Дисциплина: **МАТЕМАТИКА**

Раздел 3: **Интегральное исчисление**

Лекция №13
Определённые интегралы.
Применение интегралов в экономике

Разработчик: **Бредихина Ольга Александровна**

3.2 Определённые интегралы
3.2.1 Основные понятия

Пусть на отрезке [a;b] задана функция $y=f(x)$. Разобьём этот отрезок на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. На каждом малом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, где $i = \overline{1,n}$, выберем точку ξ_i, найдём значение функции в этой точке $f(\xi_i)$ и составим сумму $J_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Сумма J_n называется **интегральной** суммой для функции $y=f(x)$ на [a;b].

Определённым интегралом от функции $f(x)$ на отрезке [a;b] называется предел интегральной суммы J_n при условии, что длина наибольшего частичного отрезка Δx_i стремится к нулю, то есть

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max \Delta x_i \to 0}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$$

где a – нижний предел интегрирования; b – верхний предел интегрирования; $f(x)$ – подынтегральная функция; $f(x)dx$ – подынтегральное выражение.

3.2 Определённые интегралы
3.2.1 Основные понятия

Свойства определённого интеграла

Свойства определённого интеграла аналогичны свойствам неопределённого интеграла. Дополнительные свойства:

1. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$, где $c \in (a;b)$;

2. $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$;

3. $\int\limits_{-a}^a f(x)dx = \begin{cases} 2\int\limits_0^a f(x)dx, & \textit{если} \quad f(x) - \textit{чётная}, \\ 0, & \textit{если} \quad f(x) - \textit{нечётная}; \end{cases}$

4. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a;b]$, тогда существует по крайней мере одна точка $c \in [a;b]$ такая, что выполнено равенство $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)\cdot(b-a)\cdot$

Здесь $f(c)$ называется **средним значением функции**.

3.2 Определённые интегралы
3.2.2 Способы вычисления определённого интеграла

1. Использование формулы Ньютона-Лейбница.

Пусть $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$ и $F(x)$ – одна из её первообразных, тогда справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

называемая формулой Ньютона-Лейбница.

Пример 1 Вычислить определённый интеграл $\int_0^{\pi} \sin x dx$.

Решение.

$$\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -(\cos\pi - \cos 0) = -(-1-1) = 2.$$

Ответ: 2.

3.2 Определённые интегралы

3.2.2 Способы вычисления определённого интеграла

2. Использование замены переменной.

Необходимо вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – непрерывная функция на $[a;b]$. Перейдем к новой переменной t, полагая $x=\varphi(t)$. Пусть $a=\varphi(\alpha)$, $b=\varphi(\beta)$, кроме того, при изменении t от α до β значения функции $\varphi(t)$ не выходят за пределы отрезка $[a;b]$. Предположим, что функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на промежутке $[a;b]$, то справедлива следующая формула замены переменной:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

3.2 Определённые интегралы
3.2.2 Способы вычисления определённого интеграла

Пример 2 Вычислить определённый интеграл $\int_0^1 x\cdot\left(2-x^2\right)^5 dx$.

Решение.

$$\int_0^1 x\cdot\left(2-x^2\right)^5 dx=\left[\begin{array}{l} \text{обозначим}\quad t=2-x^2 \\ dt=\left(2-x^2\right)'dx=-2xdx \\ xdx=-\dfrac{dt}{2} \\ x=0,\quad \text{тогда}\quad t=2-0=2 \\ x=1,\quad \text{тогда}\quad t=2-1=1 \end{array}\right]==\int_2^1 t^5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{2}\int_2^1 t^5 dt=-\frac{1}{2}\cdot\frac{t^6}{6}\bigg|_2^1=-\frac{1}{12}\left(1^6-2^6\right)=-\frac{1}{12}(1-64)=\frac{63}{12}=\frac{21}{4}=5{,}25.$$

Ответ: 5,25.

3.2 Определённые интегралы
3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Пусть на отрезке [a;b] задана неотрицательная непрерывная функция $y=f(x)$. Фигура, ограниченная сверху графиком $y=f(x)$, снизу – осью Оx, сбоку прямыми $x=a$ и $y=b$, называется **криволинейной трапецией**.

Геометрический смысл определённого интеграла:

$$S=\int_a^b f(x)dx, \qquad \textbf{(1)}$$

где S – площадь криволинейной трапеции.

