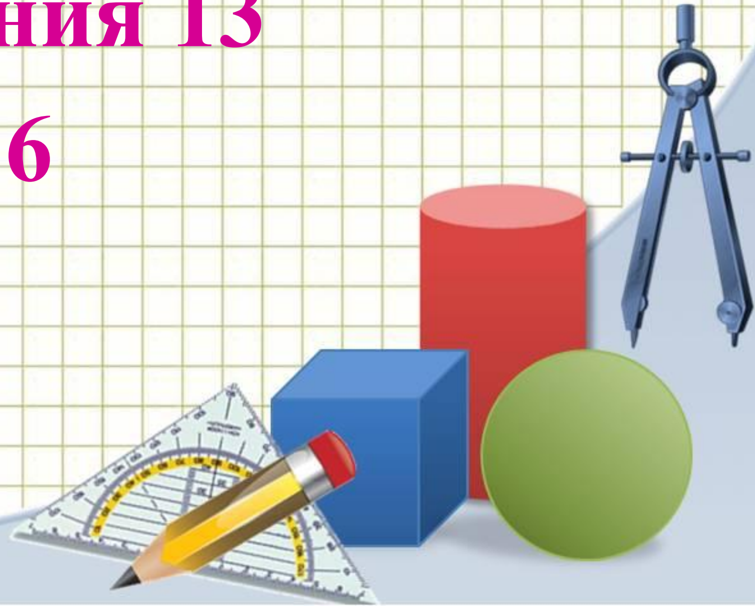
Педагогические, теоретические и практические аспекты проблемы ЕГЭ

Решение задания 13

ЕГЭ - 2016

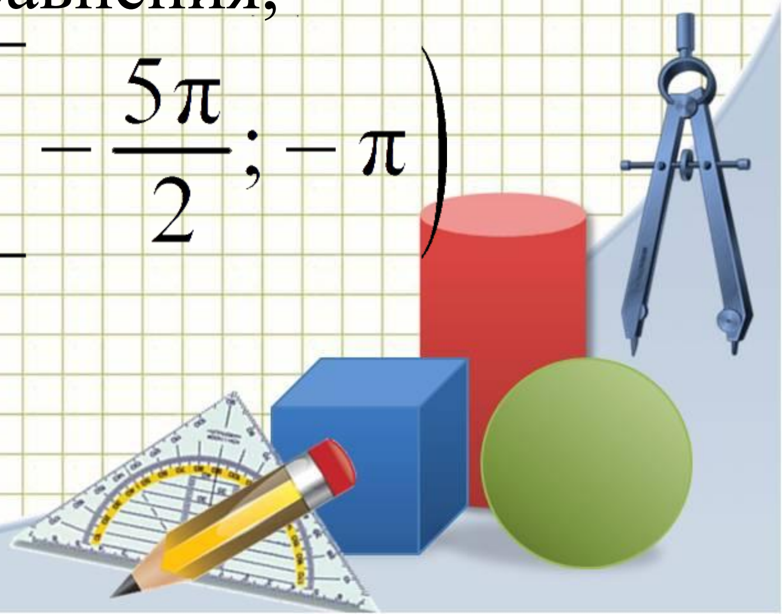


Задание 13демонстрационного варианта ЕГЭ - 2016

- а) Решите уравнение

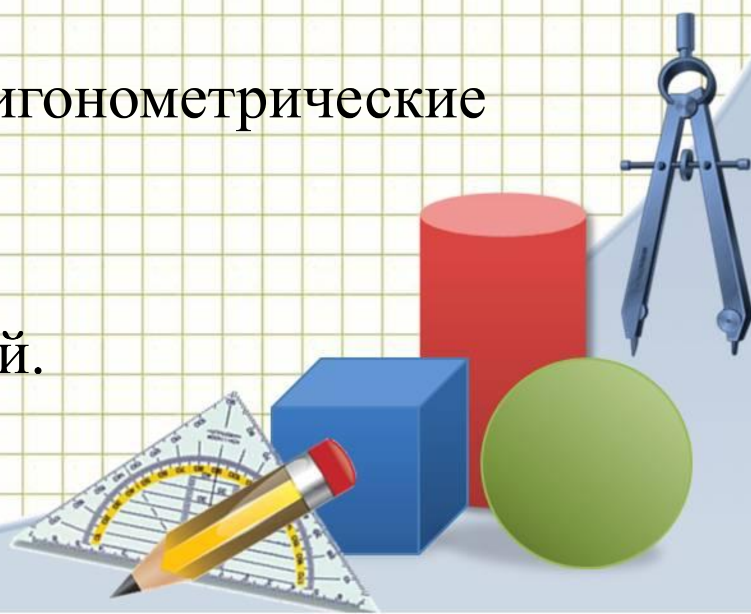
$$\cos 2x = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2}; -\pi\right)$



Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие показательные выражения.
- Уравнения, содержащие логарифмические выражения.
- Уравнения, содержащие иррациональные выражения.
- Уравнения, содержащие дробные выражения.
- Уравнения, содержащие модули.
- Уравнения, содержащие корни.
- Уравнения, содержащие обратные тригонометрические функции.
- Комбинированные уравнения.
- Серия тригонометрических уравнений.



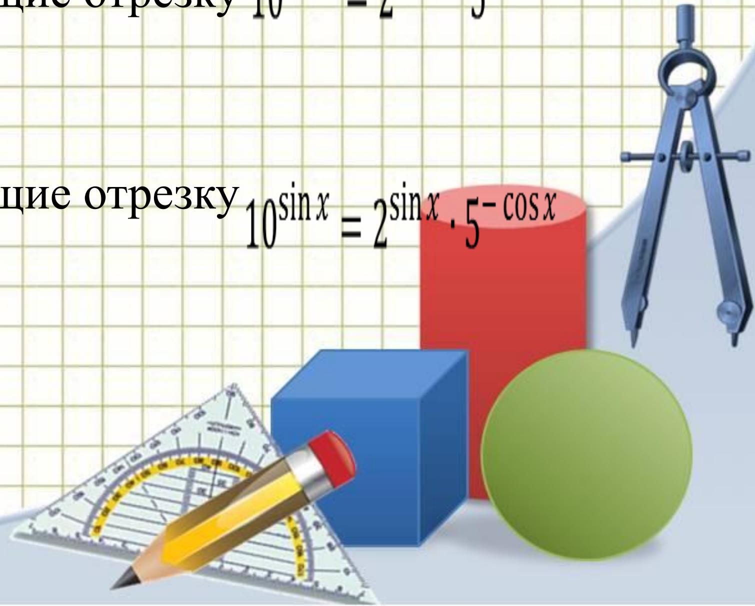
Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие показательные выражения.

