Дифференциал функции

- **Определение 1.**
- Пусть приращение функции Δy
- можно представить в виде

$$\Delta y = A \bullet \Delta x + o(\Delta x)$$

- где A не зависит от Δx,
- $o(\Delta x)$- бесконечно малая более высокого порядка малости, чем Δx при $\Delta x \to 0$
- Тогда **главная линейная часть**
- приращения функции называется **дифференциалом функции в точке** x_0**:**

$$\boxed{dy = A \bullet \Delta x}$$

- **Определение 2.**
- **Дифференциалом независимой переменной**
- называется **приращение переменной:** $\boxed{dx = \Delta x}$

$$\boxed{dy = A \bullet dx}$$

Пусть y = f(x) определена и непрерывна в точке $x = x_0$,

Если полное приращение функции в этой точке можно представить в виде

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + o(\Delta x),$$

то функция y = f(x) называется дифференцируемой при $x = x_0$, а выражение

$$A \cdot \Delta x = dy.$$

Здесь $o(\Delta x)$ - бесконечно малая величина при $\Delta x \to 0$ более высокого порядка, чем Δx.

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ в точке x_0 была дифференцируемой необходимо и достаточно, чтобы для нее в этой точке существовала конечная производная $y' = f'(x_0)$. При выполнении этого условия равенство

$\Delta y = A \bullet \Delta x + o(\Delta x)$ имеет место при значении постоянной $A = y' = f'(x_0)$:

$$\Delta y = y' \Delta x + o(\Delta x).$$

Доказательство.

Необходимость. Выполняется $\Delta y = A \bullet \Delta x + o(\Delta x).$ Разделим на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}. \qquad \Delta x \to 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}, \qquad A = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'.$$

Достаточность.

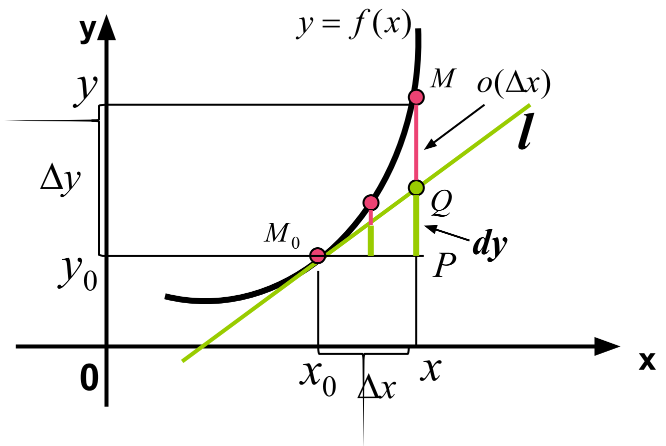
По условию существует производная $y' = f'(x_0)$: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$,

Тогда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = y' + o(\Delta x)$ и

$$\Delta y = y' \Delta x + o(\Delta x).$$

Приращение функции записано в таком виде, следовательно, функция дифференцируема.

Геометрический смысл дифференциала.



$$\exists\, dy = f'(x_0) \bullet dx$$

$$\Rightarrow \exists\, l - \textit{касательная}$$

$$f'(x_0) \bullet \Delta x - \textit{приращение}$$

$$\textit{ординаты касательной}\ \ l$$

Дифференциал функции численно равен **приращению ординаты касательной** к графику функции в точке M_0

- **Применение дифференциала:**
  - В приближенных вычислениях

$$\Delta y \approx dy \Rightarrow$$

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + f'(x_0) \bullet \Delta x$$

Свойства дифференциала.

- Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$
- **дифференцируемые.**
- Тогда:
- **1.** $d(f \pm g) = df \pm dg$;
- **2.** $d(f \bullet g) = (df) \bullet g + f \bullet (dg)$;
- **3.** $d\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{(df) \bullet g - f \bullet (dg)}{g^2}$;
- 4. **Инвариантность формы дифференциала.**
- Пусть функция $y = f(u)$ **дифференцируемая;**
- Функция $u = g(x)$ **дифференцируемая.**
- Тогда

$$dy = f'(u) \bullet du = \big(f(g(x))\big)' \bullet dx$$

$$du = g'(x) \bullet dx \qquad f'(u) \bullet g'(x)$$

Форма дифференциала функции не зависит от того, является ли ее аргумент независимой переменной или функцией от новой переменной.

Таблица дифференциалов основных элементарных функций.

