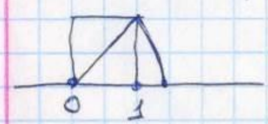
## 3. Действительные (вещественные) числа

строятся из рациональных $\mathbb{Q}\equiv\left\{\frac{p}{q}: \begin{matrix}p\in\mathbb{Z}\\ q\in\mathbb{N}\end{matrix}\right\}$,
у которых есть $=, >, <$; операции $+, \cdot$
и 13 св-в (всё известно из школы)

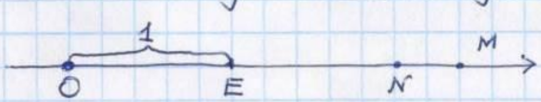
Рацион. числа изображаются точками на числовой оси, т.е. на прямой, где есть начало, направление и масштабный (единичный) отрезок. $\forall$ рац. числу соответствует точка. Но есть точки, не соответствующие рац. числам.



$\sqrt{2}$ − не является рац. числом

$\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, $2=\frac{p^2}{q^2}$, $p^2=2q^2$, $\Rightarrow p^2$ − чётное число
$\Rightarrow p$ − чётное, $p=2k$, $4k^2=2q^2$, $q^2=2k^2 \Rightarrow$
$\Rightarrow q$ − чётное, т.е. $\frac{p}{q}$ − сократимая дробь,

Для построения вещественных чисел поставим в соответствие каждой точке оси единств. бесконечную десятичную дробь.



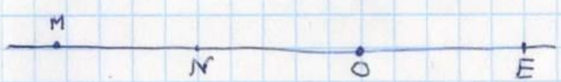
Точке O ставим в соответствие $0,00\ldots = +0,0\ldots$

M − правее O. Откладываем OE вправо $a_0$ раз и получаем $N$: $0 < NM \le 1$ (для точки E $a_0=0$). Затем берём $\frac{1}{10}$ единичного отрезка и откладываем от $N$ вправо $a_1$ раз и получаем $P$: $0 < PM \le \frac{1}{10}$ и т.д.

Получаем мн-во рац. чисел: $a_0$; $a_0,a_1=a_0+\frac{a_1}{10}$; $a_0,a_1a_2=a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}$; ...; $a_0,a_1\ldots a_n=a_0+\frac{a_1}{10}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}$; ...

Тем самым т. M поставлена в соответствие единственным образом бесконечная десятичная дробь: $a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots = +a_0,a_1a_2\ldots a_n\ldots$

M − левее O. Аналогичный процесс откладыванием



влево даёт бесконечную десятичную дробь: $-a_0,a_1\ldots a_n\ldots$

Итак, получено вз.-одн. соответствие между точками оси и бесконечными десятичными дробями. Рациональные числа − периодические дроби, причём конечные десятичные дроби получают период 9, а не 0 (кроме нуля, у к-го нет знака „−"), напр, т. E: $0,999\ldots$

Опр Действительными (вещественными) числами называются числа, предсавимые бесконечными десятичными дробями. $\mathbb{R}$

Рац. числа — бесконечные десятичные периодические дроби. Остальные числа (бесконечные десятичные непериодические дроби) — иррационоальные числа.

Теперь надо на них перенести отношения $(=, >, <)$, операции $(+, \cdot)$, убедиться, что 1–13 выполняются и установить, что если вещ. числа — рацион., то для них результат $(=, >, <; +, \cdot)$ тот же.

Опр Вещественное число называется неотрицательным, если оно записывается бесконечной десятичной дробью со знаком плюс (к-ый м.б. опущен), и отрицательным, если со знаком минус.

