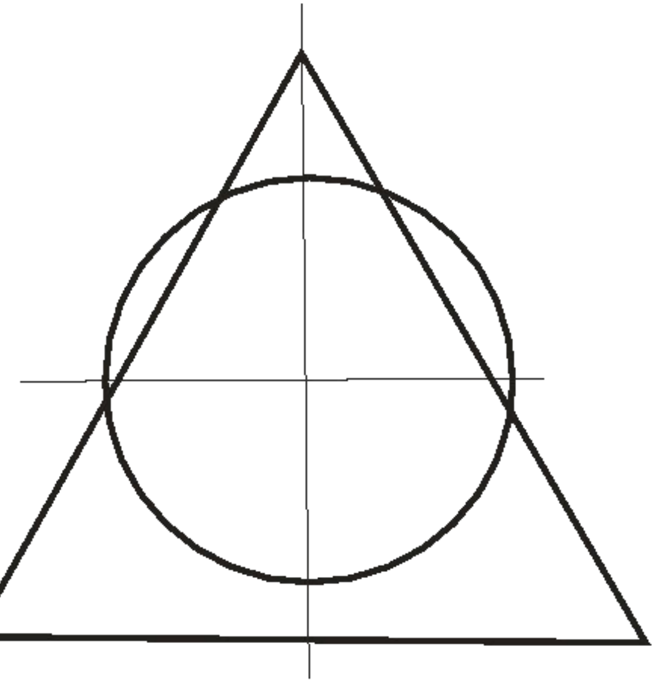
7`
3`=4`
1`=2
5`=6`
0
9`=10`
8`
10
2
6
4
7
8
3
1
5
9

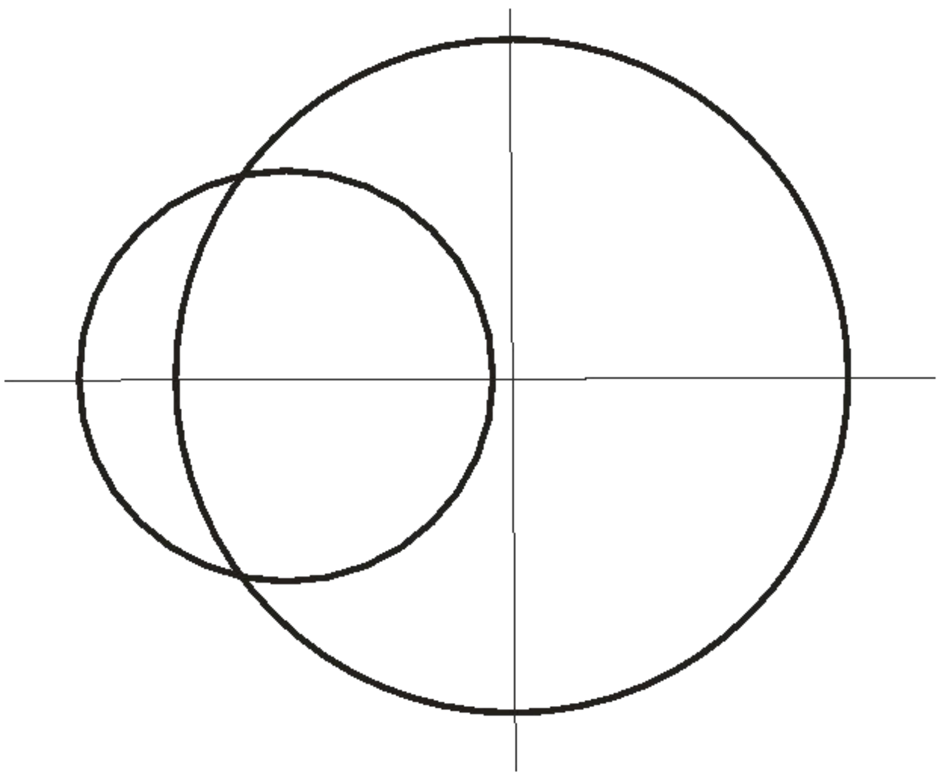
- Каждая из этих поверхностей имеет семейство окружностей, являющихся линиями сечения их концентрическими сферами. Применению метода концентрических сфер должно предшествовать такое преобразование чертежа в результате которого оси обеих поверхностей должны быть расположены параллельно одной и той же плоскости проекций

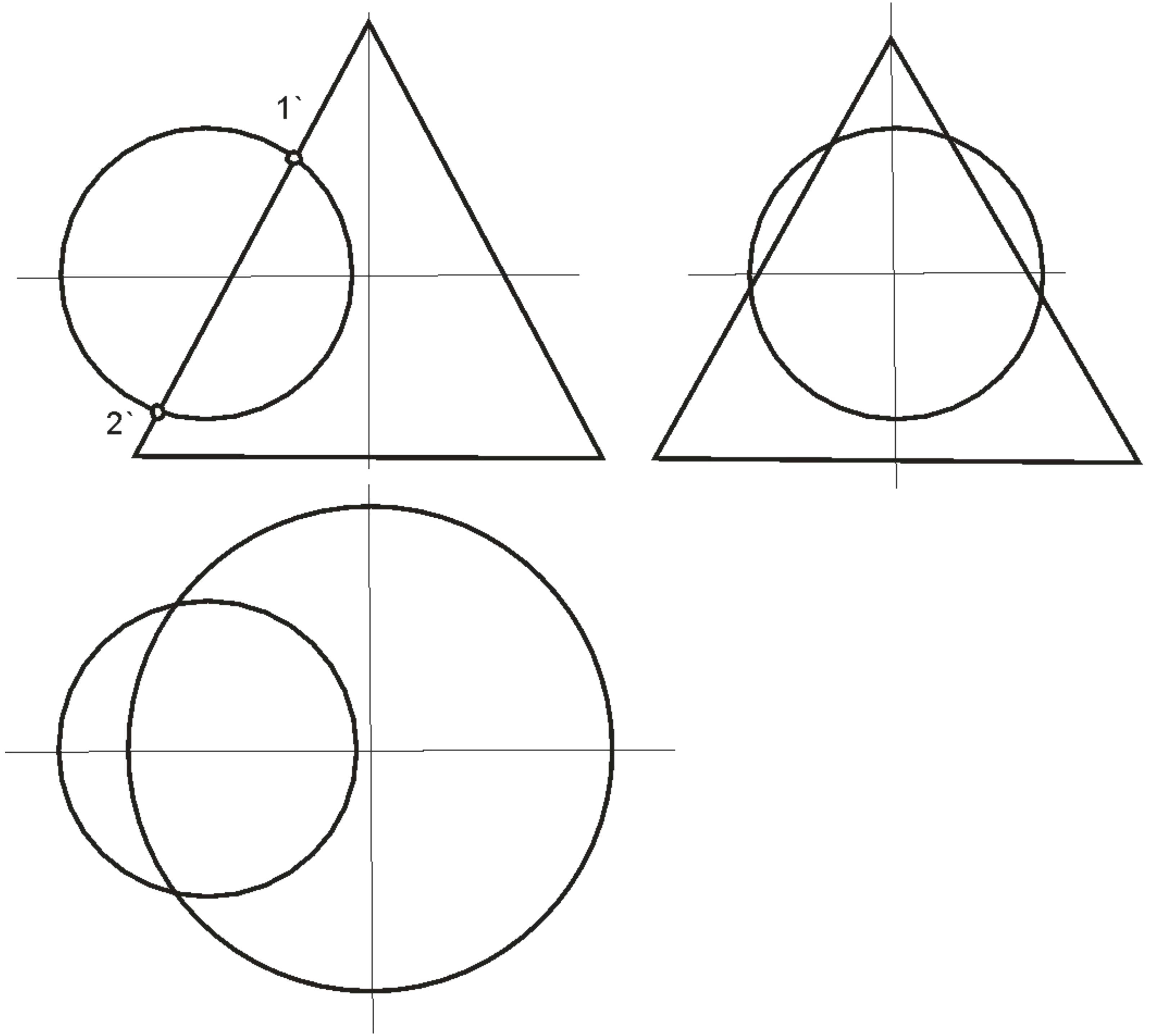
- Оси поверхностей ***G*** и ***Q*** параллельны фронтальной плоскости проекций и пересекаются в точки ***A***. Эта точка принимается за центр всех вспомогательных концентрических сфер. Каждая из концентрических сфер пересекает поверхности по окружностям - параллелям (***a, b, c, d, n***), фронтальные проекции которых являются прямыми линиями (a_2, b_2, c_2, d_2, n_2). Проекции точек 1_2, 2_2, 3_2, 4_2, 5_2 и 6_2 пересечения проекций параллелей принадлежат проекции искомой линии пересечения поверхностей. Пересечение главных меридианов определяет крайние точки ***7*** и ***8.***