1. $d(C) = 0$
2. $d(x^n) = nx^{n-1}dx$
3. $d(a^x) = a^x \ln a\, dx$
4. $d(e^x) = e^x dx$
5. $d(\log_a x) = \dfrac{1}{x \ln a} dx$
6. $d(\ln x) = \dfrac{1}{x} dx$
7. $d(\sin x) = \cos x\, dx$
8. $d(\cos x) = -\sin x\, dx$
9. $d(tgx) = \dfrac{1}{\cos^2 x} dx$
10. $d(ctgx) = -\dfrac{1}{\sin^2 x} dx$
11. $d(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
12. $d(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$
13. $d(arctgx) = \dfrac{1}{1+x^2} dx$
14. $d(arcctgx) = -\dfrac{1}{1+x^2} dx$

Функции двух переменных

- Функцией двух переменных называется закон, по которому каждой паре значений независимых переменных (аргументов) из области определения соответствует значение зависимой переменной (функции).

Данную функцию обозначают следующим образом:

$$Z = f(x; y)$$

- Поскольку упорядоченная пара значений «икс» и «игрек» определяет точку на плоскости, то функцию также записывают через $z = f(M)$, где M – точка плоскости с координатами x,y. Такое обозначение широко используется в некоторых практических заданиях.

Область определения

- Областью определения функции двух переменных называется множество всех пар $(x;y)$, для которых существует значение z.

- Графически область определения представляет собой всю плоскость либо её часть.

Пример

- Найти область определения функции

$$z = \frac{\sqrt{x+y-1}}{x}$$

- Решение: подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $x+y-1 \geq 0$
- и знаменатель не может равняться нулю: $x \neq 0$.
- Таким образом, область определения задаётся системой

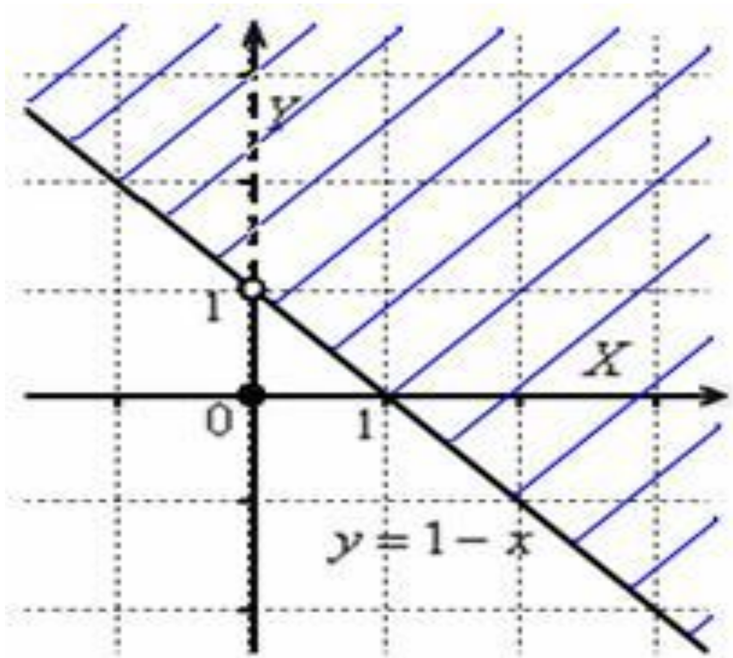
$$\begin{cases} x+y-1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}.$$

- Со вторым условием системы тоже всё просто: уравнение задаёт ось ординат, и коль скоро , то её следует исключить из области определения.

Построение области определения

- Строим прямую х + у - 1 = 0 и определяем полуплоскость, которая соответствует неравенству $x + y - 1 \geq 0$.
- Поскольку неравенство нестрогое, то сама прямая также будет являться решением.
- Второе условие системы: уравнение х = 0 задаёт ось ординат, и так как $x \neq 0$
- , то эту ось следует исключить из области определения.

Строим полученную область определения на плоскости:



Пример

Найти область определения функции

$$z = \sqrt{3 - x^2 - y^2}$$

Решение:

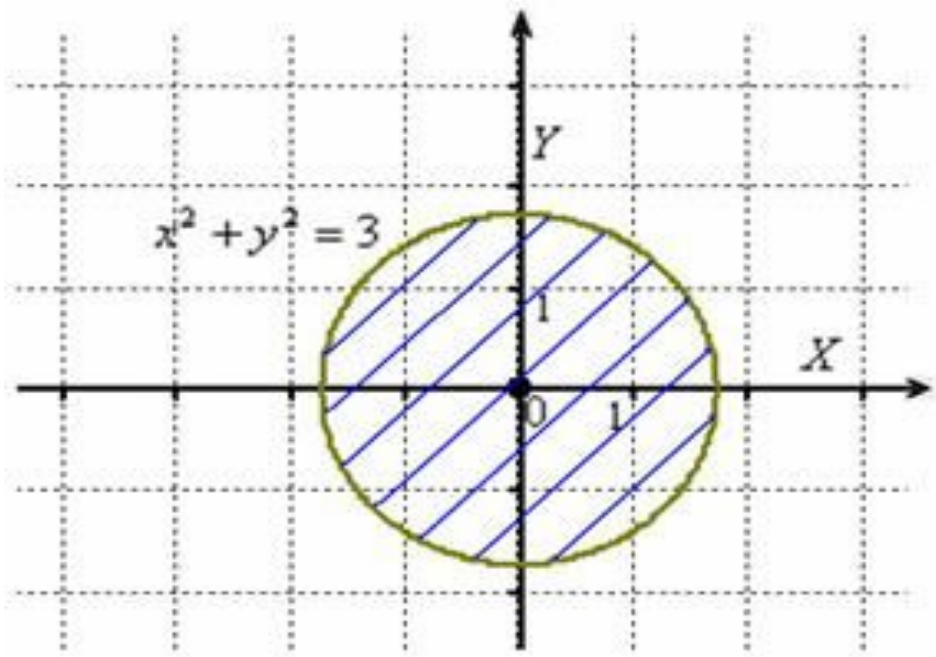
Подкоренное выражение должно быть неотрицательным: $3 - x^2 - y^2 \geq 0$