Опр. Абсолютной величиной (модулем) вещ. числа $a = \pm a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ называется $|a| = a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$

Опр. Вещ. числа $a = \pm a_0, a_1 \ldots a_n \ldots$ и $b = \pm b_0, b_1 \ldots b_n \ldots$ называются равными $(a = b)$, если у них одинаковые знаки и $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n, \ldots$ $(a_k = b_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots)$

Отсюда следует: $a = b,\ b = c \Rightarrow a = c$

Действит., $a_k = b_k\ \forall k,\ b_k = c_k\ \forall k \Rightarrow a_k = c_k\ \forall k$

Опр. Неотрицательное вещественное число называется положительным, если оно не равно нулю

Опр. Пусть $a \neq b$. Тогда

1) Если $a, b$ — неотрицательны, т.е.
$a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$
$b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$
причём $\exists m \geq 0 : a_k = b_k,\ k = 0, 1, \ldots, m-1$,
$a_m \neq b_m$ (это будет, т.к. $a \neq b$);
то при $a_m > b_m \Rightarrow a > b$
$a_m < b_m \Rightarrow a < b$

2) Если $a$ — неотриц., $b$ — отриц., то $a > b$

3) Если $a, b$ — отрицательны, то при $|a| < |b| \Rightarrow a > b$
$|a| > |b| \Rightarrow a < b$.

Из этого определения сразу вытекает:

$\forall a$ неотриц. $\Rightarrow a \geq 0$

$\forall b$ полож. $\Rightarrow b > 0$

$\forall c$ отриц. $\Rightarrow c < 0$

Докажем, что $a > b,\ b > c \Rightarrow a > c$

Пусть $a, b, c$ – неотрицательные, т.е.

$$a = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots$$
$$b = b_0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$
$$c = c_0, c_1 c_2 \ldots c_n \ldots$$

$\exists\, p \geq 0,\ q \geq 0:$ $a_0 = b_0, \ldots, a_{p-1} = b_{p-1}, a_p > b_p$

$b_0 = c_0, \ldots, b_{q-1} = c_{q-1}, b_q > c_q$

Берём $r = \min(p, q) > 0 \Rightarrow a_0 = b_0 = c_0, \ldots,$
$a_{r-1} = b_{r-1} = c_{r-1},\ a_r \geq b_r \geq c_r$, но хотя бы в
одном из $\geq$ стоит $>$. $\Rightarrow a_0 = c_0, \ldots, a_{r-1} = c_{r-1},$
$a_r > c_r \Rightarrow a > c$

Остальные случаи ($a, b$ – неотр., $c$ – отриц.;
$a$ – неотриц., $b, c$ – отриц.; $a, b, c$ – отриц.)
установить самостоятельно

Итак св-во 1 для вещественных чисел
полностью установлено.

## Ограниченные и неограниченные множества. Точные грани

**Опр.** $X \subset \mathbb{R}$ назыв. ограниченным сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \leq M$

$M$ называется верхней гранью мн-ва $X$

**Опр.** $X \subset \mathbb{R}$ назыв. ограниченным снизу, если $\exists m \in \mathbb{R} : \forall x \in X \Rightarrow x \geq m$

$m$ – нижняя грань мн. ва $X$

**Опр** $X \subset \mathbb{R}$ назыв. ограниченным, если оно ограничено сверху и снизу.

Отрицание определений. Например:
$X \subset \mathbb{R}$ не явл. огр. сверху (неогр. сверху), если $\forall M \in \mathbb{R} \; \exists x \in X : x > M$

**Опр.** Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Число $M \in \mathbb{R}$ называется точной верхней гранью мн. ва $X$, если

1. $\forall x \in X \quad x \leq M$
2. $\forall M_1 < M \quad \exists y \in X : y > M_1$

Обозначение $M = \sup X$ (супремум)

$M \neq \sup X$ ($M$ не есть т. верх. грань $X$) если
или $\exists x \in X : x > M$
или $\exists M_1 < M : \forall y \in X \Rightarrow y \leq M_1$

**Опр** Пусть $X \subset \mathbb{R}$. Число $m \in \mathbb{R}$ называется точной нижней гранью мн. ва $X$, если

1. $\forall x \in X \quad x \geq m$
2. $\forall m_1 > m \quad \exists y \in X : y < m_1$

Обозначение $m = \inf X$ (инфимум)

Если $X$ не огранич. сверху, то $\sup X = +\infty$
Если $X$ не огран. снизу, то $\inf X = -\infty$

**T1** $\forall X \subset \mathbb{R} : X \neq \varnothing$, $X$ – огр. сверху
$\Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : M = \sup X$.