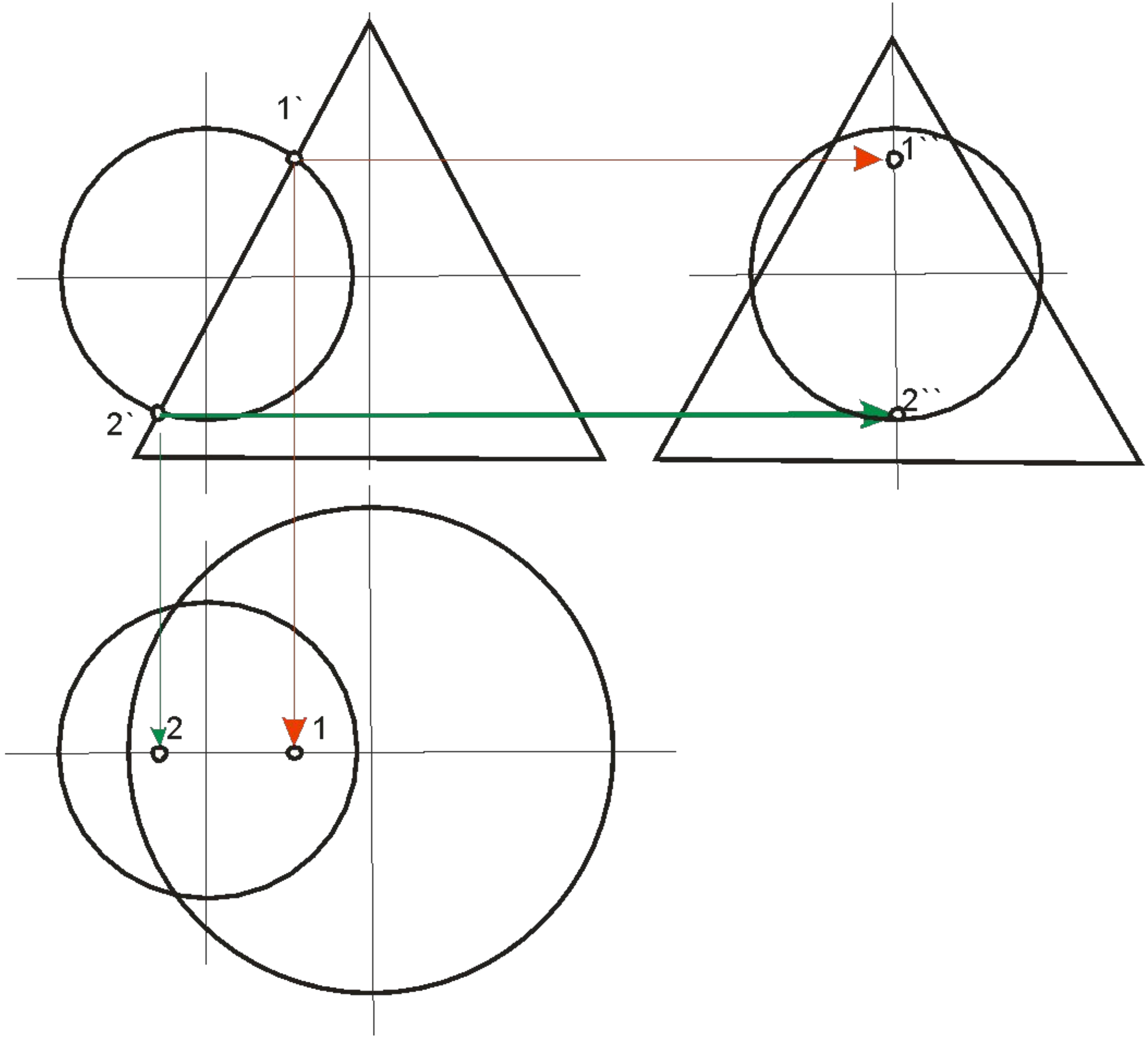
- Для точного построения линии пересечения поверхностей необходимо найти точки ***9*** и ***10***, которые определяют границу зоны видимости линии пересечения поверхностей на горизонтальной проекции. Для этой цели использовалась вспомогательная секущая плоскость ***b***, которая пересекает поверхность ***Q*** по линии ***m***, а поверхность ***G*** по образующим, горизонтальные проекции которых пересекаясь определяют положение искомых точек.
- Соединив найденные точки ***1***...***10*** с учетом видимости получим линию пересечения поверхностей.

