23.03.20.

Тема:
Основы стереометрии.
Аксиомы.
Параллельность прямой и плоскости.

Учащиеся должны прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.

Теоретическая часть:

Прочитать.

Аксиомы, теоремы и определения (выделенное жирным шрифтом) – выучить.

Доказательства прочитать и понять.

1 Предмет стереометрии

Школьный курс геометрии состоит из двух частей: планиметрии и стереометрии. В планиметрии изучаются свойства геометрических фигур на плоскости. **Стереометрия — это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве.** Слово «стереометрия» происходит от греческих слов «стереос» — объемный, пространственный и «метрео» — измерять.

Простейшими и, можно сказать, основными фигурами в пространстве являются **точки, прямые** и **плоскости**. Наряду с этими фигурами мы будем рассматривать **геометрические тела** и их **поверхности**. Представление о геометрических телах дают окружающие нас предметы. Так, например, кристаллы имеют форму геометрических тел, поверхности которых составлены из многоугольников. Такие поверхности называются **многогранниками**. Одним из простейших многогранников является куб (рис. 1, *а*). Капли жидкости в невесомости принимают форму геометрического тела, называемого **шаром** (рис. 1, *б*). Такую же форму имеет футбольный мяч. Консервная банка имеет форму геометрического тела, называемого **цилиндром** (рис. 1, *в*).

В отличие от реальных предметов геометрические тела, как и всякие геометрические фигуры, являются воображаемыми объектами. Мы представляем геометрическое тело как часть пространства, отделенную от остальной части пространства поверхностью — **границей** этого тела. Так, например, граница шара есть **сфера**, а граница цилиндра состоит из двух кругов — оснований цилиндра и боковой поверхности.

а) Куб

б) Шар

в) Цилиндр

Рис. 1

§ 3 Параллельность плоскостей

10 Параллельные плоскости

Мы знаем, что если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой (аксиома A_3). Отсюда следует, что **две плоскости либо пересекаются по прямой** (рис. 28, *а*), **либо не пересекаются, т. е. не имеют ни одной общей точки** (рис. 28, *б*).

Определение

Две плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются.

Представление о параллельных плоскостях дают пол и потолок комнаты, две противоположные стены, поверхность стола и плоскость пола.

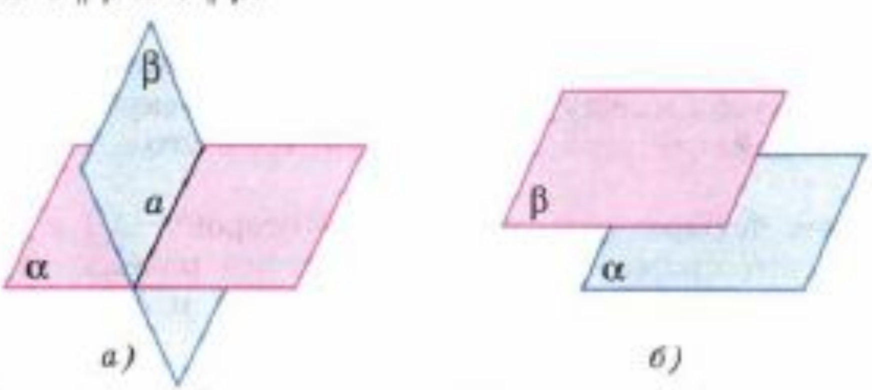
Параллельность плоскостей α и β обозначается так: $\alpha \parallel \beta$. Рассмотрим признак параллельности двух плоскостей.

Теорема

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Доказательство

Рассмотрим две плоскости α и β (рис. 29). В плоскости α лежат пересекающиеся в точке M прямые a и b, а в плоскости β — прямые a_1 и b_1, причем $a \parallel a_1$ и $b \parallel b_1$. Докажем, что $\alpha \parallel \beta$. Прежде всего отметим, что по признаку параллельности прямой и плоскости $a \parallel \beta$ и $b \parallel \beta$.