или $x^2 + y^2 \leq 3$

Это круг радиуса $\sqrt{3}$ с центром в начале координат.

Изобразим область определения на чертеже:

Изобразим область определения на чертеже:



Пример 3: Определить естественную область определения функции $z = \ln(x+y)$

Так как логарифмы определены только для положительных чисел, то должно выполняться неравенство

$$x + y > 0 \qquad \text{или} \qquad y > -x$$

Это значит, что **областью определения** функции z является **половина плоскости**, расположенная над прямой $\boldsymbol{y = -x}$, не включая самой прямой (рис. 3)

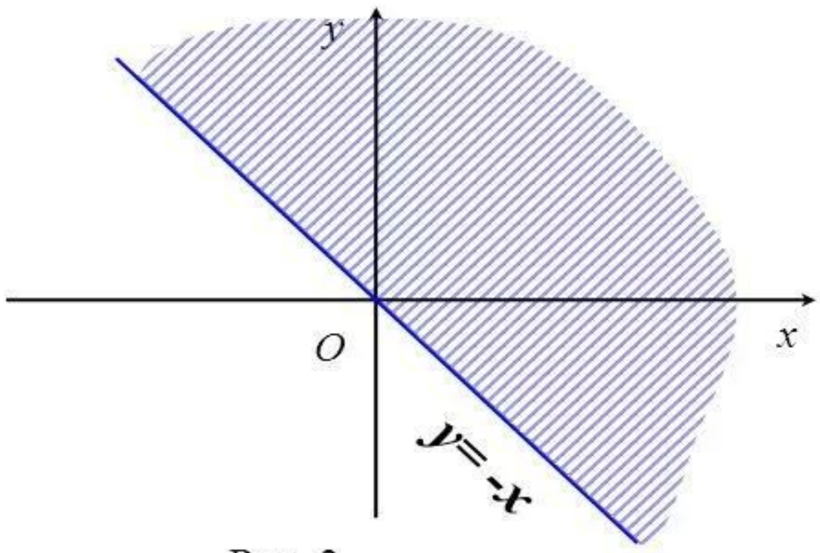


Рис. 3

Имеем дело с областями , ограниченными линиями.

Линия, ограничивающая данную область, называется границей области.

Точки области, не лежащие на границе, называются внутренними точками области.

Область, состоящая из одних внутренних точек, называется открытой.

Если же к области относятся и точки границы, то область называется замкнутой.

- Связной называется область, любые две точки которой можно соединить линией, целиком лежащей в этой области.

Геометрическое изображение функции двух переменных.

- **Графиком** функции $z = f(x; y)$ является поверхность с уравнением $z = f(x; y)$.

Геометрическое изображение функции 2-х переменных.

Каждая пара значений аргументов (x,y) геометрически определяет точку M на плоскости, а значение функции в этой точке есть аппликата z пространственной точки $P(x,y,z)$.

Геометрическое место точек P есть поверхность, которая взаимно однозначно проектируется в область D плоскости $0XY$. Эта поверхность служит геометрическим изображением функции $z = f(x,y)$.