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$
- Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$
- Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$
- Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$

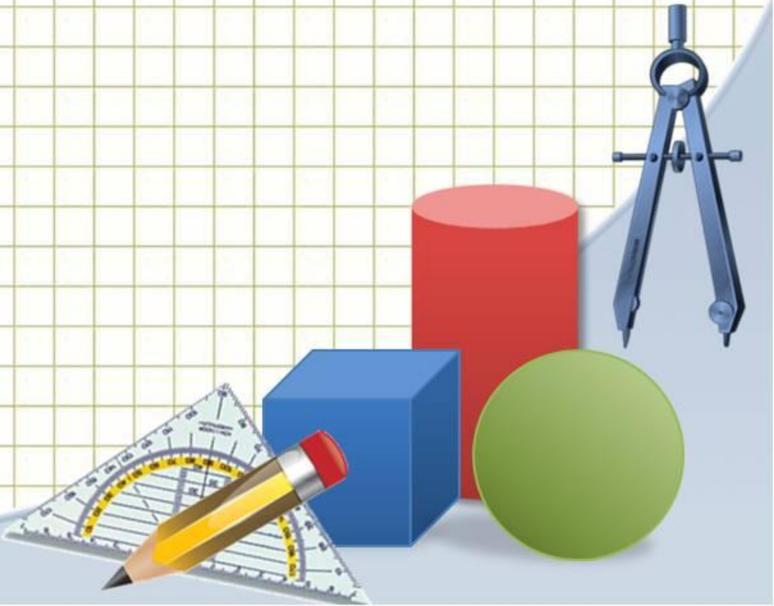


Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие логарифмические выражения.

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$
- Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$

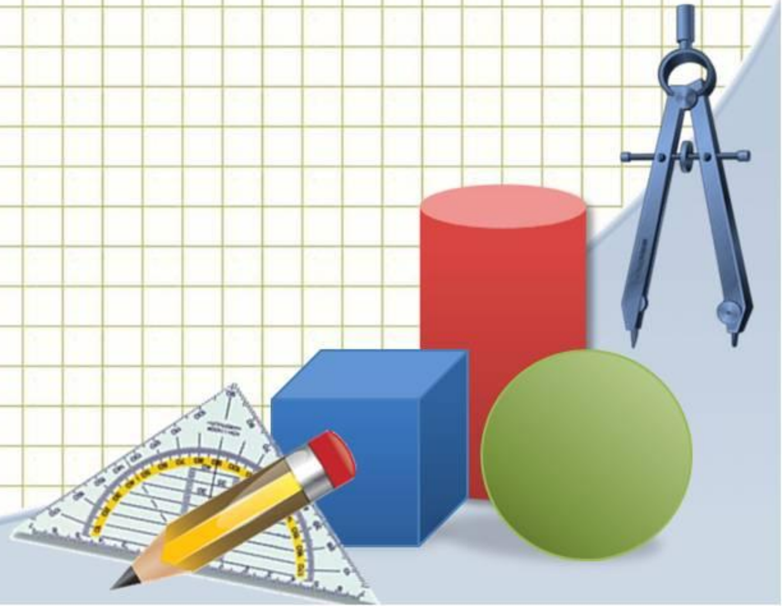


Типовые задания С1

- Комбинированные уравнения.

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$

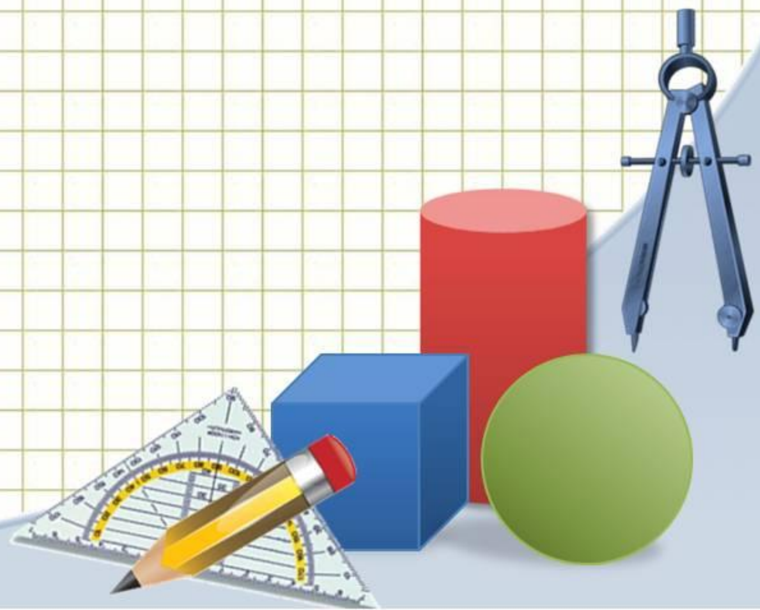


Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие дробные выражения.

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$



Типовые задания 13

- Уравнения, содержащие корни.

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$

- Решите уравнение $10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$

Типовые задания 13

- $$10^{\sin x} = 2^{\sin x} \cdot 5^{-\cos x}$$

Типичные ошибки в решении задания 13
ЕГЭ по математике

(потеря корней, появление «посторонних» корней)

Первое задание:

а) **Решите уравнение:**

$$tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+1=2\left(\sqrt{2}+1\right)ctgx$$

б) **Найдите все корни на промежутке** $\left[\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right]$

При решении уравнения попытаемся представить тангенс суммы двух углов по формуле $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

Получилось: $tg\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{tgx+tg\frac{\pi}{4}}{1-tgx\,tg\frac{\pi}{4}}$

И – **внимание!** – потеря корня!

Смотрите внимательно: после этого преобразования мы получили отдельно стоящий tgx. Но tgx не определен при

$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$. А в исходном уравнении х вполне мог быть равен $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$.