Плоскости α и β пересекаются   Плоскости α и β параллельны

Рис. 28

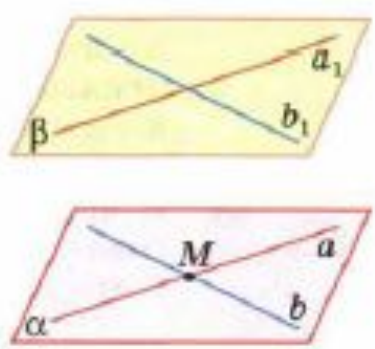
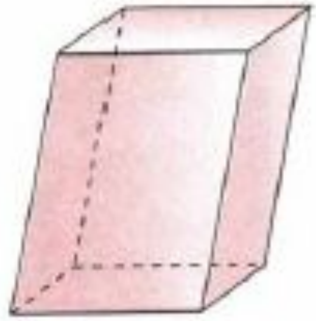


Рис. 29

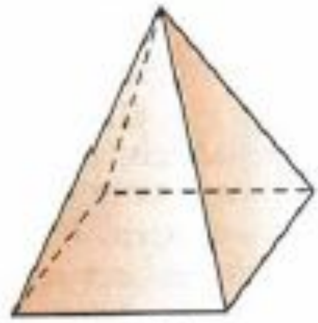
Изучая свойства геометрических фигур — воображаемых объектов, мы получаем представление о геометрических свойствах реальных предметов (их форме, взаимном расположении и т. д.) и можем использовать эти свойства в практической деятельности. В этом состоит практическое (прикладное) значение геометрии. Геометрия, в частности стереометрия, широко используется в строительном деле, архитектуре, машиностроении, геодезии, во многих других областях науки и техники.

При изучении пространственных фигур, в частности геометрических тел, пользуются их изображениями на чертеже. Как правило, изображением пространственной фигуры служит ее проекция на ту или иную плоскость. Одна и та же фигура допускает различные изображения. Обычно выбирается то из них, которое создает правильное представление о форме фигуры и наиболее удобно для исследования ее свойств. На рисунках 2, *а*, *б* изображены два многогранника — **параллелепипед** и **пирамида**, а на рисунке 2, *в* — **конус**. При этом невидимые части этих фигур изображены штриховыми линиями. Правила изображения пространственных фигур приведены в приложении 1.

В течение двух лет мы будем изучать взаимное расположение прямых и плоскостей, многогранники, векторы и метод координат в пространстве, «круглые» геометрические тела — цилиндр, конус, шар и рассмотрим вопрос об объемах тел.



а)
Параллелепипед



б)
Пирамида

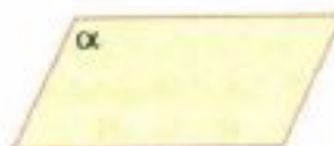
в)
Конус

Рис. 2

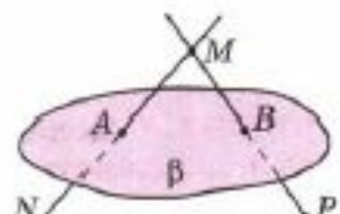
2 Аксиомы стереометрии

В планиметрии основными фигурами были точки и прямые. В стереометрии наряду с ними рассматривается еще одна основная фигура — **плоскость**. Представление о плоскости дает гладкая поверхность стола или стены. Плоскость как геометрическую фигуру следует представлять себе простирающейся неограниченно во все стороны.

Как и ранее, точки будем обозначать прописными латинскими буквами A, B, C и т. д., а прямые — строчными латинскими буквами a, b, c и т. д. или двумя прописными латинскими буквами AB, CD и т. д. Плоскости будем обозначать греческими буквами α, β, γ и т. д. На рисунках плоскости изображаются в виде параллелограмма (рис. 3, *а*) или в виде произвольной области (рис. 3, *б*).



а)



б)

Рис. 3

Ясно, что в каждой плоскости лежат какие-то точки пространства, но не все точки пространства лежат в одной и той же плоскости. На рисунке 3, *б* точки A и B лежат в плоскости β (плоскость β проходит через эти точки), а точки M, N, P не лежат в этой плоскости. Коротко это записывают так: $A \in \beta$, $B \in \beta$, $M \notin \beta$, $N \notin \beta$, $P \notin \beta$.

Основные свойства точек, прямых и плоскостей, касающиеся их взаимного расположения, выражены в аксиомах. Вся система аксиом стереометрии состоит из ряда аксиом, большая часть которых нам знакома по курсу планиметрии. Полный список аксиом и некоторые следствия из них приведены в приложении 2. Здесь мы сформулируем лишь три аксиомы о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей в пространстве. Ниже они обозначены $\mathbf{A_1}$, $\mathbf{A_2}$, $\mathbf{A_3}$.

$\mathbf{A_1}$

Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.

Иллюстрацией к этой аксиоме может служить модель, изображенная на рисунке 4. Плоскость, проходящую через точки A, B и C, не лежащие на одной прямой, иногда называют плоскостью ABC.