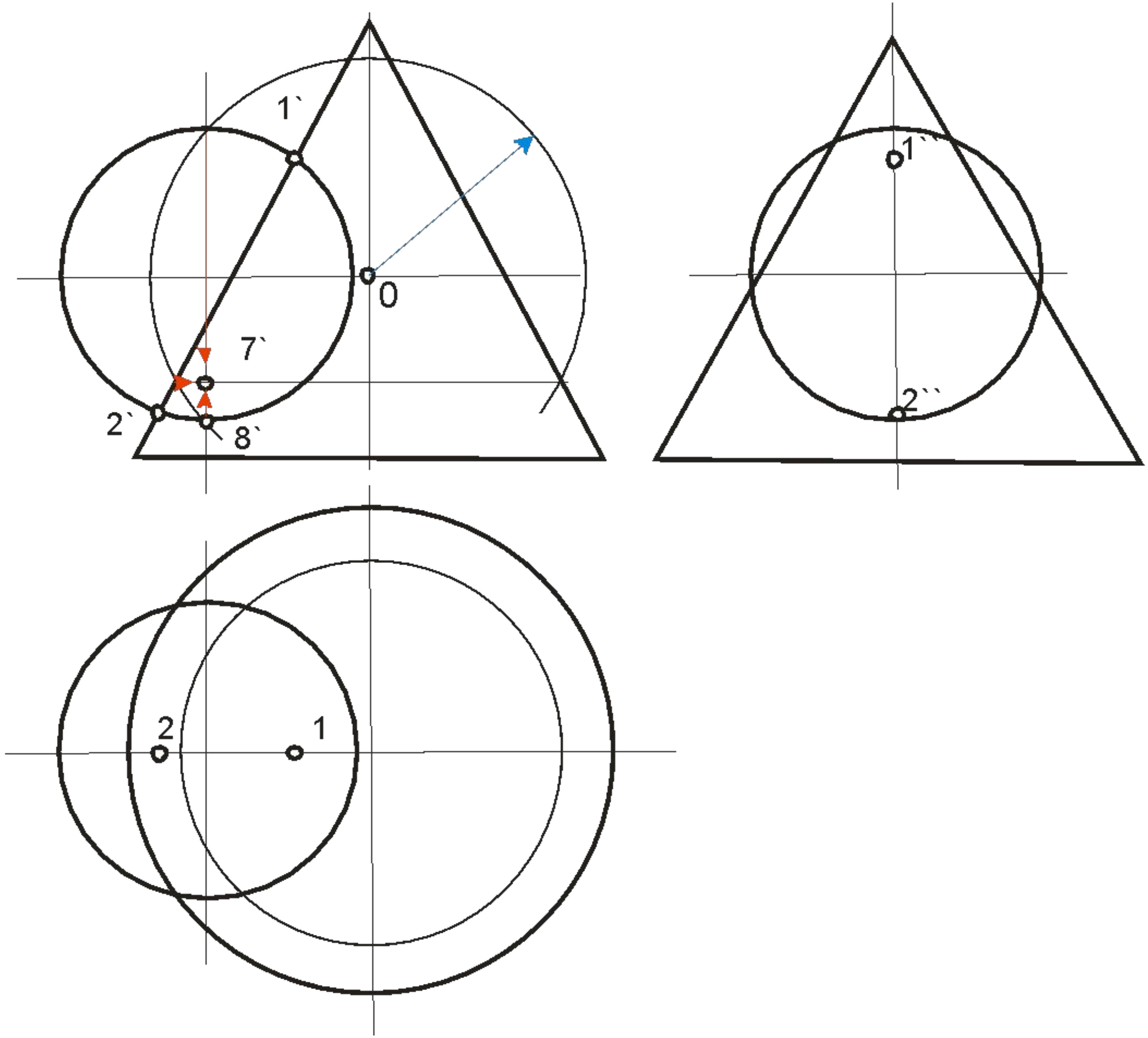




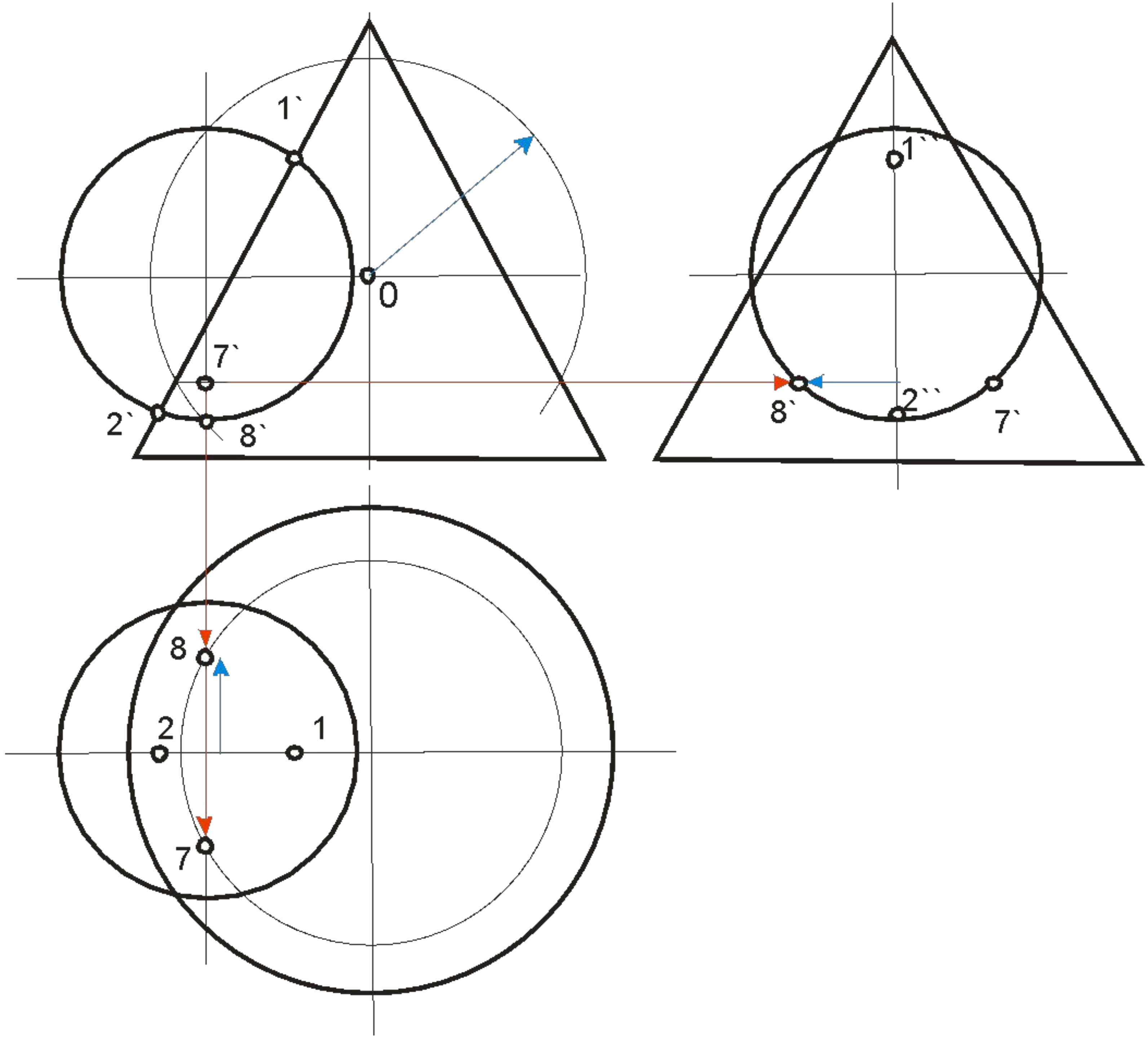


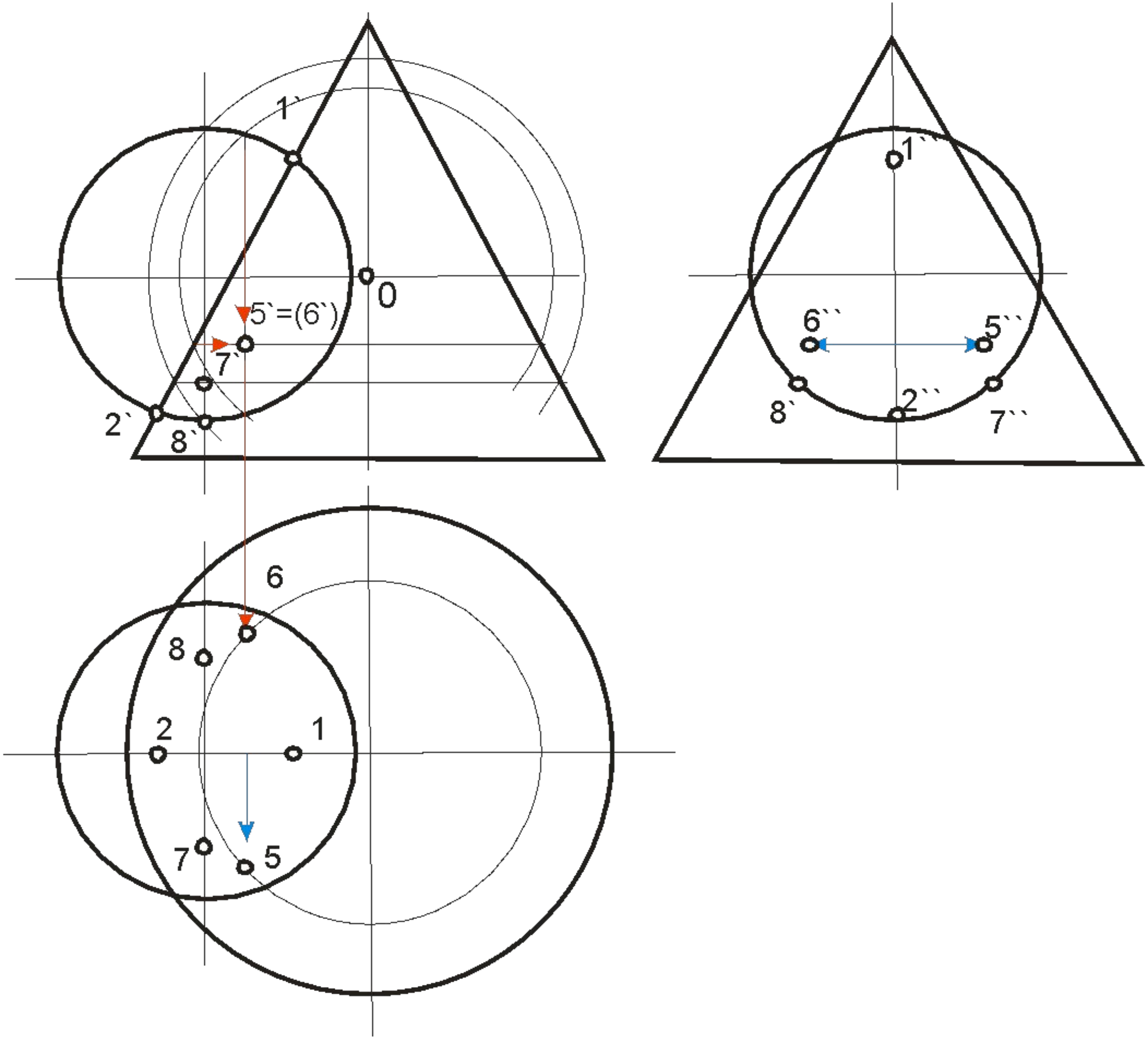

1`
2`

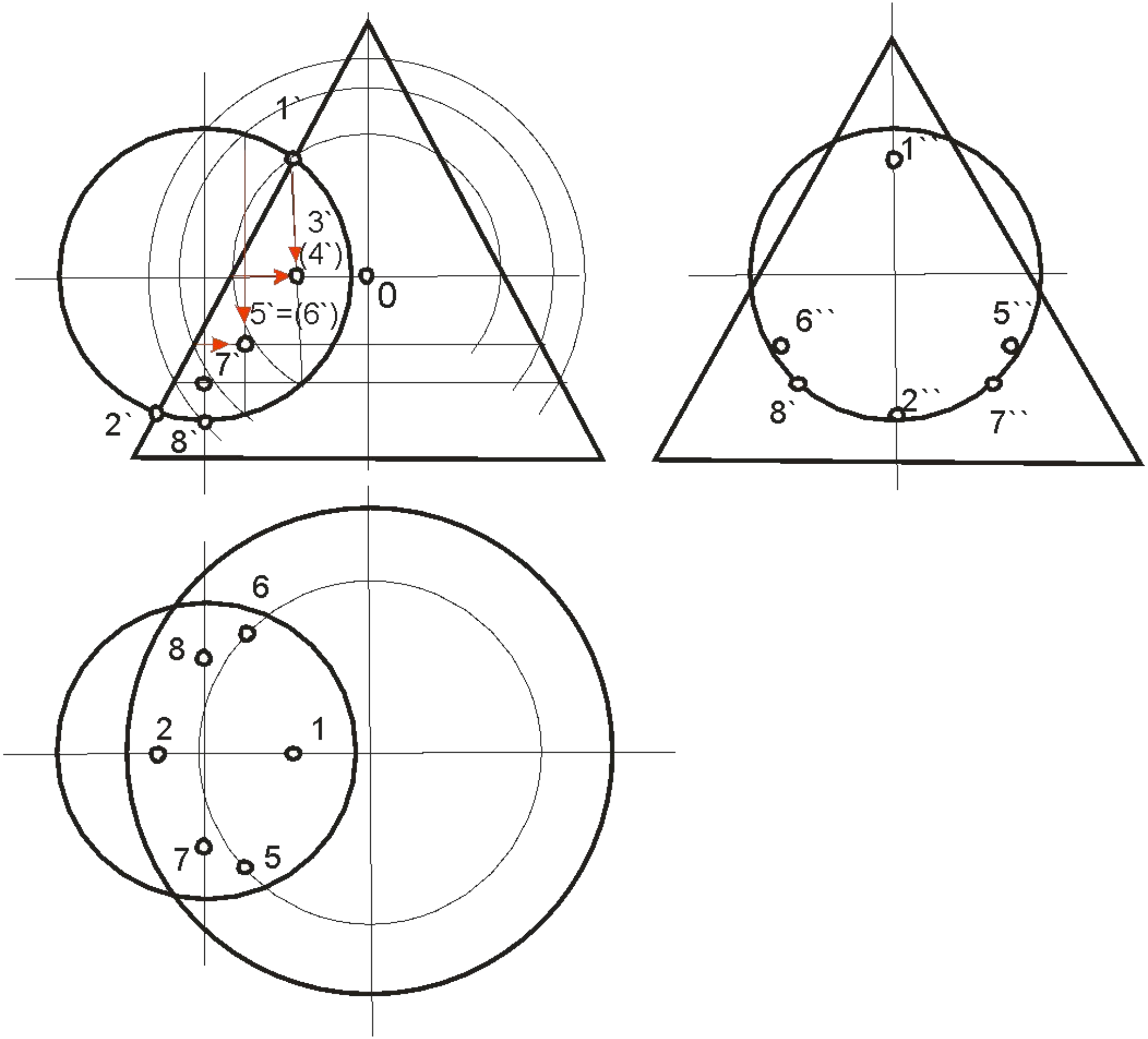

1`
1``
2`
2``
2
1



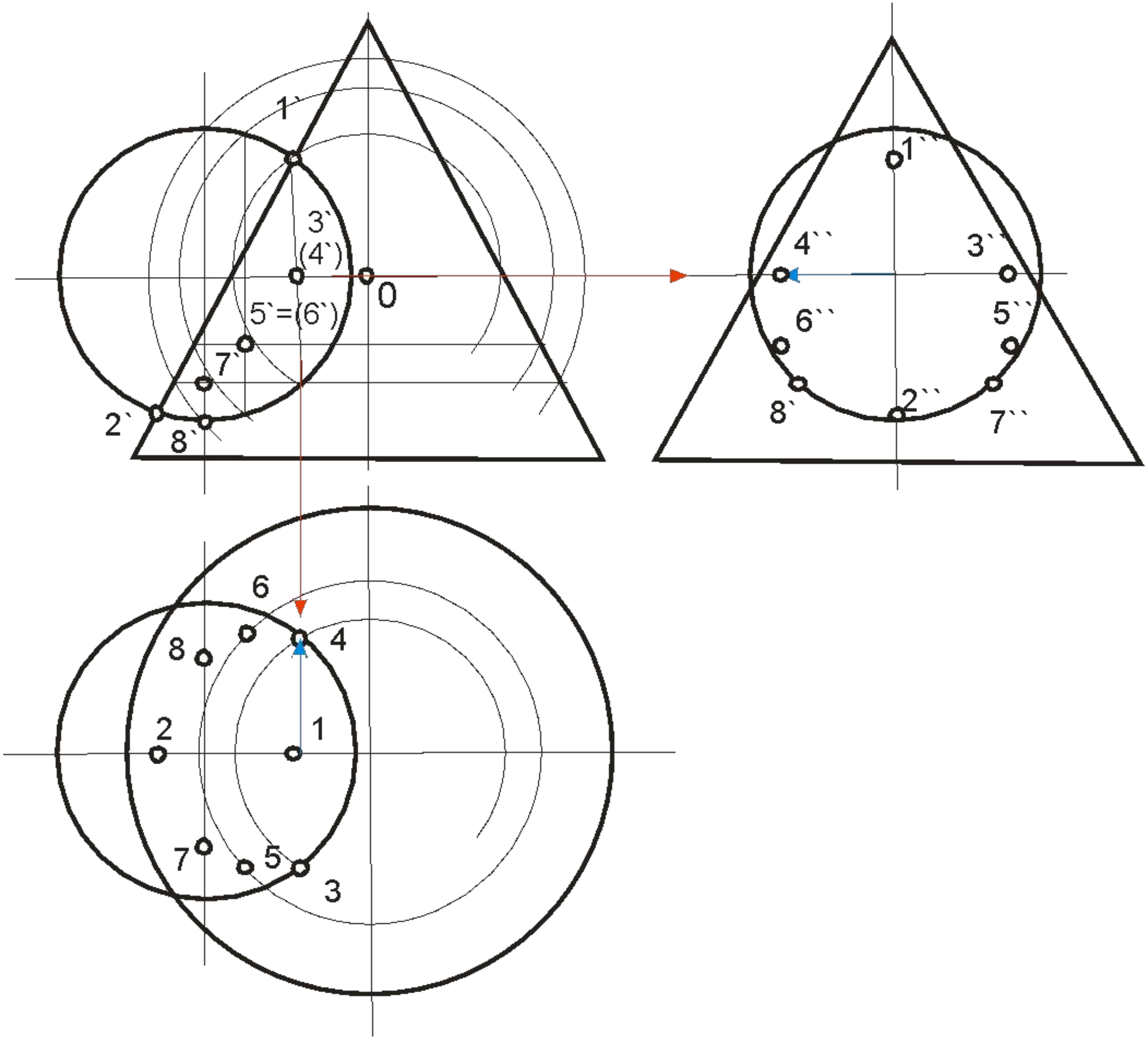
1`
0
7`
2`
8`
1``
2``
2
1

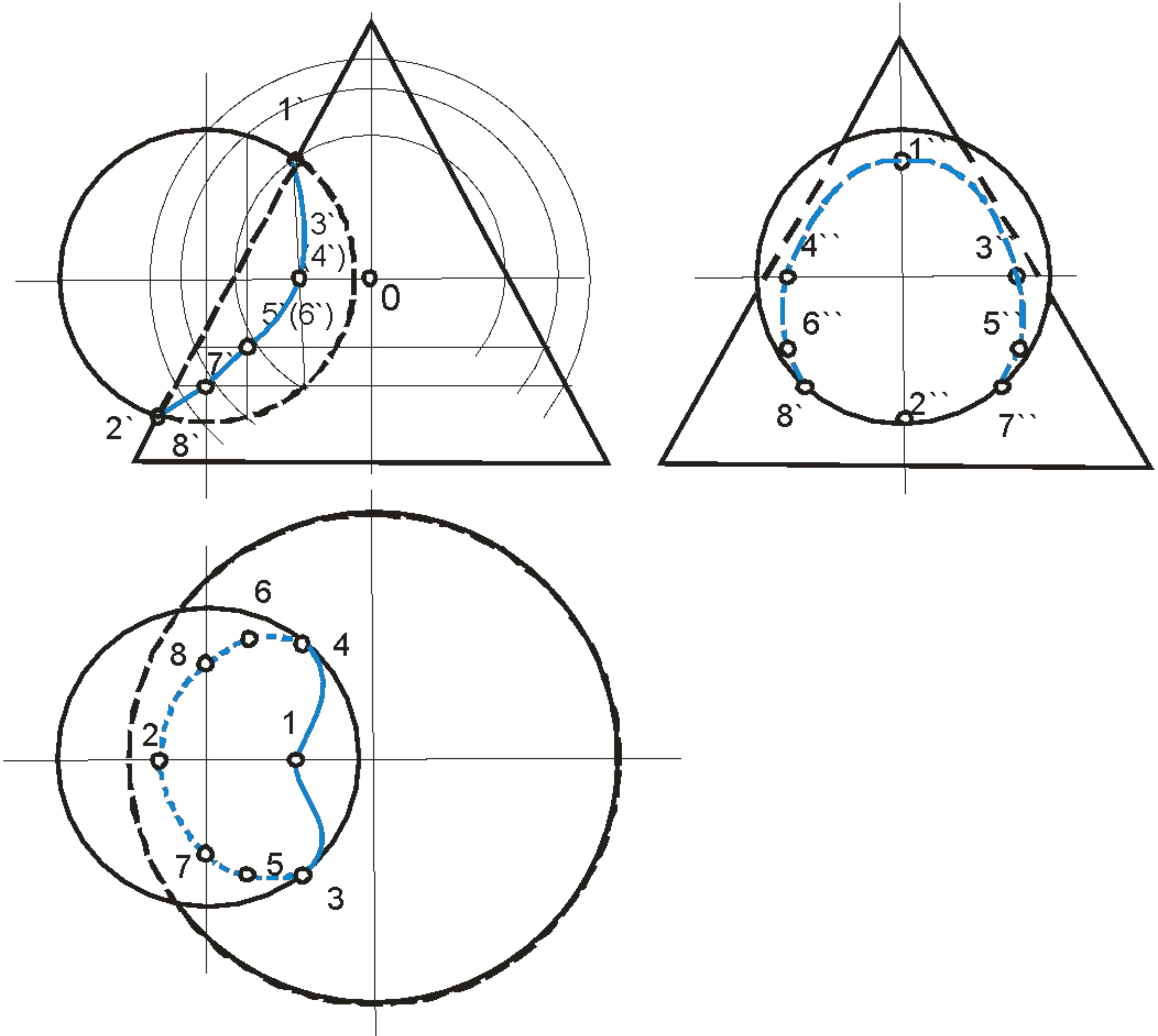

1`
0
7`
2`
8`
1``
2``
8`
7`
8
2
1
7


1`
0
5`=(6`)
7`
2`
8`
1``
6``
5``
8`
2``
7``
6
8
2
1
7
5



1`
3`
(4`)
0
5`=(6`)
7`
2`
8`
1``
6``
5``
8``
2``
7``
6
8
2
1
7
5


1`
3`
(4`)
0
5`=(6`)
7`
2`
8`
1``
4``
3``
6``
5``
8`
2``
7``
6
8
4
2
1
7
5
3

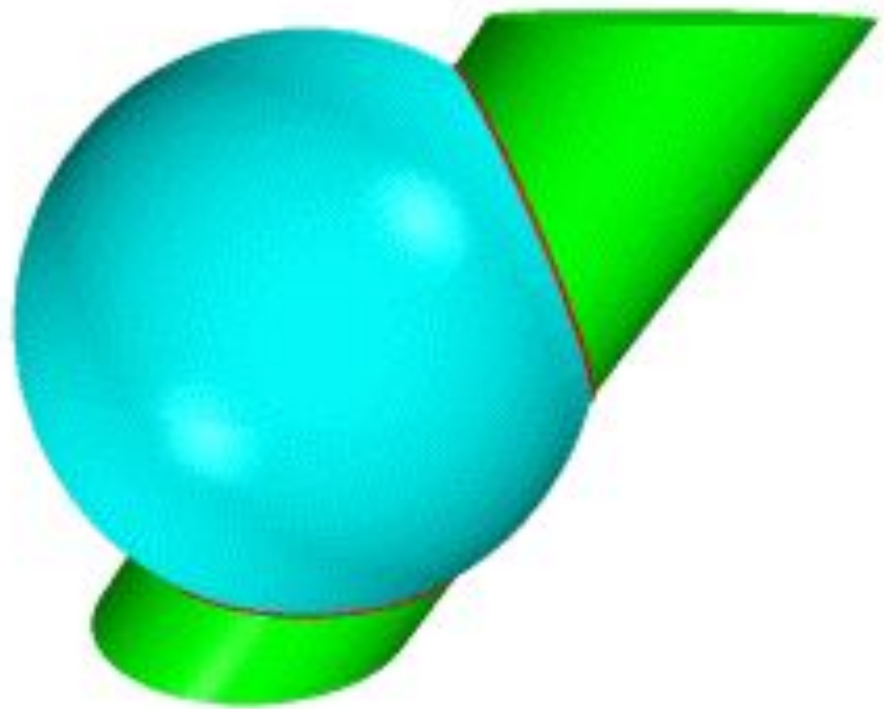