То есть, выполняя это невинное преобразование, мы сузили ОДЗ. Поэтому, **выполняя преобразование нужно следить за тем, что происходит с областью допустимых значений**.

Итак, мы идем другим путем.

Запишем tgx и ctgx через sin и cos:

$$\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}+1=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)cosx}{sinx}$$

Используем формулы синуса и косинуса суммы:

$$\frac{sinxcos\frac{\pi}{4}+cosxsin\frac{\pi}{4}}{cosxcos\frac{\pi}{4}-sinxsin\frac{\pi}{4}}+1=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)cosx}{sinx}$$

$$\frac{sinx\frac{\sqrt{2}}{2}+cosx\frac{\sqrt{2}}{2}}{cosx\frac{\sqrt{2}}{2}-sinx\frac{\sqrt{2}}{2}}+1=\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)cosx}{sinx}$$

$$\frac{2\cos x}{\cos x-\sin x}-\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)\cos x}{\sin x}=0$$

Вынесем за скобку общий множитель:

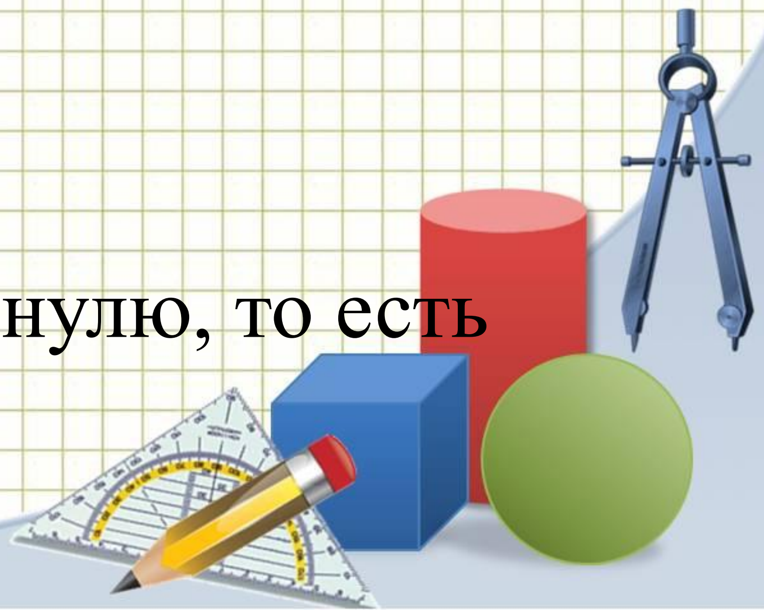
$$2\cos x\left(\frac{1}{\cos x-\sin x}-\frac{\sqrt{2}+1}{\sin x}\right)=0$$

Приведем выражение в скобках к общему знаменателю:

$$2\cos x\left(\frac{\sin x-\left(\sqrt{2}+1\right)(\cos x-\sin x)}{\sin x\,(\cos x-\sin x)}\right)=0$$

Знаменатель дроби не равен нулю, то есть

$\cos x-\sin x\neq 0$ и $\sin x\neq 0$



Произведение двух множителей равно нулю, если хотя бы один из них равен нулю:

$$\cos x = 0$$

или

$$\sin x - \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\cos x - \sin x\right) = 0$$

1. $$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

вот он, потерянный корень!

2. $$\sin x - \left(\sqrt{2}+1\right)\left(\cos x - \sin x\right) = 0$$

Раскроем скобки, приведем подобные члены:

$$\sin x - \sqrt{2}\cos x + \sqrt{2}\sin x - \cos x + \sin x = 0$$

$$\left(\sqrt{2}+2\right)\sin x - \left(\sqrt{2}+1\right)\cos x = 0$$

$$\left(\sqrt{2}+2\right)sinx=\left(\sqrt{2}+1\right)cosx$$

$$\frac{sinx}{cosx}=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}+2}$$

$$tgx=\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)}{\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)}$$

$$tgx=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

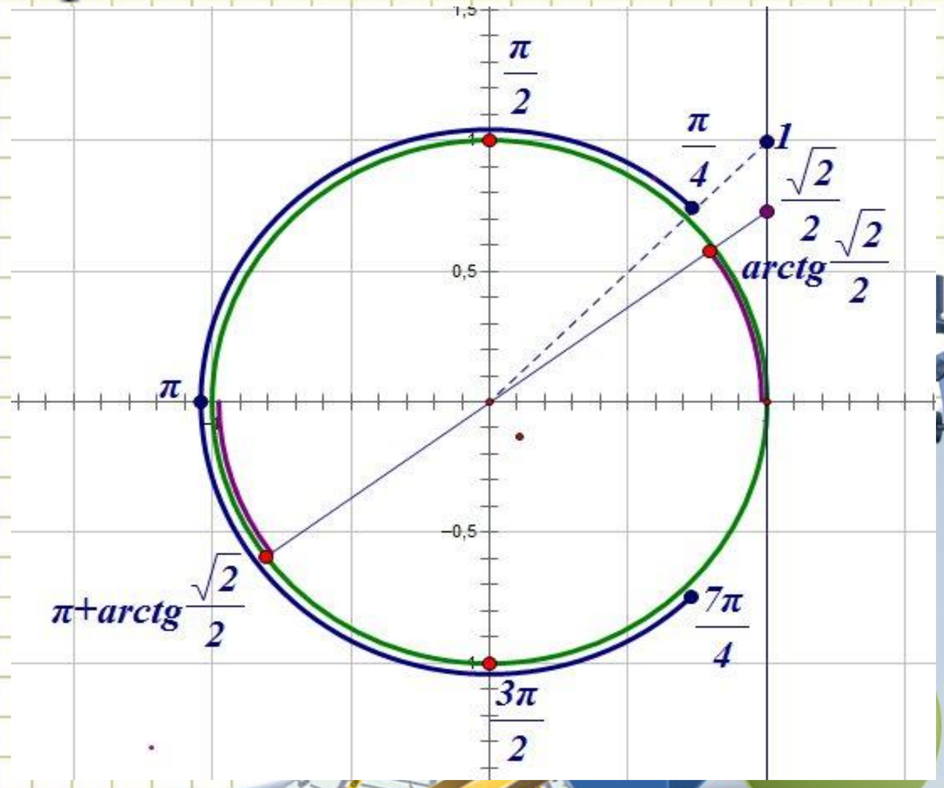
$$x=arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k,k\in\mathbb{Z}$$