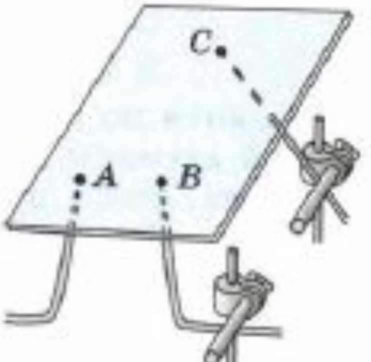


Иллюстрация к аксиоме $\mathbf{A_1}$: пластинка поддерживается тремя точками A, B и C, не лежащими на одной прямой

Рис. 4

Отметим, что если взять не три, а четыре произвольные точки, то через них может не проходить ни одна плоскость. Иначе говоря, четыре точки могут не лежать в одной плоскости. Каждый знаком с таким наглядным подтверждением этого факта: если ножки стула не одинаковые по длине, то стул стоит на трех ножках, т. е. опирается на три «точки», а конец четвертой ножки (четвертая «точка») не лежит в плоскости пола, а висит в воздухе.

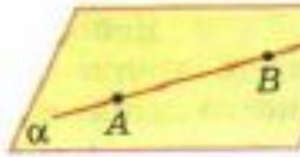
$\mathbf{A_2}$

Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости*.

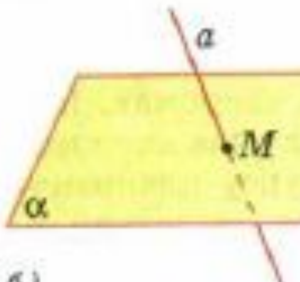
В таком случае говорят, что **прямая лежит в плоскости** или **плоскость проходит через прямую** (рис. 5, *а*).

Свойство, выраженное в аксиоме A_2, используется для проверки «ровности» чертежной линейки. С этой целью линейку прикладывают краем к плоской поверхности стола. Если край линейки ровный (прямолинейный), то он всеми своими точками прилегает к поверхности стола. Если край неровный, то в каких-то местах между ним и поверхностью стола образуется просвет.

Из аксиомы A_2 следует, что если прямая не лежит в данной плоскости, то она имеет с ней не более одной общей точки. Если прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то говорят, что они **пересекаются** (рис. 5, *б*).



а)
Прямая *AB* лежит в плоскости α



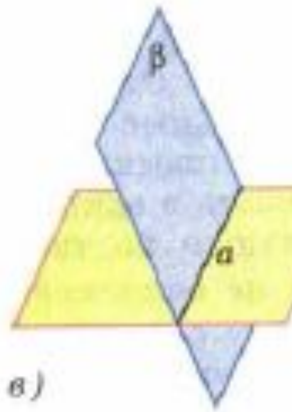
б)
Прямая *a* и плоскость пересекаются в точ

A_3

Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей.

В таком случае говорят, что **плоскости пересекаются по прямой** (рис. 5, *в*). Наглядной иллюстрацией аксиомы A_3 является пересечение двух смежных стен, стены и потолка классной комнаты.

Прежде чем перейти к первым следствиям из данных аксиом, отметим одно важное обстоятельство, которым будем пользоваться в дальнейшем. В пространстве существует бесконечно много плоскостей, и в каждой плоскости справедливы все аксиомы и теоремы планиметрии. Более того, признаки равенства и подобия треугольников, известные из курса планиметрии, справедливы и для треугольников, расположенных в разных плоскостях (см. приложение 2).



в)
Плоскости α и β п каются по прямой

Рис. 5

3 Некоторые следствия из аксиом

Теорема

Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямую a и не лежащую на ней точку M (рис. 6). Докажем, что через прямую a и точку M проходит плоскость. Отметим на прямой a две точки P и Q. Точки M, P и Q не лежат на одной прямой, поэтому согласно аксиоме A_1 через эти точки проходит некоторая плоскость α. Так как две точки прямой a (P и Q) лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую a.

Рис. 6

Единственность плоскости, проходящей через прямую a и точку M, следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямую a и точку M, проходит через точки M, P и Q. Следовательно, эта плоскость совпадает с плоскостью α, так как по аксиоме A_1 через точки M, P и Q проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

Теорема

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямые a и b, пересекающиеся в точке M (рис. 7), и докажем, что через эти прямые проходит плоскость, и притом только одна.

Отметим на прямой b какую-нибудь точку N, отличную от точки M, и рассмотрим плоскость α, проходящую через точку N и прямую a. Так как две точки прямой b лежат в плоскости α, то по аксиоме A_2 плоскость α проходит через прямую b. Итак, плоскость α проходит через прямые a и b. Единственность такой плоскости следует из того, что любая плоскость, проходящая через прямые a и b, проходит через точку N. Следовательно, она совпадает с плоскостью α, поскольку через точку N и прямую a проходит только одна плоскость. Теорема доказана.