1`
3`
(4`)
0
5`(6`)
7`
2`
8`
1``
4``
3``
6``
5``
8`
2``
7``
6
4
8
1
2
7
5
3

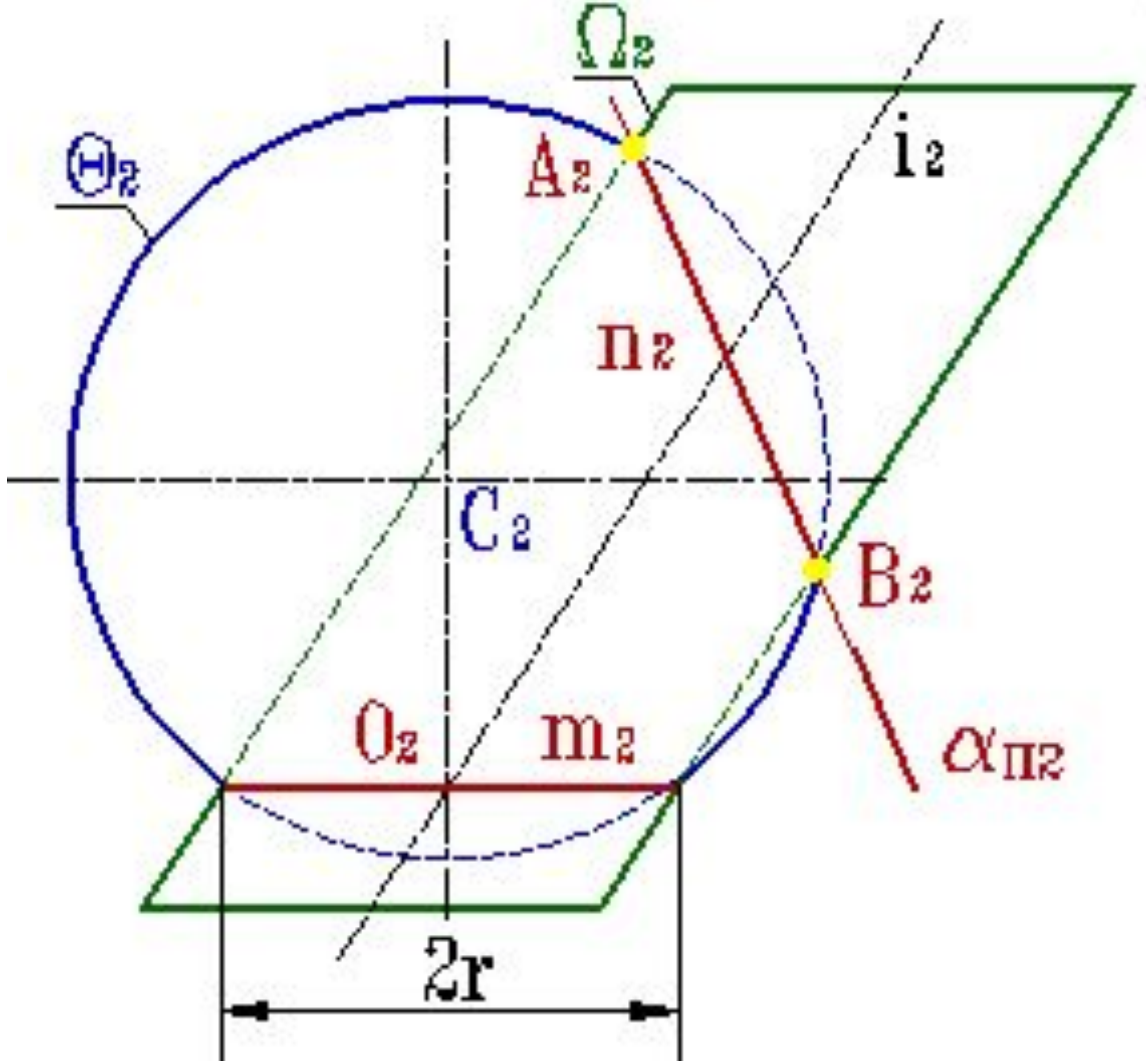
ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

- ***Поверхностью второго порядка называется множество точек пространства, декартовы координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени.***
- Две поверхности второго порядка в общем случае пересекаются по пространственной линии четвертого порядка, которую называют ***биквадратной кривой***.