Итак, мы получили два решения:

$$x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

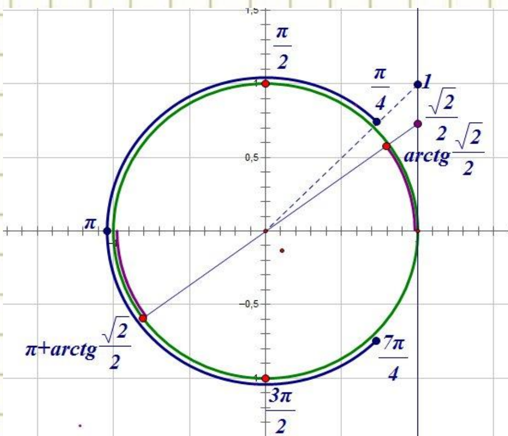
$$x=arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}$$

б) Найдем корни, принадлежащие промежутку $[\frac{\pi}{4};\frac{7\pi}{4}]$:



На рисунке красными точками обозначены решения уравнения;

синей дугой обозначен промежуток, которому принадлежат корни;



вая величина сиреневой

дуги равна $arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

таясь из точки $\frac{\pi}{4}$, мы

на пути $\frac{\pi}{2}$, $\pi+arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$\frac{3\pi}{2}$

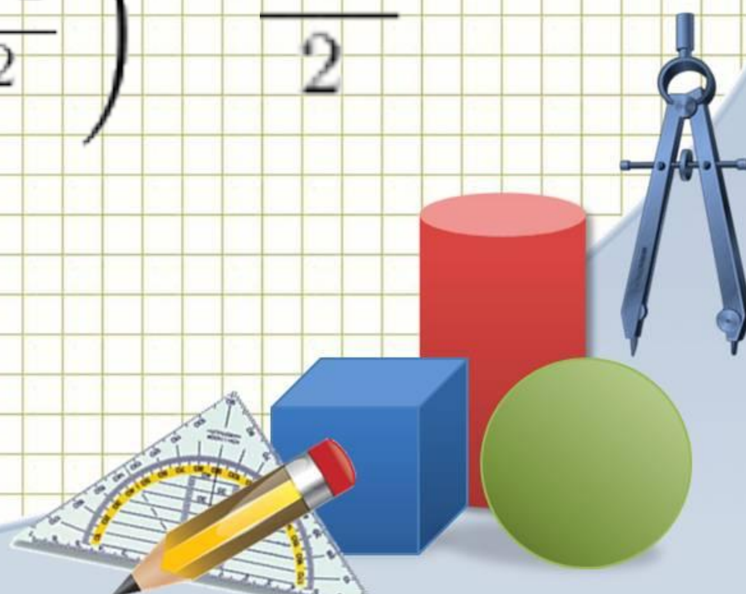
Это и есть корни уравнения, принадлежащие промежутку [$\frac{\pi}{4}$; $\frac{7\pi}{4}$].

Мы видим, что корень $arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ не принадлежит заданному промежутку.

Ответ: а) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$x=arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k, k\in\mathbb{Z}$

б) $\frac{\pi}{2}$, $\pi+arctg\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $\frac{3\pi}{2}$



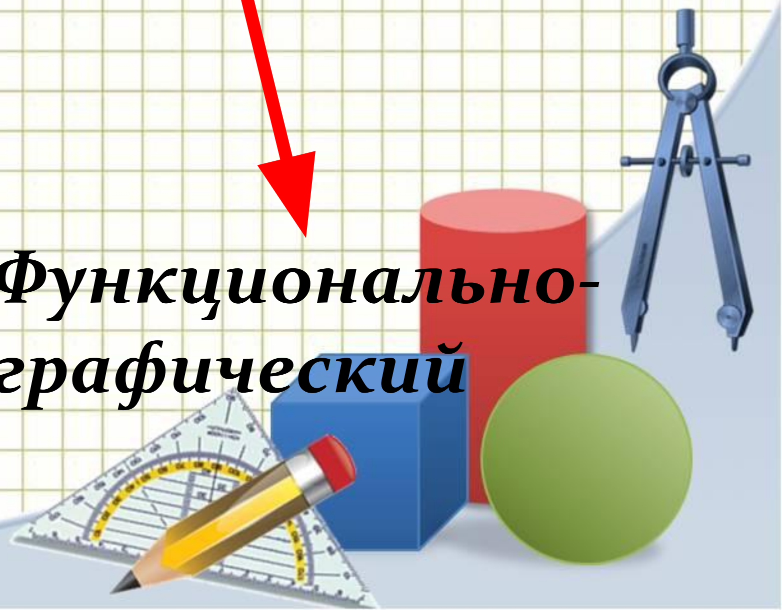
Способы отбора корней в тригонометрических уравнениях

Арифметический

Геометрический

Алгебраический

Функционально-графический



Арифметический способ

перебор значений целочисленного параметра и вычисление корней.

Найдите все корни уравнения $\sin 2x = \cos x$, принадлежащие промежутку $\left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right]$.

$$\sin 2x = \cos x;$$

$$\cos x \cdot (2\sin x - 1) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2}; \end{array}\right.$$

$$\boxed{1)\cos x = 0}$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n; n \in Z.$$

Если n=0,то

$$x = \frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=1,то

$$x = \frac{3\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=-1,то

$$x = -\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=-2,то

$$x = -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

$$2)\sin x = \frac{1}{2},$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z.$$