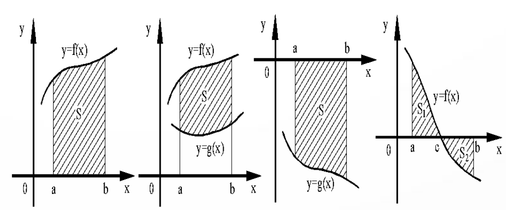


Рис. 1

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если фигура, площадь которой необходимо вычислить, ограничена сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу – графиком функции $y=g(x)$, а сбоку прямыми $x=a$ и $x=b$, то её площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b \left(f(x)-g(x)\right)dx \qquad \textbf{(2)}$$

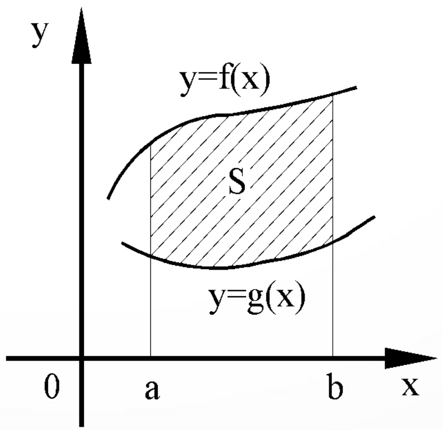


Рис. 2

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Частным случаем при этом является нахождение площади фигуры, ограниченной сверху осью Оx, снизу – графиком функции $y=g(x)$, а сбоку прямыми $x=a$ и $x=b$. В этом случае, в формулу (2) следует подставлять $f(x)=0$, тогда формула для вычисления площади такой фигуры примет вид:

$$S=-\int_a^b g(x)dx \qquad (3)$$

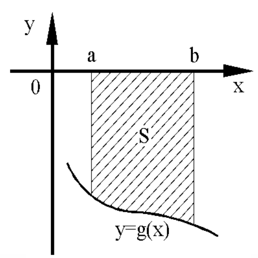


Рис. 3

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

В некоторых случаях, чтобы вычислить площадь искомой фигуры, необходимо разбить её на сумму или разность двух или более криволинейных трапеций.

$$S = S_1 + S_2 \qquad \textbf{(4)}$$

$$S_1 = \int_a^c f(x)dx \qquad S_2 = -\int_c^b f(x)dx$$

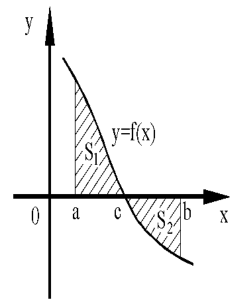


Рис. 4

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Пример 3 Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=2x^2$, $y=2$.

Решение.

1. Вершиной параболы $y=2x^2$ является точка (0;0).

2. Точки пересечения параболы и прямой находятся из системы

$$\begin{cases} y = 2x^2, \\ y = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2, \\ y = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1, \\ y = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1, \\ y = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = 2. \end{cases} \end{array} \right.$$

Мы получили две точки (1;2) и (–1;2).

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

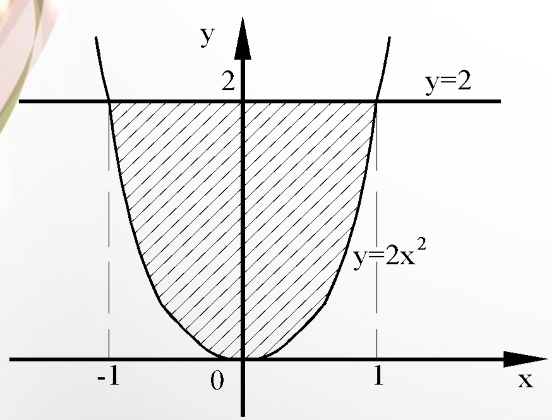
3. Используя найденные точки, строим графики заданных функций в декартовой системе координат.

4. Сверху фигура ограничена прямой $y=2$, значит $f(x)=2$, снизу – параболой, значит $g(x)=2x^2$. По графику видно, что $a=-1$, $b=1$ (**формула 2**).