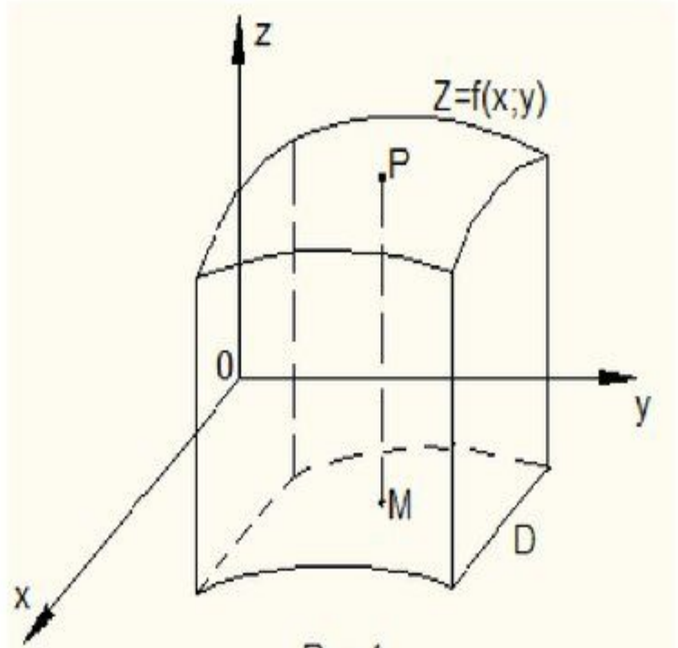
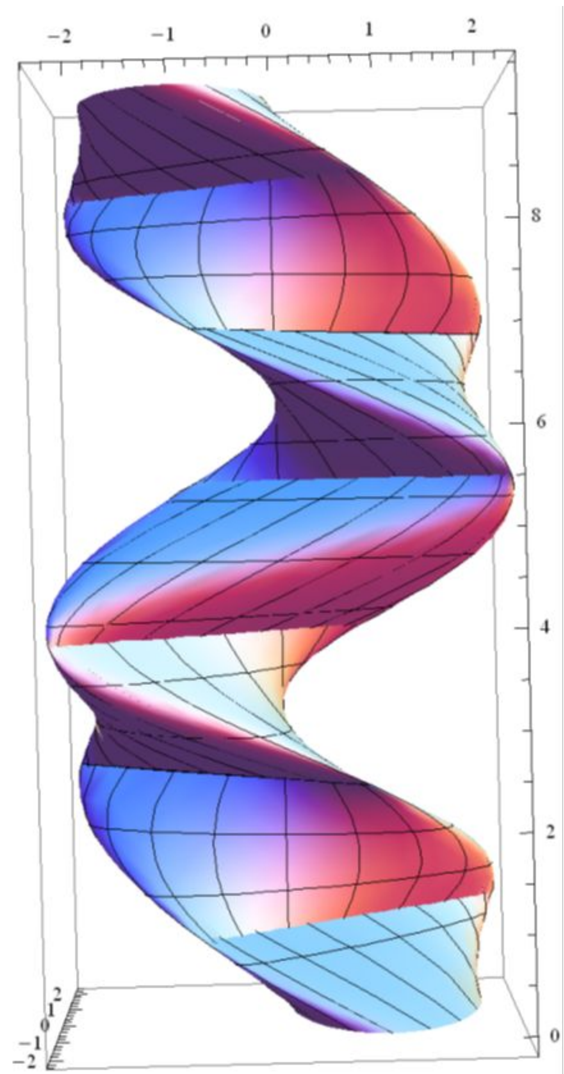
