Решение краевых задач
для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

Краевые задачи для ОДУ второго порядка

$y(x)$ $y''(x)$ дважды непрерывно дифференцируемая функция

$$\begin{cases} y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), & a < x < b \\ y(a) = y_a, & x = a \\ y(b) = y_b, & x = b \end{cases}$$

линейное неоднородное ОДУ 2-го порядка

Принципиальным отличием краевой задачи от задачи Коши для ОДУ является задание дополнительных (краевых или граничных) условий более чем в одной точке независимой переменной (в задаче Коши дополнительные условия задаются в одной точке, называемой начальной).

Если на границах x = a и x = b заданы значения искомой функции y(a), y(b), то такие условия называются граничными условиями первого рода, а задача называется первой краевой задачей для ОДУ.

Краевые задачи для ОДУ второго порядка

$$\begin{cases} y'(a) = y_a \\ y'(b) = y_b \end{cases}$$

граничные условия 2 рода
Вторая краевая задача

Если на границах заданы линейные комбинации искомой функции и ее первой производной:

$$\begin{cases} y'(a) + \alpha y(a) = y_a \\ y'(b) + \beta y(b) = y_b \end{cases}$$

граничные условия 3 рода
Третья краевая задача

Чаще всего на разных границах задаются граничные условия различных родов. Такие задачи называют краевыми задачами со смешанными краевыми условиями.

Конечно-разностный метод

$$\omega_h = \{x_i = ih, \quad i = 0 \ldots n\}$$

конечно-разностная сетка с шагом h

$$y_i' = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + O(h^2), \quad i = 1 \ldots n-1$$

$$y_i'' = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + O(h^2), \quad i = 1 \ldots n-1$$

$$p_i = p(x_i), \quad q_i = q(x_i), \quad f_i = f(x_i), \quad i = 1 \ldots n-1$$

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i = f_i + O(h^2), \quad i = 1 \ldots n-1$$

$$y_0 = y_a, \quad i = 0$$

$$y_n = y_b, \quad i = n$$

$$a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, \quad i = 1 \ldots n-1$$

СЛАУ с трехдиагональной матрицей:

$$a_i = \frac{1}{h^2} - \frac{p_i}{2h} \qquad b_i = -\frac{2}{h^2} + q_i \qquad c_i = \frac{1}{h^2} + \frac{p_i}{2h} \qquad d_i = f_i$$

Результирующая система линейных уравнений
Метод прогонки

$$\begin{cases} b_1 y_1 + c_1 y_2 = d_1 - a_1 y_a \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_i y_{i-1} + b_i y_i + c_i y_{i+1} = d_i, \quad i = 2 \ldots n-2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n-1} y_{n-2} + b_{n-1} y_{n-1} = d_{n-1} - c_{n-1} y_b \end{cases}$$

Прогоночные коэффициенты в прямом ходе определяются с помощью выражений

$$A_1 = -\frac{c_1}{b_1} \qquad B_1 = \frac{d_1}{b_1}$$

$$A_i = \frac{-c_i}{b_i + a_i A_{i-1}} \quad B_i = \frac{d_i - a_i B_{i-1}}{b_i + a_i A_{i-1}} \qquad i = 2 \ldots n-2$$

$$A_{n-1} = 0 \qquad B_{n-1} = \frac{d_{n-1} - a_{n-1} B_{n-2}}{b_{n-1} + a_{n-1} A_{n-2}}$$

Обратный ход метода прогонки

$$y_i = A_i y_{i+1} + B_i \qquad i = n-1, n-2 \ldots 1$$

Схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий, содержащих производные

$$y_1 = y(x_0 + h) = y_0 + y_0'h + y_0''\frac{h^2}{2} + O(h^3)$$

$$y_0'' = f_0 - p_0 y_0' - q_0 y_0$$

$$y_0' = \frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2}(f_0 - p_0 y_0' - q_0 y_0) + O(h^2)$$

$$y_0' = \frac{2}{2 - p_0 h}\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2 - p_0 h}(f_0 - q_0 y_0) + O(h^2)$$

Схема со вторым порядком аппроксимации краевых условий, содержащих производные

$$y'(a) + \alpha y(a) = y_a$$

$$\frac{2}{2 - p_0 h}\frac{y_1 - y_0}{h} - \frac{h}{2 - p_0 h}(f_0 - q_0 y_0) + \alpha y_0 = y_a + O(h^2)$$

$$b_0 y_0 + c_0 y_1 = d_0$$

$$b_0 = -\frac{2}{h(2 - p_0 h)} + \frac{q_0 h}{2 - p_0 h} + \alpha \qquad c_0 = \frac{2}{h(2 - p_0 h)} \qquad d_0 = y_a + \frac{h f_0}{2 - p_0 h}$$

$$y'(b) + \beta y(b) = y_b$$

$$a_n y_{n-1} + b_n y_n = d_n$$

$$a_n = -\frac{2}{h(2 + p_n h)} \qquad b_n = \frac{2}{h(2 + p_n h)} - \frac{q_n h}{2 + p_n h} + \beta \qquad d_n = y_b - \frac{h f_n}{2 + p_n h}$$

Система из n+1 уравнения с трехдиагональной матрицей
Можно применять метод прогонки