1 способ

$$S=\int_a^b\bigl(f(x)-g(x)\bigr)dx=\int_{-1}^{1}\left(2-2x^2\right)dx=2\int_{-1}^{1}dx-2\int_{-1}^{1}x^2dx=2x\Big|_{-1}^{1}-2\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=2\bigl(1-(-1)\bigr)-\frac{2}{3}\left(1^3-(-1)^3\right)=2\cdot2-\frac{2}{3}\cdot2=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$



2 способ

$$S=2S_1=2\int_0^1\left(2-2x^2\right)dx=4\int_0^1dx-4\int_0^1x^2dx=$$

$$=4x\Big|_0^1-4\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=4(1-0)-\frac{4}{3}\left(1^3-0^3\right)=\frac{8}{3}=2\frac{2}{3}.$$

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Пример 4 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=x^2+x$, прямыми $x=-1$, $x=2$ и осью Оx.

Решение.

1. Вершиной параболы является точка (–0,5;–0,25).

Замечание: координаты вершины параболы $y=ax^2+bx+c$ ($a\neq 0$), находятся из системы

$$\begin{cases} x_0 = -\dfrac{b}{2a}, \\ y_0 = ax_0^2 + bx_0 + c. \end{cases}$$

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

2. Точка пересечения параболы и прямой $x = -1$ находится из системы:

$$\begin{cases} x = -1, \\ y = x^2 + x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = (-1)^2 + (-1), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1, \\ y = 0, \end{cases}$$

а с прямой находится из системы:

$$\begin{cases} x = 2, \\ y = x^2 + x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 4 + 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 6. \end{cases}$$

Точки пересечения параболы с осью Оx (y=0) находятся из системы:

$$\begin{cases} y = x^2 + x, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+1) = 0, \\ y = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1, \\ y = 0. \end{cases} \end{array} \right.$$

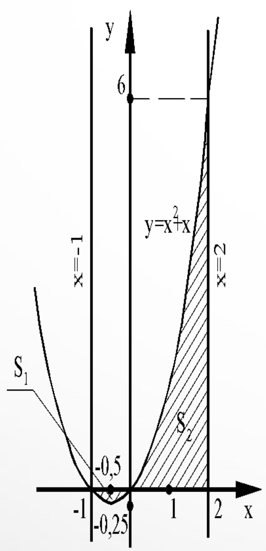
Мы получили точки (–1;0), (2;6), (0;0).

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

3. Используя найденные точки, строим графики заданных функций в декартовой системе координат.

4. Площадь искомой фигуры складывается из площадей S_1 (**формула 3**) и S_2 (**формула 1**).

$$S_1 = -\int_{-1}^{0}\left(x^2 + x\right)dx = -\int_{-1}^{0} x^2 dx - \int_{-1}^{0} x dx = -\left.\frac{x^3}{3}\right|_{-1}^{0} - \left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{0} = -\frac{1}{3}\cdot\left(0^3 - (-1)^3\right) - \frac{1}{2}\cdot\left(0^2 - (-1)^2\right) = \frac{1}{6},$$



$$S_2 = \int_{0}^{2}\left(x^2 - x\right)dx = \int_{0}^{2} x^2 dx + \int_{0}^{2} x dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_{0}^{2} + \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2^3 - 0^3\right) + \frac{1}{2}\left(2^2 - 0^2\right) = \frac{8}{3} + 2 = \frac{14}{3},$$

$$S = S_1 + S_2 = \frac{1}{6} + \frac{14}{3} = \frac{29}{6} = 4\frac{5}{6}.$$

Ответ: $4\frac{5}{6}$.

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если фигура, площадь которой необходимо вычислить, ограничена слева осью Оy, справа – графиком функции $x=f(y)$, а снизу и сверху прямыми $y=a$, $y=b$ соответственно, то её площадь вычисляется по формуле:

$$S = \int_a^b f(y)dy \qquad \textbf{(5)}$$

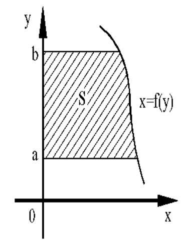


Рис. 5

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Если фигура, площадь которой необходимо вычислить, ограничена слева графиком функции $x=g(y)$, справа – графиком функции $x=f(y)$, а снизу и сверху прямыми $y=a$, $y=b$ соответственно, то её площадь вычисляется по формуле:

$$S=\int_a^b\left(f(y)-g(y)\right)dy \qquad (6)$$

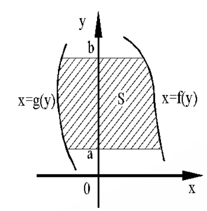


Рис. 6

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

Пример 5 Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x= -2y^2-1$, прямой $y= -1$ и осями координат.

Решение.

1. Вершиной параболы является точка (–1;0).