- ***Теорема*** 1. ***Если две поверхности второго порядка пересекаются по одной плоской кривой, то существует и другая плоская кривая, по которой они пересекаются.***

Теорема 1





Ω2
Θ2
A2
i2
n2
C2
B2
O2
m2
αп2
2r

Теорема 1

- Фронтальные проекции **q2** сферы Q и **W2** эллиптического цилиндра **W**, имеющих общую окружность ***m***(***m*2**) с центром ***O***(***O*2**)

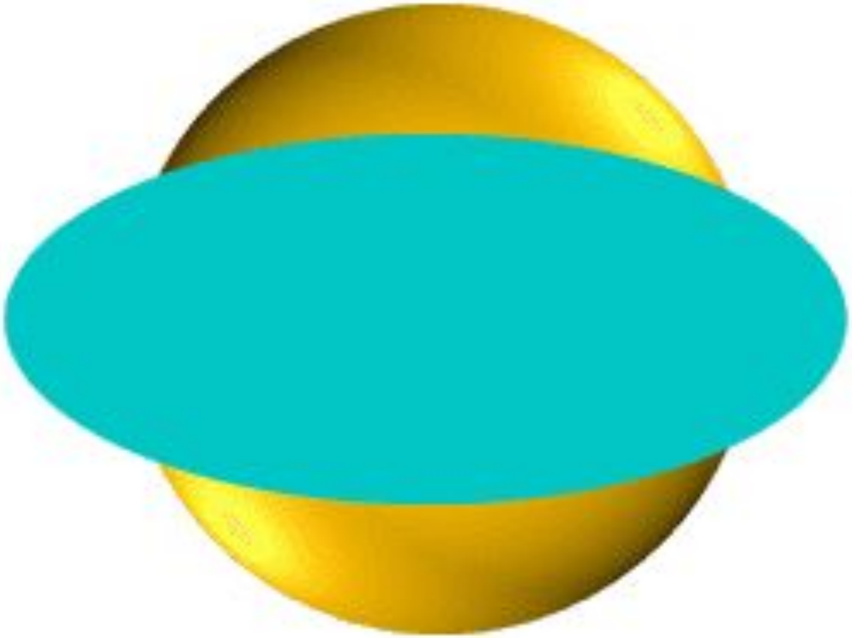
Теорема 1

- Плоскость $\boldsymbol{\sigma}$, определяемая центром сферы $\boldsymbol{C}$ и осью $\boldsymbol{i}$ цилиндра, является плоскостью симметрии заданных поверхностей, и параллельна фронтальной плоскости проекций.
- Общая окружность радиуса $\boldsymbol{r}$ – это одна из плоских кривых второго порядка распавшейся линии пересечения. Остается построить вторую кривую, плоскость $\boldsymbol{\alpha}$ которой должна быть в условиях данного примера перпендикулярна плоскости симметрии $\boldsymbol{\sigma}$, а следовательно и $\boldsymbol{\Pi_2}$. Вторая линия пересечения (окружность) проецируется на $\boldsymbol{\Pi_2}$ в виде отрезка прямой $\boldsymbol{n_2}$. Для ее построения следует воспользоваться точками $\boldsymbol{A_2}$ и $\boldsymbol{B_2}$, принадлежащими очеркам заданных поверхностей.