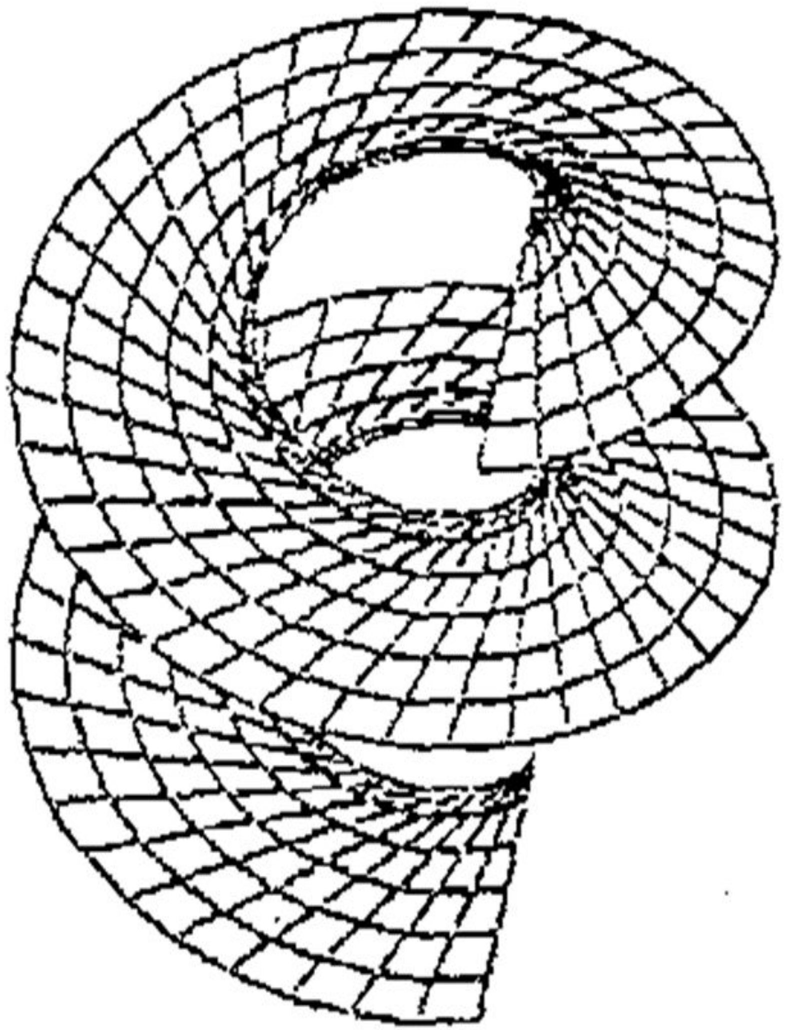
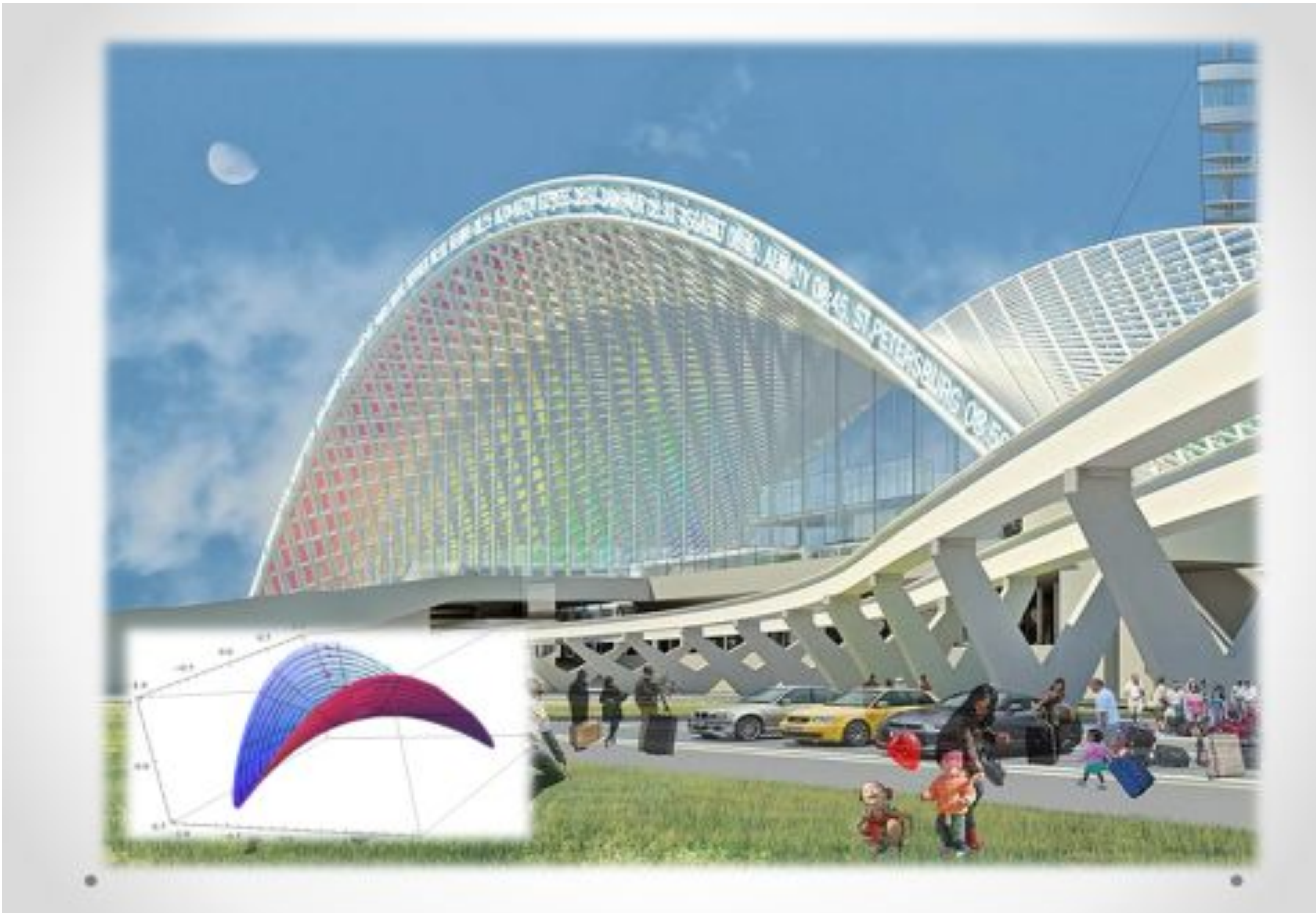


