Опр. $y=f(x)$, опред. на X с мн-вом значений Y. Если $y=f(x)$ задаёт вз.-одн. соответствие между X и Y ($X \leftrightarrow Y$), то функция $x=\varphi(y)$, опред. на Y по закону $\varphi(y)=x : f(x)=y$, назыв. обратной функцией. (f^{-1})

Т.10. $y=f(x)$ непр. и строго монот. на (a,b); $m=\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. $\Rightarrow$ на (m,M) $\exists$ обратная ф-я $x=\varphi(y)$ – непр. и строго монот.

Здесь м. быть: $a=-\infty$, $b=+\infty$; $m=-\infty$, $M=+\infty$.

Д-во т.10. Пусть $f(x)$ строго возрастает. $f(x)$ непр. на $(a,b) \Rightarrow \forall y_0\in(m,M)\ \exists x_0\in(a,b)$: $f(x_0)=y_0$; $x \gtrless x_0 \Rightarrow f(x)\gtrless f(x_0)$, т.е. если $x\neq x_0$, то $f(x)\neq f(x_0)$. $\forall y_0\in(m,M)\ \exists$ и ед. $x_0\in(a,b)$: $f(x_0)=y_0$, т.е. $X\leftrightarrow Y$ $\big((a,b)\leftrightarrow(m,M)\big) \Rightarrow$ $\exists$ обратная ф-я $x=\varphi(y)$, $y\in(m,M)$ $\big(x_0=\varphi(y_0) : y_0=f(x_0)\big)$. $\forall y_1, y_2\in(m,M)$: $y_1<y_2$. $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2) \Rightarrow x_1<x_2$, т.е. $\varphi(y_1)<\varphi(y_2) \Rightarrow$ обр. ф-я строго возр. $x=\varphi(y)$ принимает $\forall$ значение на (a,b), т.к. $\forall \tilde{x}\in(a,b)\ \exists \tilde{y}=f(\tilde{x})$, т.е. $\tilde{x}=\varphi(\tilde{y})$ для нек-го $\tilde{y}\in(m,M) \Rightarrow$ (т.9) $x=\varphi(y)$ непрер.

Теор. доказана

Опр. $y=f(x)$, опред. на X с мн-вом значений Y. Если $y=f(x)$ задаёт вз.-одн. соответствие между X и Y ($X \leftrightarrow Y$), то функция $x=\varphi(y)$, опред. на Y по закону $\varphi(y)=x: f(x)=y$, назыв. обратной функцией. (f^{-1})

Т.10. $y=f(x)$ непр. и строго монот. на (a,b); $m=\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, $M=\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$. $\Rightarrow$ на (m,M) $\exists$ обратная ф-я $x=\varphi(y)$ – непр. и строго монот.

Здесь м. быть: $a=-\infty$, $b=+\infty$; $m=-\infty$, $M=+\infty$.

Точки разрыва и их классификация

Опр. $f(x)$ опред. в прок. окр. x_0 (т.е. $\exists \tilde{\delta}>0$: $f(x)$ опред. $\forall x: 0<|x-x_0|<\tilde{\delta}$). Если $f(x)$ не явл. непрер. при $x=x_0$, то x_0 – т. разрыва.

Опр. x_0 – т. разрыва $f(x)$. x_0 – т. разрыва 1-го рода, если $\exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Остальные т. разрыва – т. разрыва 2-го рода.

Опр. x_0 – т. разрыва 1-го рода для $f(x)$. x_0 – точка устранимого разрыва, если $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$; иначе – т. неустран. разрыва.

Д-во т.10. Пусть $f(x)$ строго возрастает. $f(x)$ непр. на $(a,b) \Rightarrow \forall y_0\in(m,M)\ \exists x_0\in(a,b)$: $f(x_0)=y_0$; $x \gtrless x_0 \Rightarrow f(x)\gtrless f(x_0)$, т.е. если $x\neq x_0$, то $f(x)\neq f(x_0)$. $\forall y_0\in(m,M)\ \exists$ и ед. $x_0\in(a,b)$: $f(x_0)=y_0$, т.е. $X\leftrightarrow Y$ $\big((a,b)\leftrightarrow(m,M)\big) \Rightarrow$ $\exists$ обратная ф-я $x=\varphi(y)$, $y\in(m,M)$ $\big(x_0=\varphi(y_0): y_0=f(x_0)\big)$. $\forall y_1,y_2\in(m,M)$: $y_1<y_2$. $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2) \Rightarrow x_1<x_2$, т.е. $\varphi(y_1)<\varphi(y_2) \Rightarrow$ обр. ф-я строго возр. $x=\varphi(y)$ принимает $\forall$ значение на (a,b), т.к. $\forall \tilde{x}\in(a,b)\ \exists \tilde{y}=f(\tilde{x})$, т.е. $\tilde{x}=\varphi(\tilde{y})$ для нек-го $\tilde{y}\in(m,M) \Rightarrow$ (т.9) $x=\varphi(y)$ непрер.