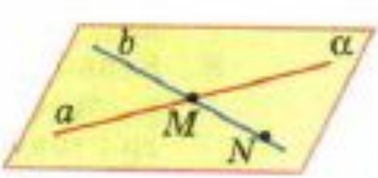


Рис. 7

4 Параллельные прямые в пространстве

Введем понятие параллельных прямых в пространстве.

Определение

Две прямые в пространстве называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$. На рисунке 10 прямые a и b параллельны, а прямые a и c, a и d не параллельны.

Докажем теорему о параллельных прямых.

Теорема

Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.

Доказательство

Рассмотрим прямую a и точку M, не лежащую на этой прямой (рис. 11). Через прямую a и точку M проходит плоскость, и притом только одна (п. 3). Обозначим эту плоскость буквой α. Прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a, должна лежать в одной плоскости с точкой M и прямой a, т. е. должна лежать в плоскости α. Но в плоскости α, как известно из курса планиметрии, через точку M проходит прямая, параллельная прямой a, и притом только одна. На рисунке 11 эта прямая обозначена буквой b. Итак, b — единственная прямая, проходящая через точку M параллельно прямой a. Теорема доказана.

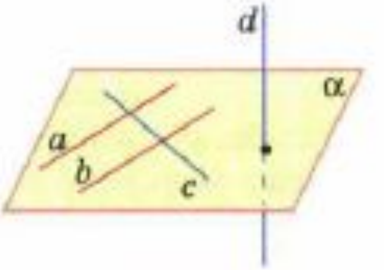


Рис. 10

В дальнейшем нам понадобятся также понятия параллельных отрезков, параллельных отрезка и прямой, параллельных лучей. Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых. Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой, а также параллельность двух лучей.

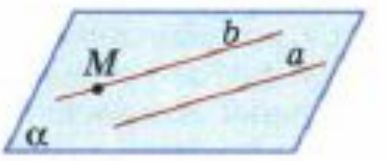


Рис. 11

5 Параллельность трех прямых

Докажем лемму о пересечении плоскости параллельными прямыми, необходимую для дальнейшего изложения.

Лемма

Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.

Теорема

Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны.

Доказательство

Пусть $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Докажем, что $a \parallel b$. Для этого нужно доказать, что прямые a и b: 1) лежат в одной плоскости и 2) не пересекаются.

1) Отметим какую-нибудь точку K на прямой b и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямую a и точку K (рис. 14). Докажем, что прямая b лежит в этой плоскости. Действительно, если допустить, что прямая b пересекает плоскость α, то по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая c также пересекает плоскость α. Но так как прямые a и c параллельны, то и прямая a пересекает плоскость α, что невозможно, ибо прямая a лежит в плоскости α.

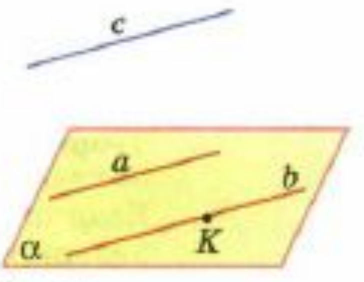


Рис. 14

2) Прямые a и b не пересекаются, так как в противном случае через точку их пересечения проходили бы две прямые (a и b), параллельные прямой c, что невозможно. Теорема доказана.

6 Параллельность прямой и плоскости

Если две точки прямой лежат в данной плоскости, то согласно аксиоме A_2 вся прямая лежит в этой плоскости. Отсюда следует, что **возможны три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве**:

а) **прямая лежит в плоскости** (см. рис. 5, *а*);

б) **прямая и плоскость имеют только одну общую точку, т. е. пересекаются** (см. рис. 5, *б*);

в) **прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки.**

Определение

Прямая и плоскость называются **параллельными**, если они не имеют общих точек.

Параллельность прямой a и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$.

Теорема

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Доказательство

Рассмотрим плоскость α и две параллельные прямые a и b, расположенные так, что прямая b лежит в плоскости α, а прямая a не лежит в этой плоскости (рис. 15, *б*). Докажем, что $a \parallel \alpha$.

Допустим, что это не так. Тогда прямая a пересекает плоскость α, а значит, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми прямая b также пересекает плоскость α. Но это невозможно, так как прямая b лежит в плоскости α. Итак, прямая a не пересекает плоскость α, поэтому она параллельна этой плоскости. Теорема доказана.