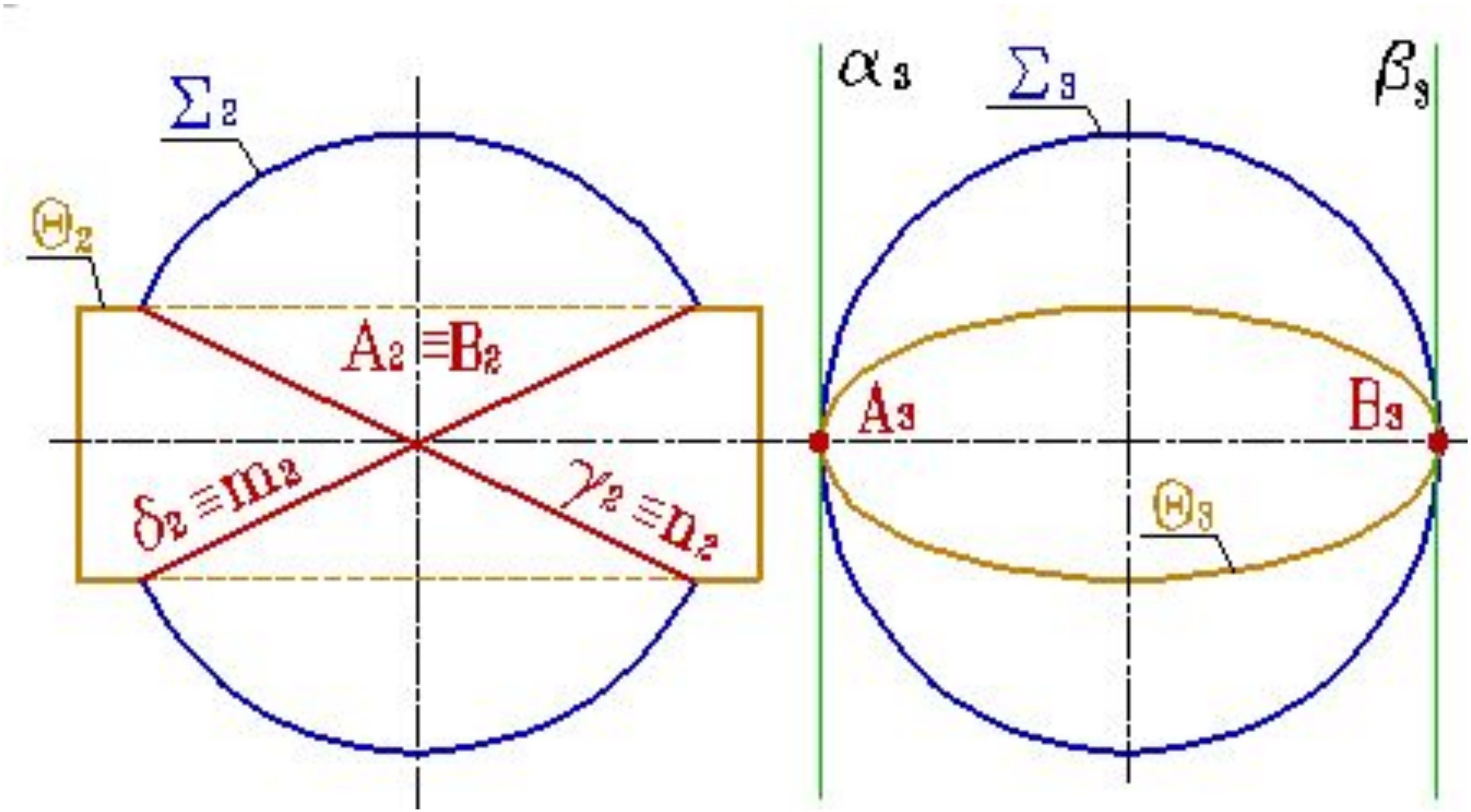
Теорема 2

- ***Теорема 2***.(о двойном касании). ***Если две поверхности второго порядка имеют касание в двух точках A и B, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка, плоскость которых проходит через отрезок AB, соединяющий точки касания.***

Теорема 2



Теорема 2



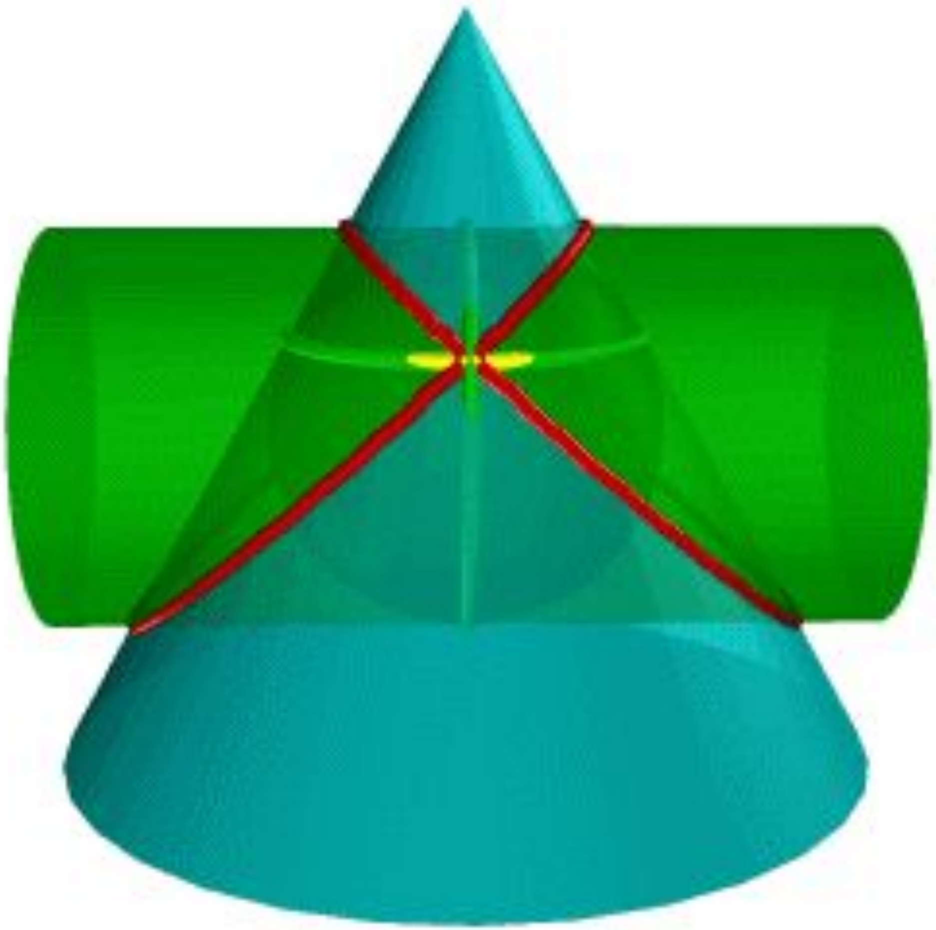
Теорема 2

- Например, по двум окружностям ***m*** и ***n*** пересекается сфера ***S*** и эллиптический цилиндр ***Q***. Точки касания и касательные плоскости обозначены соответственно через ***A, B, α, β***. Окружности, на которые распалась линия пересечения поверхностей, расположены во фронтально-проецирующих плоскостях ***γ*** и ***δ***.