Теор. доказана

Опр. x_0 – т. разрыва 2-го рода для $f(x)$. x_0 – точка бесконечного разрыва, если или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$.

Элементарные функции

$y=c$ непр. на $(-\infty,+\infty)$

$y=x$ непр. на $(-\infty,+\infty)$

$y=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$, $y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n$

— непр. на $(-\infty,+\infty)$

$y=x^n$ $(n\in\mathbb{N})$ рассмотрим на $[0,+\infty)$

она непрер. и строго возр. $X=[0,+\infty)$

$Y=[0,+\infty)$. Поэтому на $[0,+\infty)$ есть обр.

ф-я $(x=\sqrt[n]{y})$ — тоже непр. и строго возр.

Обозначим $y=\sqrt[n]{x}$

Об экспоненте $(y=e^x=\exp(x))$

$e^0=1$. $x\in\mathbb{N}$, $e^x=\underbrace{e\cdot e\cdot\ldots\cdot e}_{x\text{ раз}}$.

x: $-x\in\mathbb{N}$, $e^x=\dfrac{1}{e^{-x}}$.

$x=\dfrac{p}{q}$, $p\in\mathbb{Z}$, $q\in\mathbb{N}$ $\quad e^x=e^{\frac{p}{q}}=\sqrt[q]{e^p}$,

можно д-ть, что это $(\sqrt[q]{e})^p$ с известными св-вами

Итак, $y=e^x$ опред. $\forall x\in\mathbb{Q}$, причём

$x_1<x_2\Rightarrow e^{x_1}<e^{x_2}$. Действ.,

$$e^{x_2}-e^{x_1}=\underbrace{e^{x_1}}_{>0}(\underbrace{e^{x_2-x_1}}_{>1}-1)>0$$

$x\in\mathbb{R}$. $\forall x\in\mathbb{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\exists\, x^-,x^+\in\mathbb{Q}$:

$$x^-\le x\le x^+,\quad x^+-x^-=\frac{1}{10^n}$$

$e^x\equiv\sup\{e^{x^-}\}$. Можно д-ть, что это $\inf\{e^{x^+}\}$.

Также можно д-ть, что при этом св-ва показат. ф-ии сохранятся и e^x на $(-\infty,+\infty)$ будет строго возрастать.

$$e^n>n\Rightarrow\sup_{x\in\mathbb{R}}\{e^x\}=+\infty$$

$$\left.\begin{aligned}e^{-n}<\frac{1}{n}&\Rightarrow\inf_{x\in\mathbb{R}}\{e^x\}\le 0\\ e^x>0&\Rightarrow\inf_{x\in\mathbb{R}}\{e^x\}\ge 0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\inf_{x\in\mathbb{R}}\{e^x\}=0$$

$e^x=\exp(x)$ — непрер. на $(-\infty,+\infty)$ (?)

$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$. $\sqrt[n]{e}\downarrow 1$, $\sqrt[n]{\frac{1}{e}}\uparrow 1$, $\Rightarrow$

$\forall\varepsilon>0$ $\exists N:\forall n>N$

$$1<\sqrt[n]{e}<1+\frac{\varepsilon}{e^{x_0}},\quad 1-\frac{\varepsilon}{e^{x_0}}<\sqrt[n]{\frac{1}{e}}<1$$

$\exists\delta=\dfrac{1}{N+1}>0:\forall x,\ |x-x_0|<\delta$,

т.е. $x_0-\dfrac{1}{N+1}<x<x_0+\dfrac{1}{N+1}\Rightarrow$

$$e^{x_0}-\varepsilon<e^{x_0}\cdot\sqrt[N+1]{\frac{1}{e}}=e^{x_0}\cdot e^{-\frac{1}{N+1}}<e^x<e^{x_0}\cdot e^{\frac{1}{N+1}}=e^{x_0}\cdot\sqrt[N+1]{e}<e^{x_0}+\varepsilon,$$

т.е. $y=e^x$ непр. на $X=(-\infty,+\infty)$, и строго возр

$Y=(0,+\infty)$. На Y есть обратная ф-я, которая непр. и строго возр. Это $x=\ln y$. $y=\ln x$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = \ln\left(\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1$$

$u = \ln(1+x)$, $x = e^u - 1$, $x\to 0 \Leftrightarrow u\to 0$, причём

$$x\neq 0 \Leftrightarrow u\neq 0$$

$$1 = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{e^u-1}, \text{ т.е. } \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