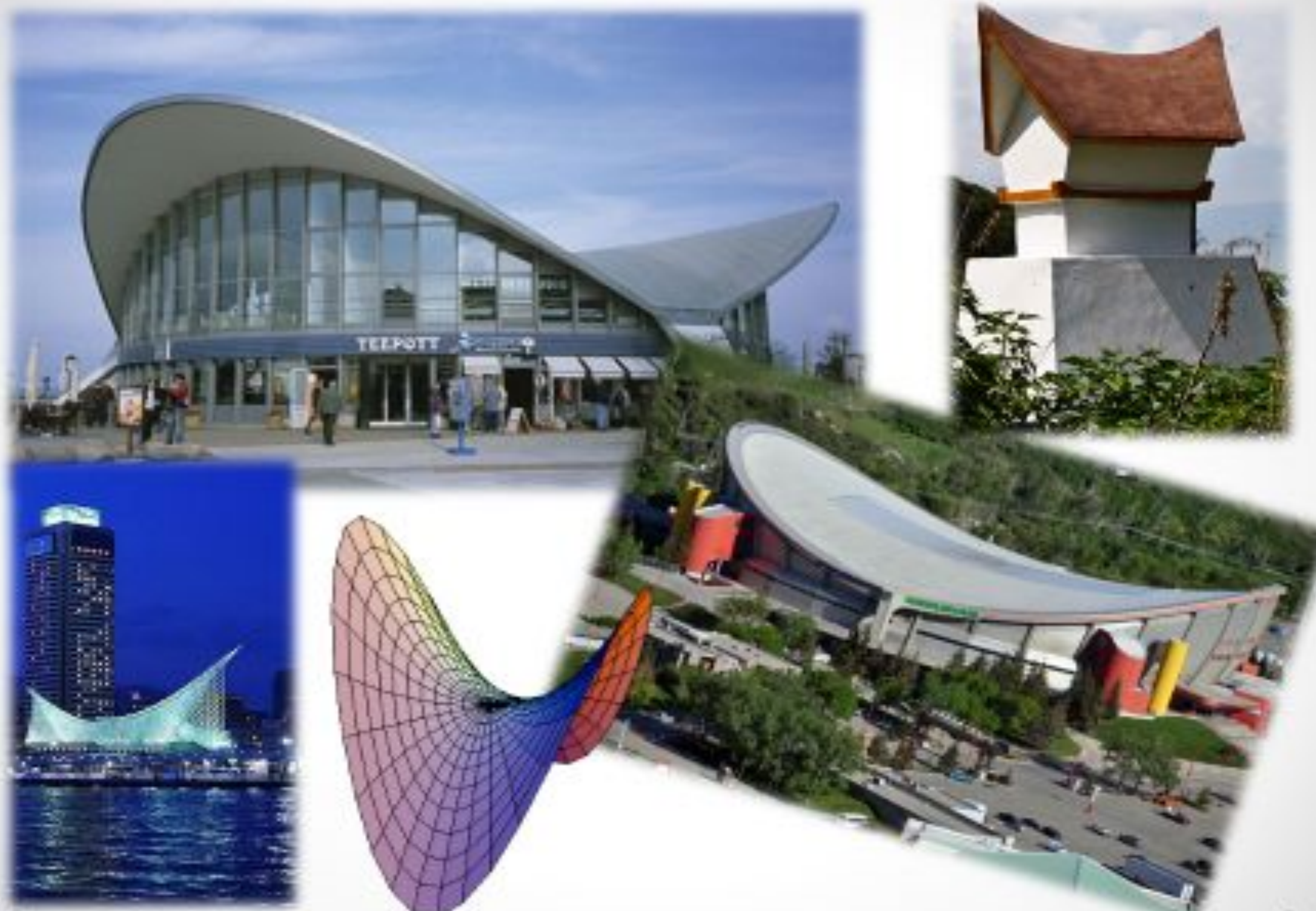
Рис.1

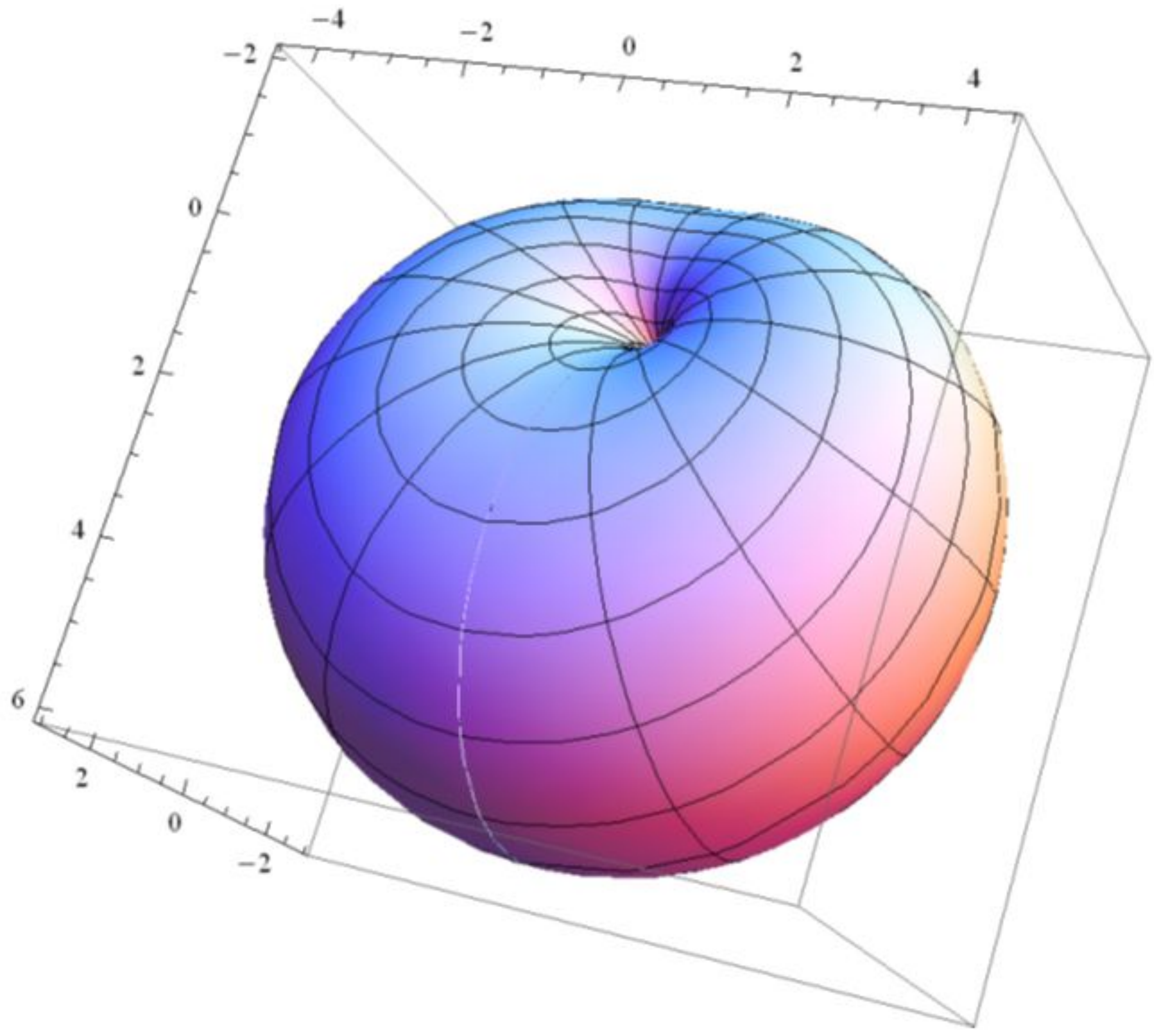