Замечание: координаты вершины параболы $x=ay^2+by+c$ ($a\neq 0$), находятся из системы

$$\begin{cases} y_0 = -\dfrac{b}{2a}, \\ x_0 = ax_0^2 + bx_0 + c. \end{cases}$$

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

2. Точка пересечения параболы и прямой y= –1 находится из системы:

$$\begin{cases} x=-2y^2-1, \\ y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\cdot(-1)^2-1, \\ y=-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3, \\ y=0, \end{cases}$$

с осью Оx (y=0):

$$\begin{cases} x=-2y^2-1, \\ y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2\cdot 0^2-1, \\ y=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1, \\ y=0, \end{cases}$$

с осью Оy (x=0):

$$\begin{cases} x=-2y^2-1, \\ x=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y^2-1=0, \\ x=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=-\dfrac{1}{2}, \\ y=0. \end{cases}$$

Так как последняя система не имеет решения, то точек пересечения с осью Оy не существует.

Мы получили точки (–3;0) и (–1;0).

3.2.3 Вычисление площадей плоских фигур в декартовой системе координат

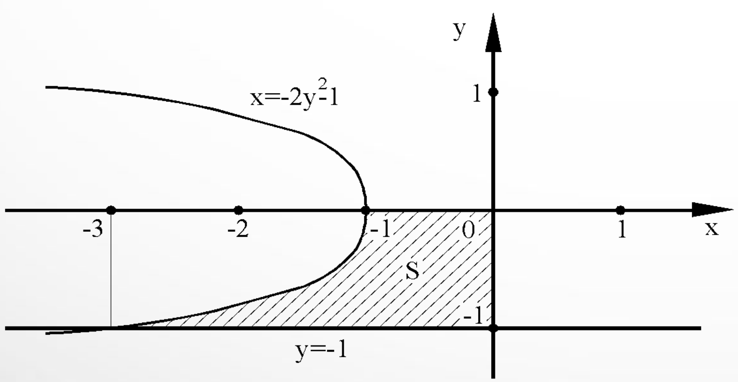
3. Используя найденные точки, строим графики заданных функций в декартовой системе координат.

4. Слева фигура ограничена параболой, справа – осью Оy, снизу – прямой $y=-1$, сверху – осью Оx.

Тогда $f(y)=0$, $g(y)=-2y^2-1$, $a=-1$, $b=0$ (**формула 6**).

$$S=\int_a^b \left(f(y)-g(y)\right)dy=\int_{-1}^{0}\left(0-\left(-2y^2-1\right)\right)dy=2\int_{-1}^{0} y^2dy+\int_{-1}^{0} dy=$$

$$=2\cdot\frac{y^3}{3}\Bigg|_{-1}^{0}+y\Bigg|_{-1}^{0}=\frac{2}{3}\cdot\left(0^3-(-1)^3\right)+0-(-1)=\frac{2}{3}+1=1\frac{2}{3}.$$



Ответ: $1\frac{2}{3}$.

3.3 Применение интегралов в экономике

Интегральное исчисление активно используется в экономике: степень неравенства в распределении доходов, задача дисконтирования денежного потока, вычисление выигрыша потребителей и выигрыша поставщиков от установленной равновесной цены на некоторый товар и т. п.

Предположим, что сама производственная функция $f(x)$ неизвестна, но известна её предельная величина $f'(x)$. Тогда при условии непрерывности справедливо равенство

$$f(x) = \int f'(x)dx + C$$

3.3 Применение интегралов в экономике

Пример 6 Функция предельных издержек некоторого предприятия имеет вид $C'(Q) = 60 - 0{,}04 \cdot Q + 0{,}003 \cdot Q^2$. Найти функцию издержек, если издержки производства Q=100 единиц продукции составляют 7000 у.е.

Решение.

$$C(Q) = \int C'(Q)dQ = \int \left(60 - 0{,}04 \cdot Q + 0{,}003 \cdot Q^2\right)dQ = 60 \cdot Q - 0{,}02 \cdot Q^2 +$$
$$+ 0{,}001 \cdot Q^3 + A.$$

Постоянную A найдём из условия $C(100)$=7000,
тогда $60 \cdot 100 - 0{,}02 \cdot 100^2 + 0{,}001 \cdot 100^3 + A = 7000$,
откуда получаем A=200.

Ответ: $C(Q) = 60 \cdot Q - 0{,}02 \cdot Q^2 + 0{,}001 \cdot Q^3 + 200$.