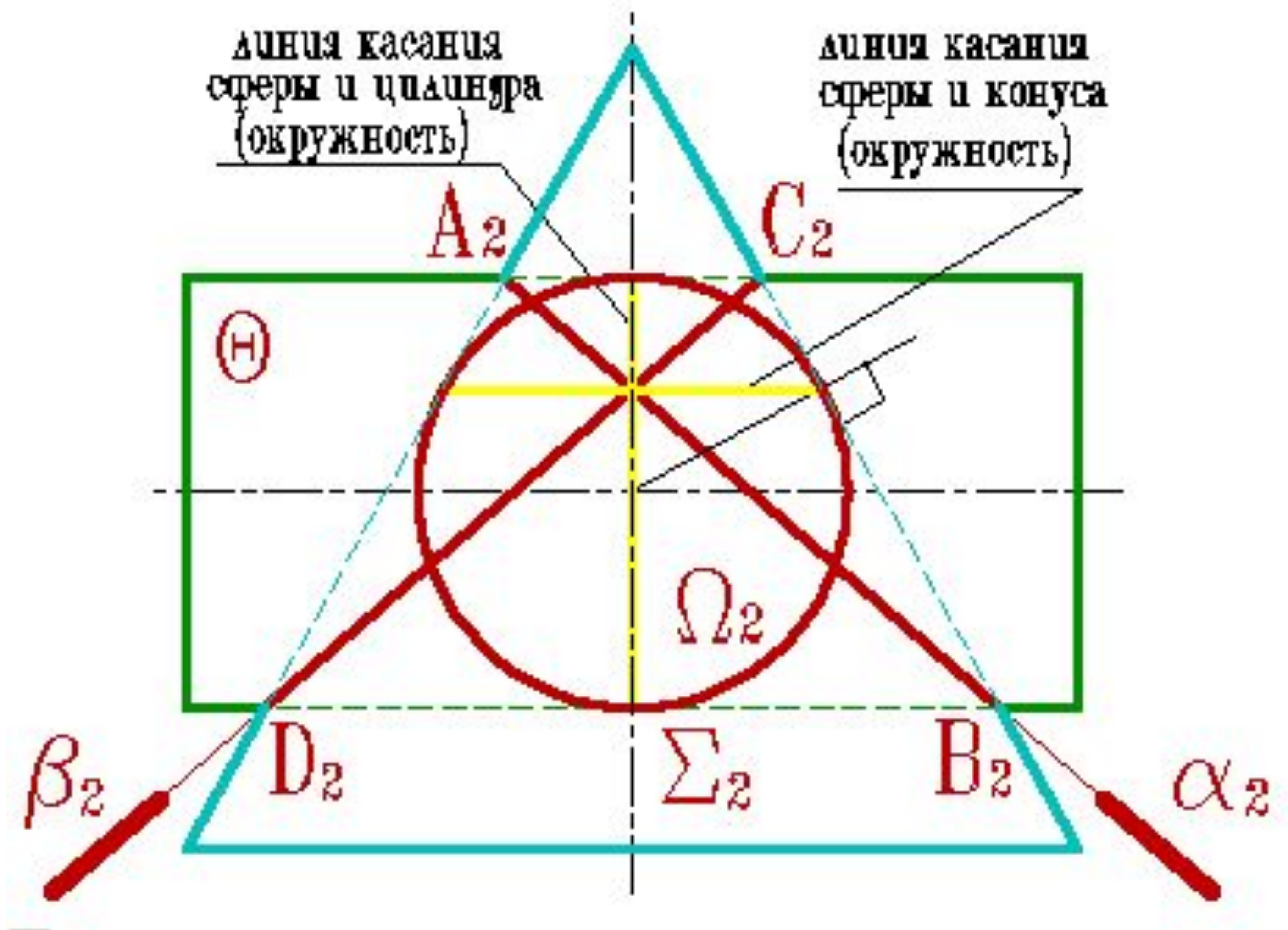
Теорема Монжа

- ***Теорема 3***. (теорема Г. Монжа). ***Если две поверхности второго порядка описаны около третьей или вписаны в нее, то линия их пересечения распадается на две плоские кривые второго порядка. Плоскости этих кривых проходят через прямую, соединяющую точки линий касания.***

Теорема Монжа



Теорема Монжа

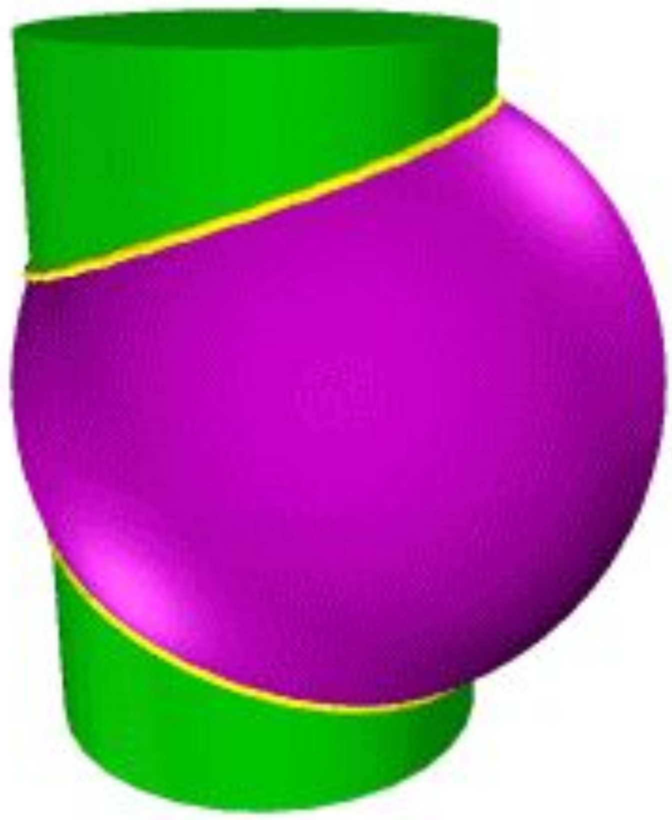


- В соответствии с этой теоремой линия пересечения конуса $\boldsymbol{\Sigma}$ и цилиндра ***Q***, описанных около сферы ***W***, будут плоскими кривыми – эллипсами (расположенными в плоскостях ***a*** и ***b***), фронтальные проекции которых изображаются прямыми $\boldsymbol{A_2B_2}$ и $\boldsymbol{C_2Д_2}$,

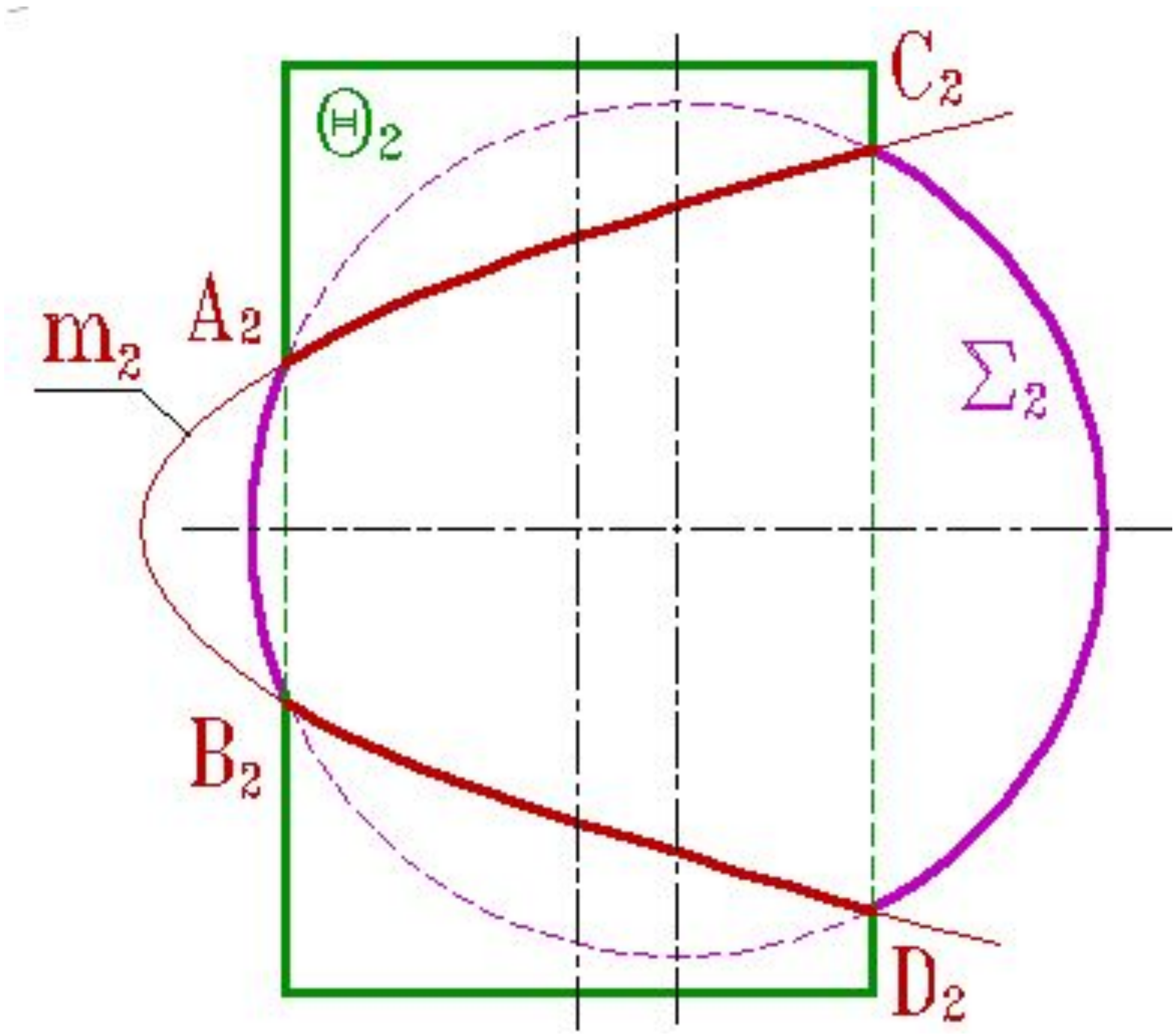
Теорема 4

- ***Теорема 4. Если две поверхности второго порядка имеют общую плоскость симметрии, то линия их пересечения проецируется на эту плоскость в виде кривой второго порядка.***

Теорема 4



Теорема 4



Теорема 4

- Плоскость симметрии определена осью симметрии цилиндра ***Q*** и центром сферы ***S***. Плоскости принадлежат и симметричные сами себе точки ***A***, ***B***, ***C*** и ***D*** линий пересечения. Проекция же линий на фронтальную плоскость имеет форму параболы $\boldsymbol{m_2}$ и аналитически описывается формулой параболы