Если n=-1, то

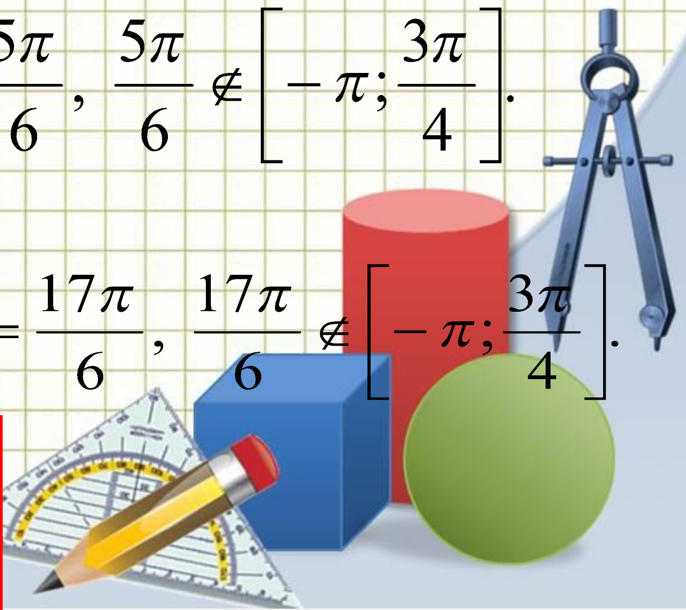
$$x = -\frac{11\pi}{6}, \ -\frac{11\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = -\frac{7\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=0, то

$$x = \frac{\pi}{6}, \ \frac{\pi}{6} \in \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = \frac{5\pi}{6}, \ \frac{5\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

Если n=1, то

$$x = \frac{13\pi}{6}, \ \frac{13\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right] \quad \text{или} \quad x = \frac{17\pi}{6}, \ \frac{17\pi}{6} \notin \left[-\pi; \frac{3\pi}{4}\right].$$

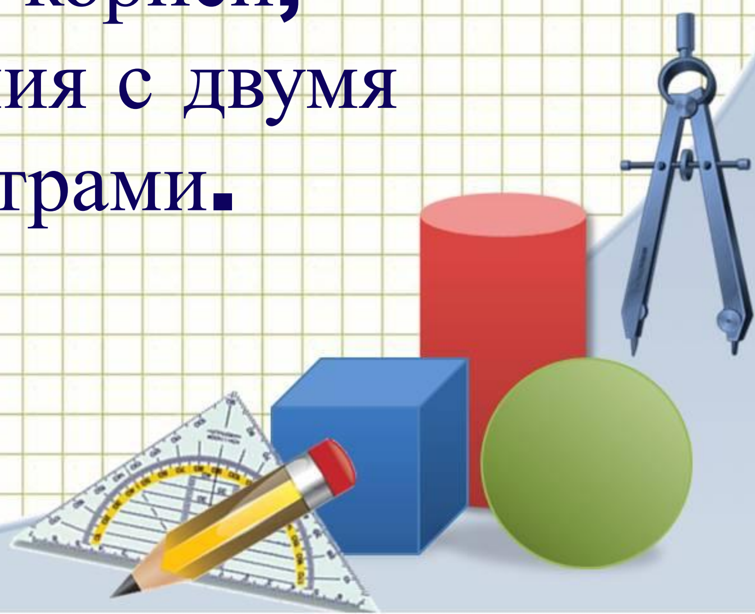


$$\text{Ответ}: -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}.$$

Алгебраический способ

а) решение неравенства относительно неизвестного целочисленного параметра и вычисление корней;

б) исследование уравнения с двумя целочисленными параметрами.



Решить уравнение

$$2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0.$$

Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[4\pi;5\pi\right]$.

$$2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0;$$

$$2\cdot(1-\cos^2 x) + 3\cos x - 3 = 0;$$

$$2 - 2\cos^2 x + 3\cos x - 3 = 0;$$

$$-2\cos^2 x + 3\cos x - 1 = 0;$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0;$$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos x = \frac{1}{2}, \\ \cos x = 1; \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \\ x = 2\pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

1) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$

2) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$

3) $x = 2\pi n, n \in Z.$

$4\pi \le \frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 5\pi, n \in Z;$

$4 \le \frac{1}{3} + 2n \le 5, n \in Z;$

$3\frac{2}{3} \le 2n \le 4\frac{2}{3}, n \in Z;$

$1\frac{5}{6} \le n \le 2\frac{1}{3}, n \in Z;$

n=2

$x = \frac{13\pi}{3}.$

$4\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi n \le 5\pi, n \in Z;$

$4 \le -\frac{1}{3} + 2n \le 5, n \in Z;$

$4\frac{1}{3} \le 2n \le 5\frac{1}{3}, n \in Z;$

$2\frac{1}{6} \le n \le 2\frac{2}{3}, n \in Z;$

нет значений.

$4\pi \le 2\pi n \le 5\pi, n \in Z;$

$4 \le 2n \le 5, n \in Z;$

$2 \le n \le 2\frac{1}{2}, n \in Z;$

$n = 2.$

$x = 4\pi.$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ 2\pi n, n \in Z;\ \frac{13\pi}{3};\ 4\pi.$

Геометрический способ:

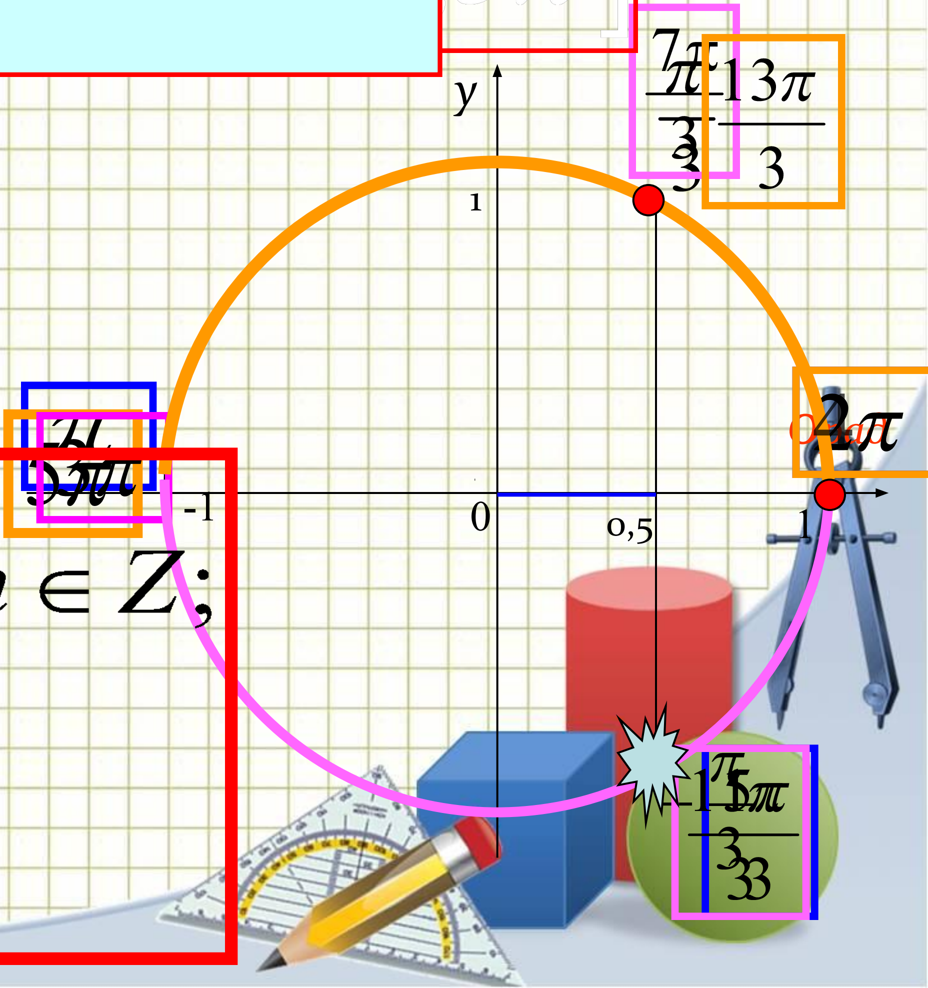
а) изображение корней на тригонометрической окружности с последующим их отбором на заданном промежутке;

б) изображение корней на координатной прямой с последующим отбором с учетом имеющихся ограничений.

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0;$$

Выполним отбор корней в предыдущем уравнении по-другому!

$x = 2\pi k, k \in Z.$



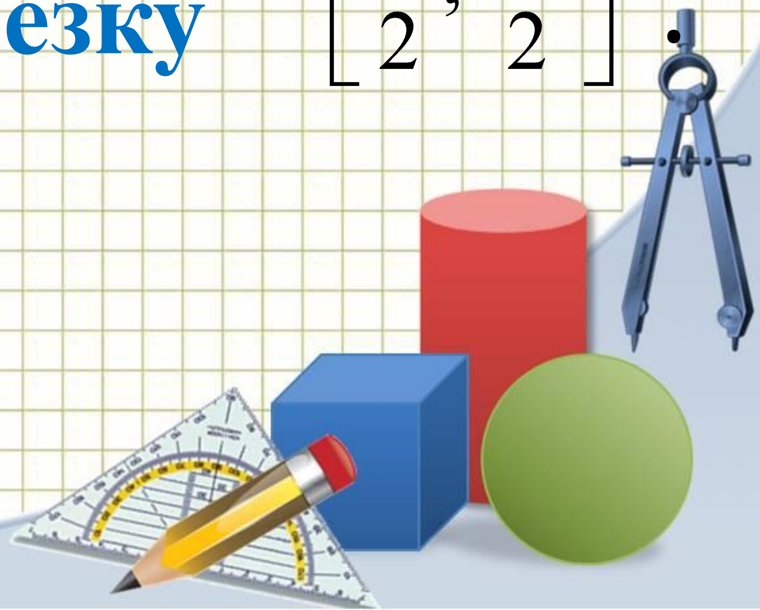
$$Ответ: \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z;$$

$$2\pi k, k \in Z; \frac{13\pi}{3}; 4\pi.$$

Решить уравнение

$$2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Укажите корни, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$.



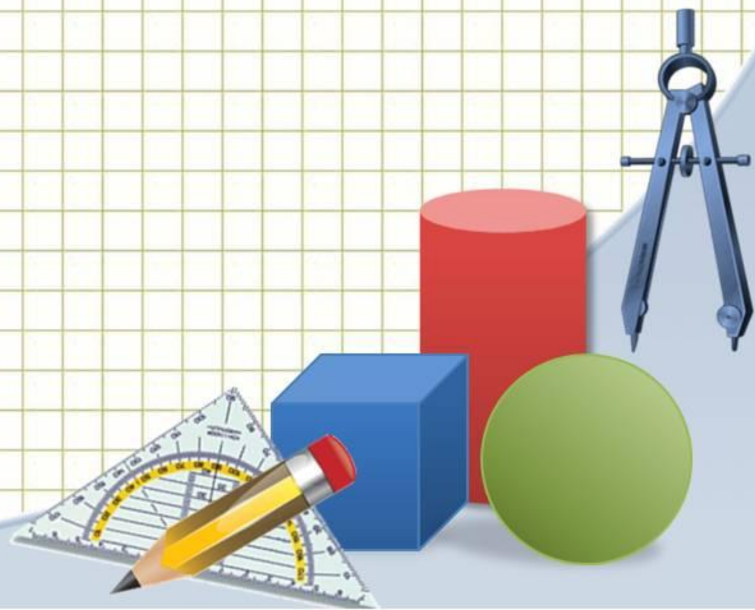
$$2\sin^2 x + \sin x \cdot \cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

$$2tg^2 x + tgx - 3 = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l} tgx = 1, \\ tgx = -\dfrac{3}{2}; \end{array}\right.$$