3.3 Применение интегралов в экономике

Пример 7 Найти стоимость перевозки M т груза по железной дороге на расстоянии L км при условии, что тариф y перевозки одной тонны убывает на a рублей на каждом последующем километре.

Решение.

Полагая, что тариф меняется непрерывно на протяжении L километров, то есть тариф является непрерывной функцией от l, где $l \in (0; L)$, стоимость перевозки M т груза по железной дороге на расстоянии L км можно выразить определённым интегралом:

$$M\int_0^L (y - al)dl = M\left(yl - \frac{al^2}{2} \right)\Bigg|_0^L = ML\left(y - \frac{aL}{2} \right) \text{ (руб.).}$$

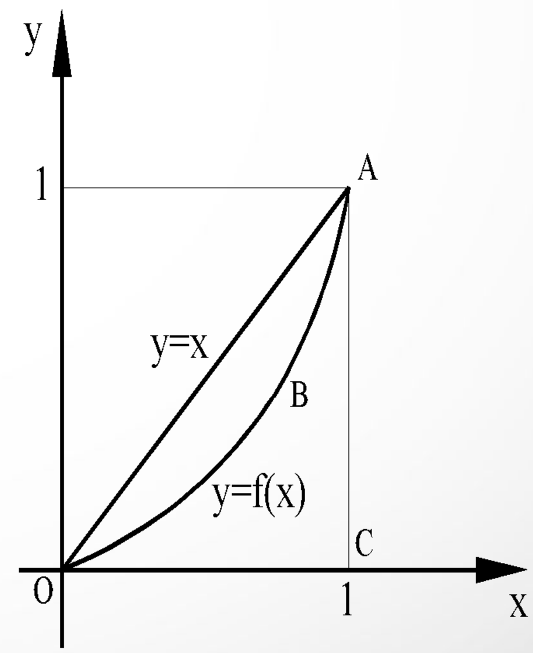
Ответ: $ML\left(y - \frac{aL}{2} \right)$ руб.

3.3 Применение интегралов в экономике

Рассмотрим функцию $y=f(x)$, характеризующую неравномерность распределения доходов среди населения, где y – доля совокупного дохода, получаемого долей x беднейшего населения. График этой функции называется **кривой Лоренца**. Очевидно, что $0 \le f(x) \le x$ при $x \in [0;1]$, и неравномерность распределения доходов тем больше, чем больше площадь фигуры OAB.

Мерой указанной неравномерности служит **коэффициент Джинни**

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}}$$



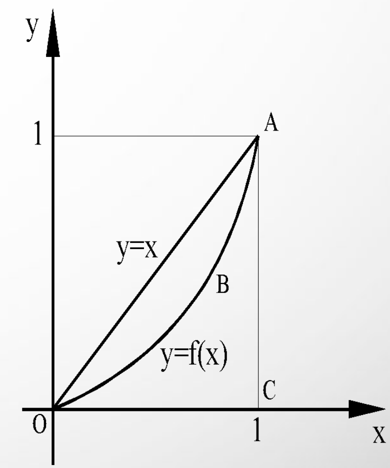
3.3 Применение интегралов в экономике

Пример 8 По данным исследований в распределении доходов одной из стран, кривая Лоренца может быть описана уравнением $y = \dfrac{3}{2-x} - \dfrac{5}{3}$, где x – доля населения, y – доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джинни, оценить распределение доходов 40% наиболее низко оплачиваемого населения.

Решение.

$$S_{OAB} = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{2-x} + \frac{5}{3} \right) dx = \frac{x^2}{2} + 3\ln|2-x| + \frac{5}{3}\cdot x \Big|_0^1 = \frac{1}{2} - 3\ln 2 + \frac{5}{3} =$$

$$= \frac{13}{6} - 3\ln 2 \approx 0{,}087.$$



3.3 Применение интегралов в экономике

Вычислим коэффициент Джинни:

$$k = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = \frac{0{,}087}{0{,}5} = 0{,}174.$$

$$y(0{,}4) = \frac{3}{2-0{,}4} - \frac{5}{3} = \frac{5}{24} \approx 0{,}21,$$

это означает, что 40% наиболее низко оплачиваемого населения получает 21% совокупного национального дохода.

Следует также отметить, что $y(0{,}2) = \frac{3}{2-0{,}2} - \frac{5}{3} = 0$, получается, что 20% населения не получают ничего.

Ответ: k=0,174; y(0,4)=0,21.

Спасибо за внимание!