$e^x - 1 \sim x$, т.е. $e^x - 1 - x = \bar{\bar{o}}(x)$, $e^x = 1 + x + \bar{\bar{o}}(x)$

$\ln(1+x)\sim x$, т.е. $\ln(1+x) - x = \bar{\bar{o}}(x)$, $\ln(1+x) = x + \bar{\bar{o}}(x)$

Св-ва 4 и 5 эквив. беск. малых установлены

Опр. Основными элементарными функциями называются:

1. $y = c = const$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

2. $y = x$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

3. $y = x^{\mu}$ $\quad$ ($x \in (-\infty, +\infty)$ при $\mu \in \mathbb{N}$,
$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ при $-\mu \in \mathbb{N}_0$,
$x \in [0, +\infty)$ при ост. $\mu > 0$
$x \in (0, +\infty)$ при ост. $\mu < 0$)

4. $y = a^{x}$, $a > 0$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

5. $y = \log_a x$; $a > 0, a \neq 1$ $\quad (0 < x < +\infty)$

6. $y = \sin x$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

7. $y = \cos x$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

8. $y = tg\, x$ $\quad (x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z})$

9. $y = ctg\, x$ $\quad (x \neq \pi n, n \in \mathbb{Z})$

10. $y = \arcsin x$ $\quad (-1 \leq x \leq 1)$

11. $y = \arccos x$ $\quad (-1 \leq x \leq 1)$

12. $y = arctg\, x$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

13. $y = arcctg\, x$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$

Опр. Основными элементарными функциями называются:

1. $y = c = \text{const}$ $\quad(-\infty < x < +\infty)$

2. $y = x$ $\quad(-\infty < x < +\infty)$

3. $y = x^\mu$ $\quad$ ($x \in (-\infty, +\infty)$ при $\mu \in \mathbb{N}$,
$x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ при $-\mu \in \mathbb{N}_0$,
$x \in [0, +\infty)$ при ост. $\mu > 0$
$x \in (0, +\infty)$ при ост. $\mu < 0$)

4. $y = a^x,\ a > 0$ $\quad(-\infty < x < +\infty)$

5. $y = \log_a x;\ a > 0, a \neq 1$ $\quad(0 < x < +\infty)$

6. $y = \sin x$ $\quad(-\infty < x < +\infty)$.

7. $y = \cos x$ $\quad(-\infty < x < +\infty)$

8. $y = \operatorname{tg} x$ $\quad(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$

9. $y = \operatorname{ctg} x$ $\quad(x \neq \pi n,\ n \in \mathbb{Z})$

10. $y = \arcsin x$ $\quad(-1 \leq x \leq 1)$

11. $y = \arccos x$ $\quad(-1 \leq x \leq 1)$

12. $y = \operatorname{arctg} x$ $\quad(-\infty < x < +\infty)$

13. $y = \operatorname{arcctg} x$ $\quad(-\infty < x < +\infty)$

Установим их непрерывность.

1, 2 – уже установлено

3. $y = x^\mu,\ \mu \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ – верно

$\mu = 0 \quad y = 1\ \forall x \neq 0$ – непр.

$x^\mu = e^{\mu \ln x}$ (при $\mu > 0$ – непр. справа при $x = 0$)

4. $y = a^x = e^{x \ln a}$ – непрер.

5. $y = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ – непрер.

6. $y = \sin x,\ \forall x_0 \in (-\infty, +\infty)$

$\underline{\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \varepsilon > 0}\ \underline{\forall x,\ |x - x_0| < \delta(= \varepsilon) \Rightarrow}$

$\underline{|\sin x - \sin x_0|} = \left|2 \sin \frac{x - x_0}{2} \cdot \cos \frac{x + x_0}{2}\right| \leq$

$\leq 2 \cdot \left|\frac{x - x_0}{2}\right| \cdot 1 = |x - x_0| < \delta = \underline{\varepsilon}$,

т.е. непрер.

7. $y = \cos x$ – самостоятельно

8. $y = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ – непрер.

9. $y = \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ – непрер.

10. Возьмём $y = \sin x,\ x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ф-я непр. и строго возр., $Y = [-1, 1] \Rightarrow$ на $[-1, 1]$ опред. обратная функция, которая непрер. и строго возр. $x = \arcsin y$ $\quad(y = \arcsin x)$

11, 12, 13 – самостоятельно

Опр. Элементарные функции — функции, полученные из основных элементарных путём конечного числа арифмет. операций и взятия функции от функции.

Например, $|x| = \sqrt{x^2}$

Элементарные функции непрерывны в своей обл. опред.

$y = \operatorname{sgn} x$ — неэлементарная

(не путать с $y = \frac{|x|}{x} = \frac{\sqrt{x^2}}{x}$ — элем. ф-я)

$y = \chi(x)$ — неэлементарная функция.