Разделим на cos^2x; $cos^2x \neq 0.$

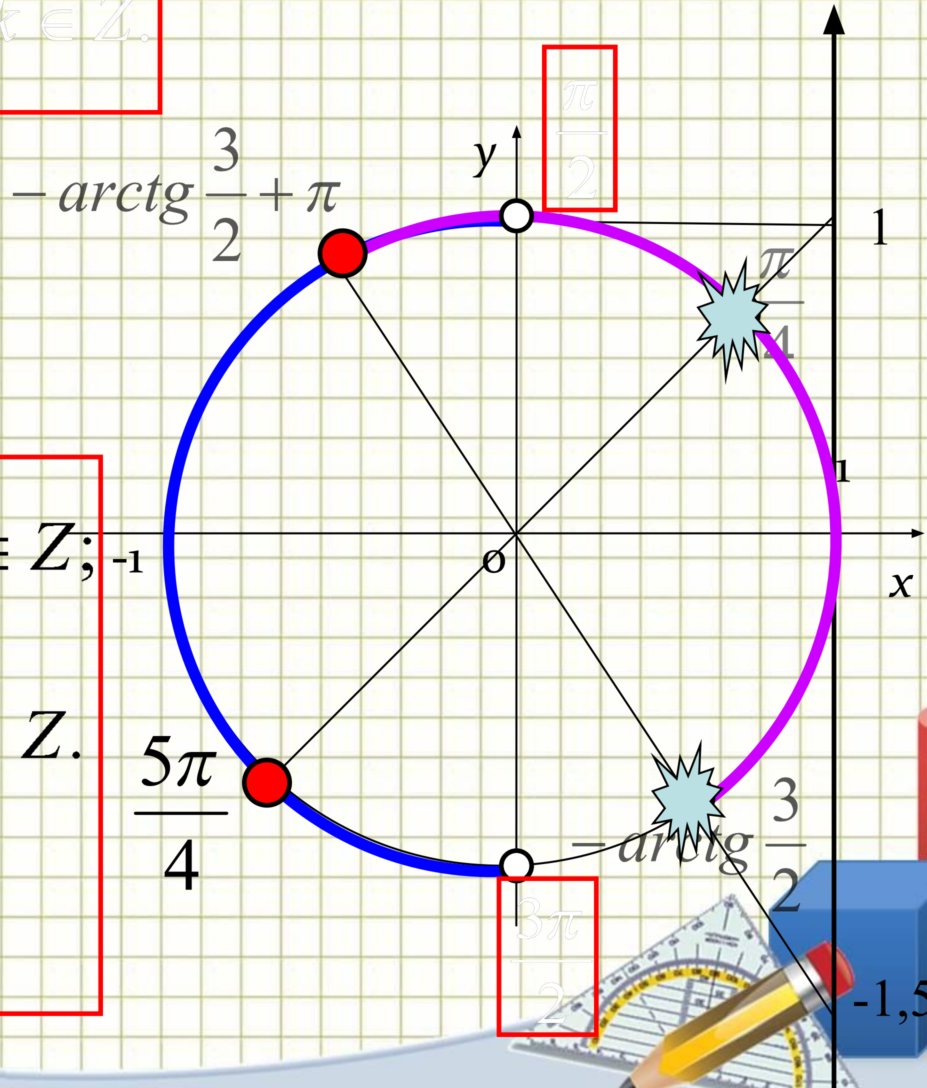
$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ x = -arctg\dfrac{3}{2} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$



$$\left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ x = -arctg(\dfrac{3}{2}) + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

?

$$\left[\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{3\pi}{2}\right]$$



$$Ответ: \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z;$$

$$-arctg(\frac{3}{2}) + \pi k, k \in Z.$$

$$\frac{5\pi}{4}; \pi - arctg\frac{3}{2}.$$

Отбор корней на координатной прямой.

$$\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{3}} = 0.$$

Решение :

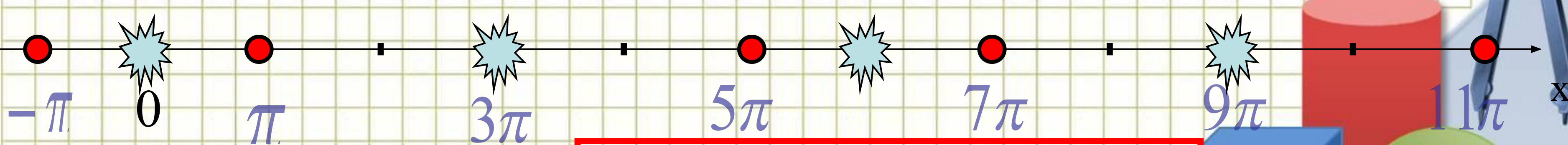
$$\begin{cases} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \sin\frac{x}{3} \neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \pi + 2\pi k, k \in Z, \\ x \neq 3\pi n, n \in Z. \end{cases}$$

$$T(\cos\frac{x}{2}) = 4\pi,$$

$$T(\sin\frac{x}{3}) = 6\pi.$$

Наим. общий период :

$$\mathrm{T}_{\text{общ}} = 12\pi.$$



Ответ :

$$-\pi + 6\pi m, \pi + 6\pi m, m \in Z.$$

Функционально-графический способ

выбор корней с использованием графика простейшей тригонометрической функции.

Решите уравнение

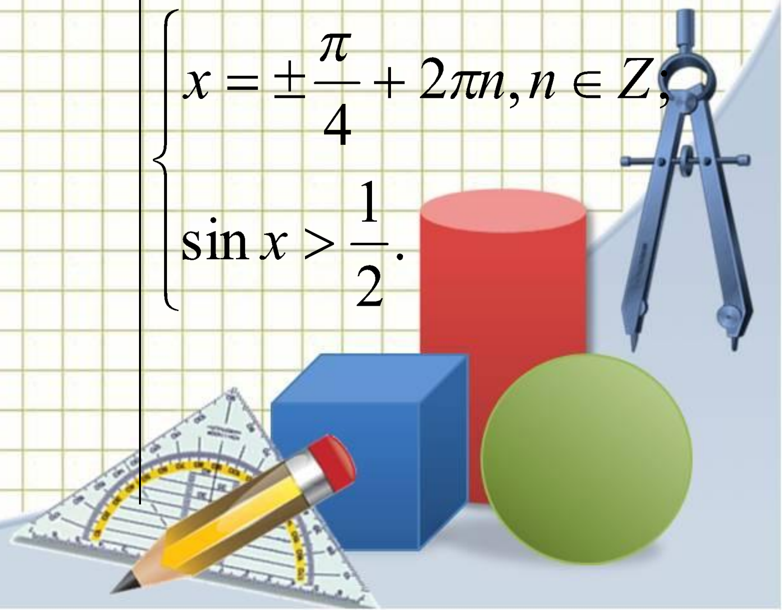
$$\frac{\sin 2x-\sqrt{2}\sin x-\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2\sin x-1}}=0;$$

$$\frac{2\sin x\cdot\cos x-\sqrt{2}\sin x-\cos x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2\sin x-1}}=0;$$