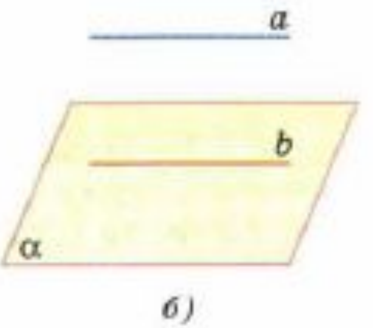


Рис. 15

Следствия:

1°. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

2°. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

Практическая часть.

1 По рисунку 8 назовите: а) плоскости, в которых лежат прямые PE, MK, DB, AB, EC; б) точки пересечения прямой DK с плоскостью ABC, прямой CE с плоскостью ADB; в) точки, лежащие в плоскостях ADB и DBC; г) прямые, по которым пересекаются плоскости ABC и DCB, ABD и CDA, PDC и ABC.

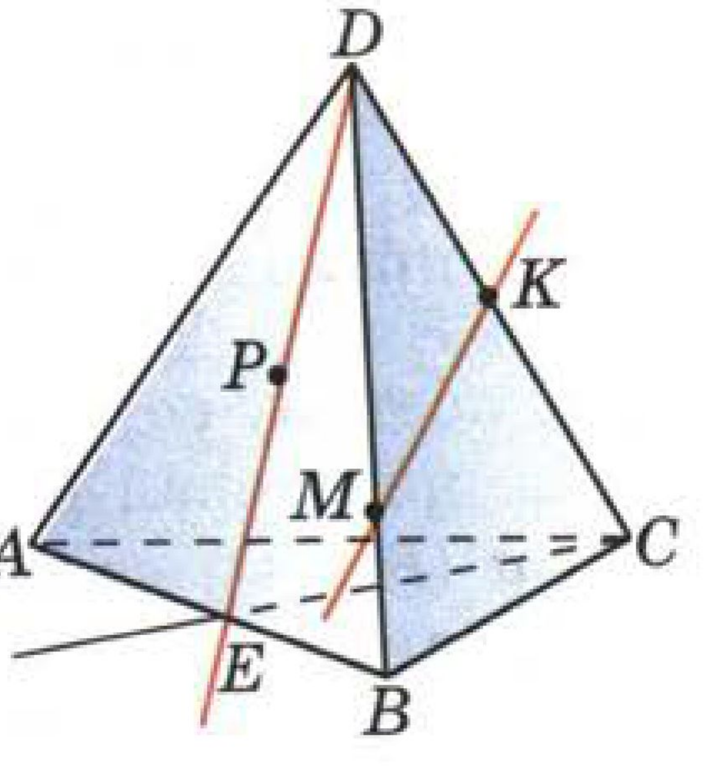


Рис. 8

3 Верно ли, что: а) любые три точки лежат в одной плоскости; б) любые четыре точки лежат в одной плоскости; в) любые четыре точки не лежат в одной плоскости; г) через любые три точки проходит плоскость, и притом только одна?

8 Верно ли утверждение: а) если две точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости; б) если три точки окружности лежат в плоскости, то и вся окружность лежит в этой плоскости?

10 Верно ли, что прямая лежит в плоскости данного треугольника, если она: а) пересекает две стороны треугольника; б) проходит через одну из вершин треугольника?

17 На рисунке 17 точки M, N, Q и P — середины отрезков DB, DC, AC и AB. Найдите периметр четырехугольника $MNQP$, если $AD = 12$ см, $BC = 14$ см.

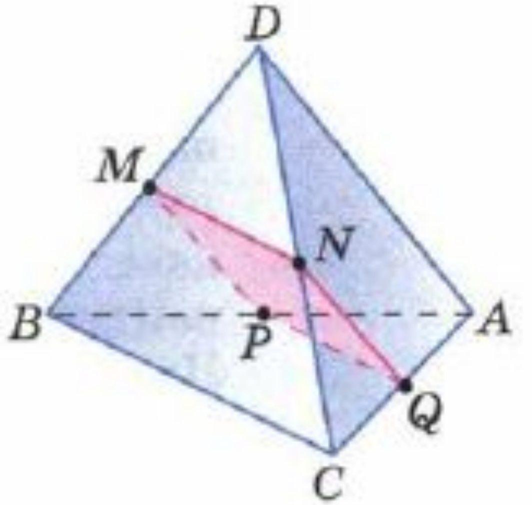


Рис. 17

Указание к №17: Используете свойства средней линии треугольника.