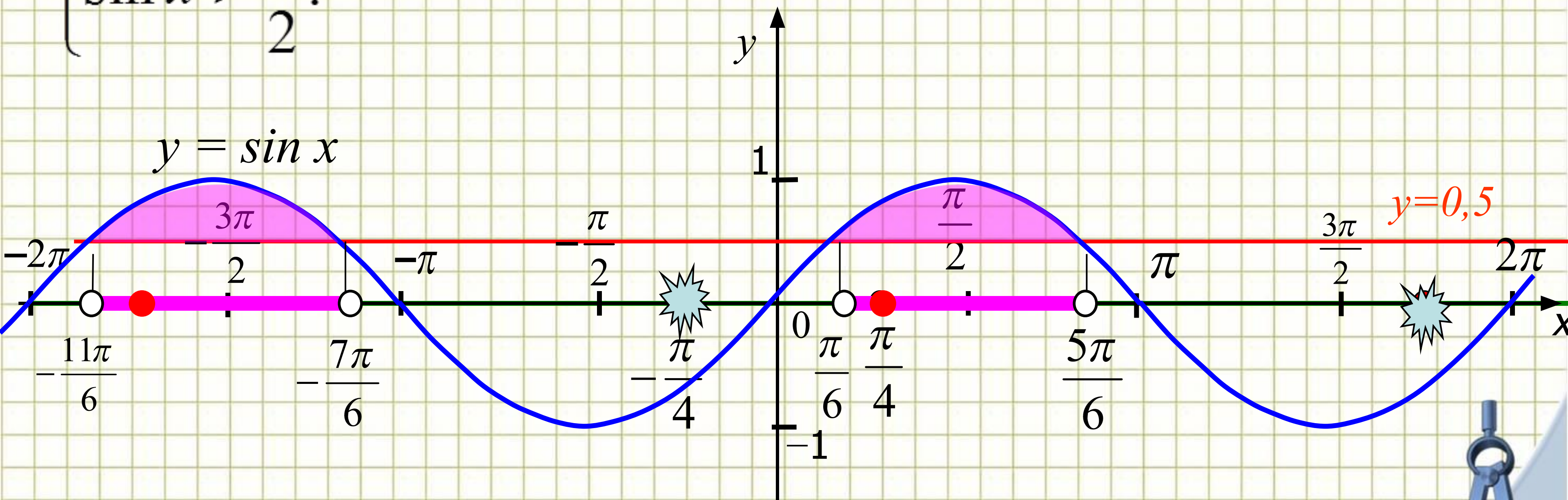
$$\frac{(\cos x-\dfrac{\sqrt{2}}{2})\cdot(2\sin x-1)}{\sqrt{2\sin x-1}}=0;$$

$$\begin{cases}\left[\begin{array}{l}\cos x=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \sin x=\dfrac{1}{2};\end{array}\right.\\ \sin x>\dfrac{1}{2};\end{cases}$$

$$\begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z;\\ \sin x>\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$



$$\begin{cases} x = \pm\dfrac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z; \\ \sin x > \dfrac{1}{2}. \end{cases}$$



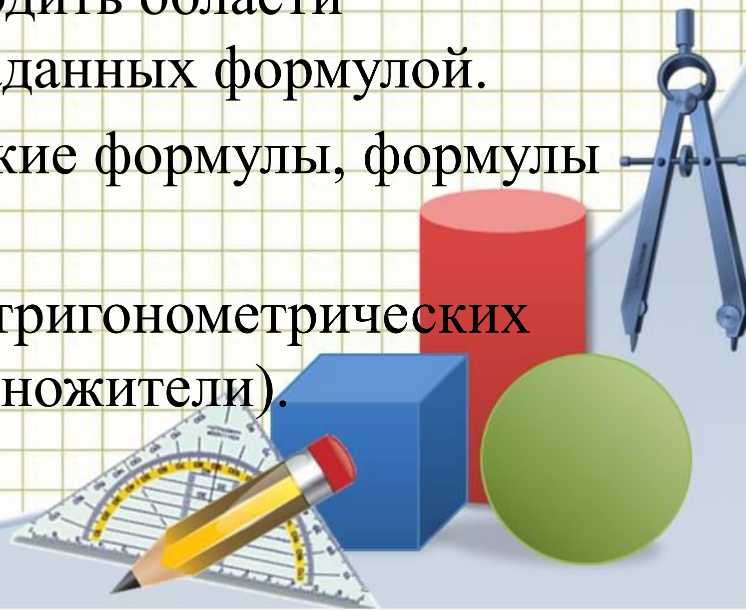
$$Ответ: \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z.$$

Для успешного решения задач типа 13 необходимо знать и уметь:

- 1. Понимать, уметь "читать" числовую окружность. При этом использовать не только градусную меру углов, но и радианную.
- 2. Знать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса.
- 3. Знать таблицу значений тригонометрических функций основных аргументов и аргументов первой четверти. Применяя числовую окружность, уметь находить значения тригонометрических функций аргументов других четвертей.
- 4. Используя числовую окружность, уметь читать и применять свойства тригонометрических функций (знаки, четность, периодичность, формулы симметричных точек).

Для успешного решения задач типа 13 необходимо знать и уметь:

- 5. Уметь решать простейшие тригонометрические уравнения по формулам и с использованием числовой окружности.
- 6. Уметь решать простейшие тригонометрические неравенства, используя числовую окружность.
- 7. Уметь выбирать корни согласно условию задачи или по виду уравнения, для чего уметь находить области определения различных функций, заданных формулой.
- 8. Знать основные тригонометрические формулы, формулы двойных аргументов.
- 9. Знать основные методы решения тригонометрических уравнений (замена, разложение на множители).



Работать над темой рекомендуется в соответствии со следующим планом:

- Числовая окружность.
- Числовая окружность в координатной плоскости.
- Градусная и радианная мера угла.
- Определение, значения и свойства синуса, косинуса, тангенса и котангенса.
- Обратные тригонометрические функции и их свойства.
- Простейшие тригонометрические уравнения.
- Простейшие тригонометрические неравенства.
- Выбор корней при решении тригонометрических уравнений.
- Методы решения тригонометрических уравнений.
- Системы тригонометрических уравнений.
- Примеры решения задания 13 из экзаменационных вариантов.