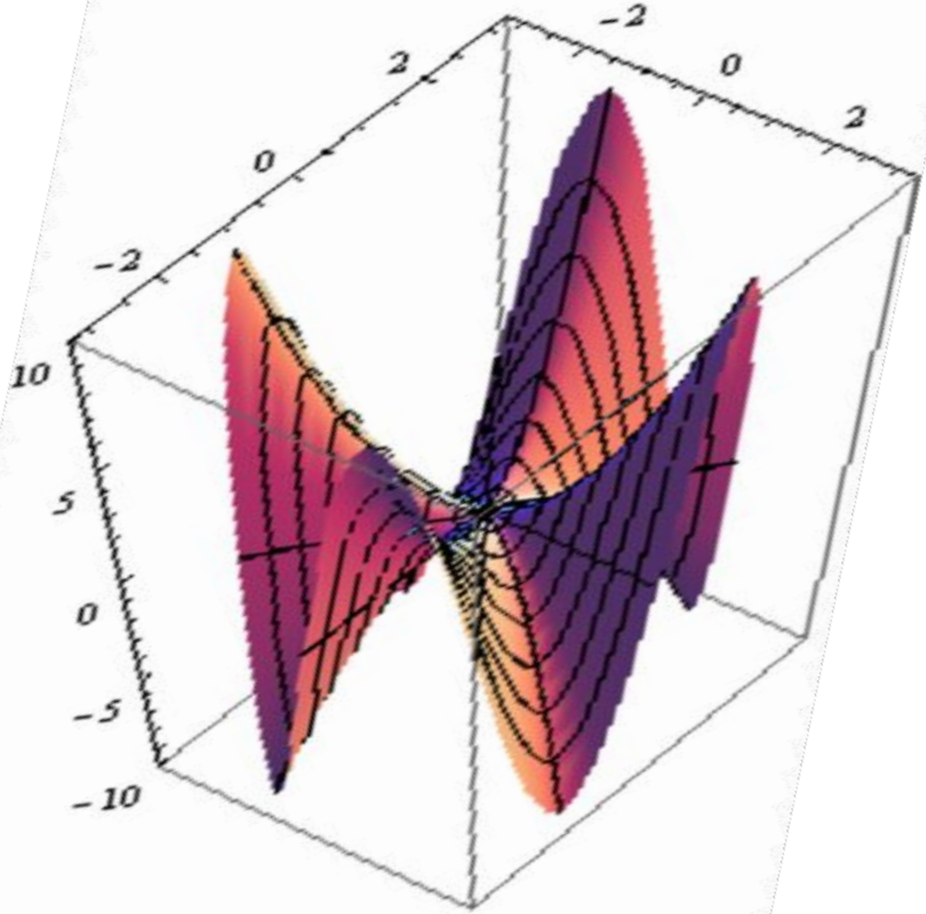
−2
−1
0
1
2
8
6
4
2
0



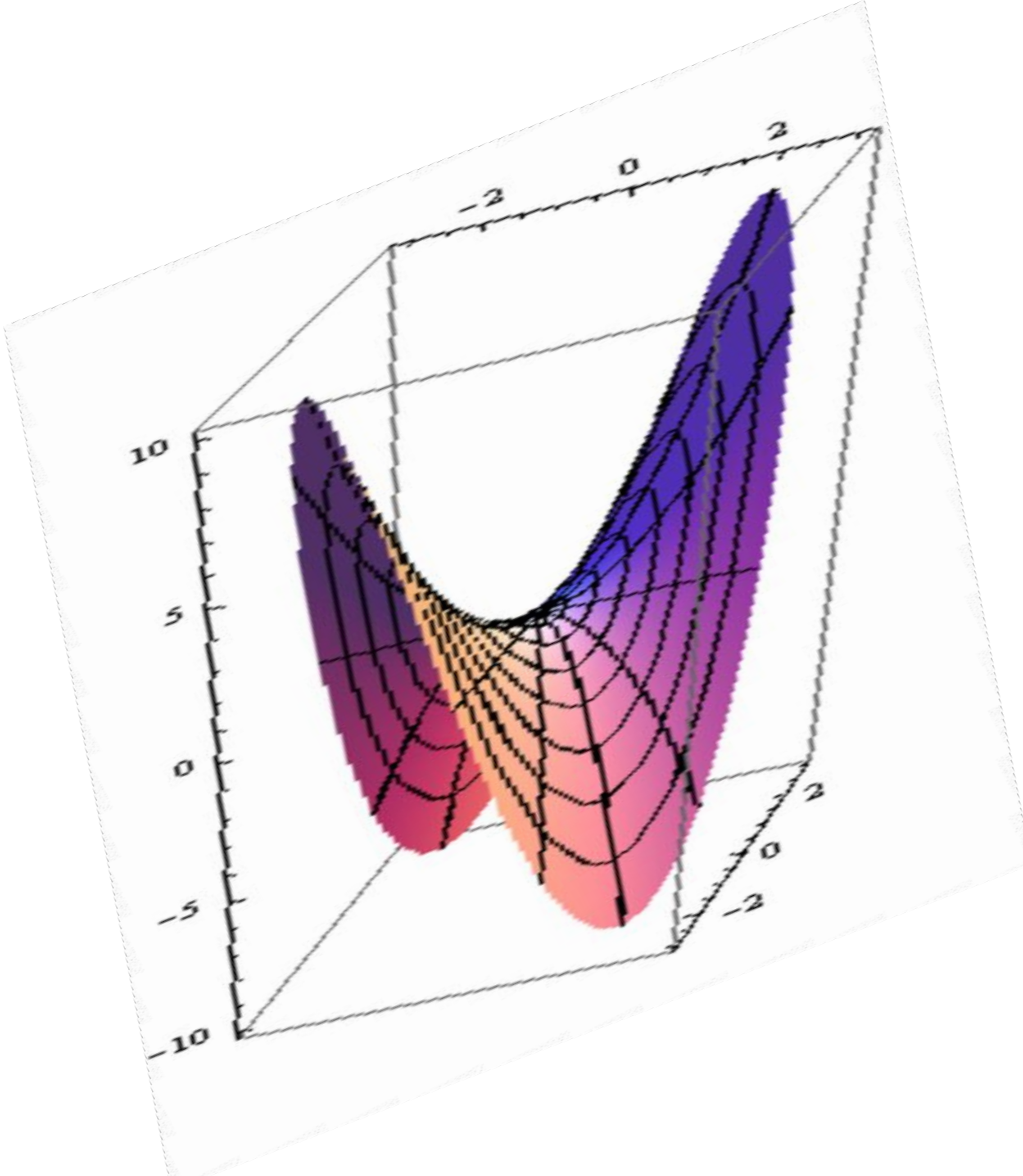

ALMATY 08:45, ST PETERSBURG


TEEPOTT



−4
−2
0
2
4
−2
0
2
4
6
2
0
−2

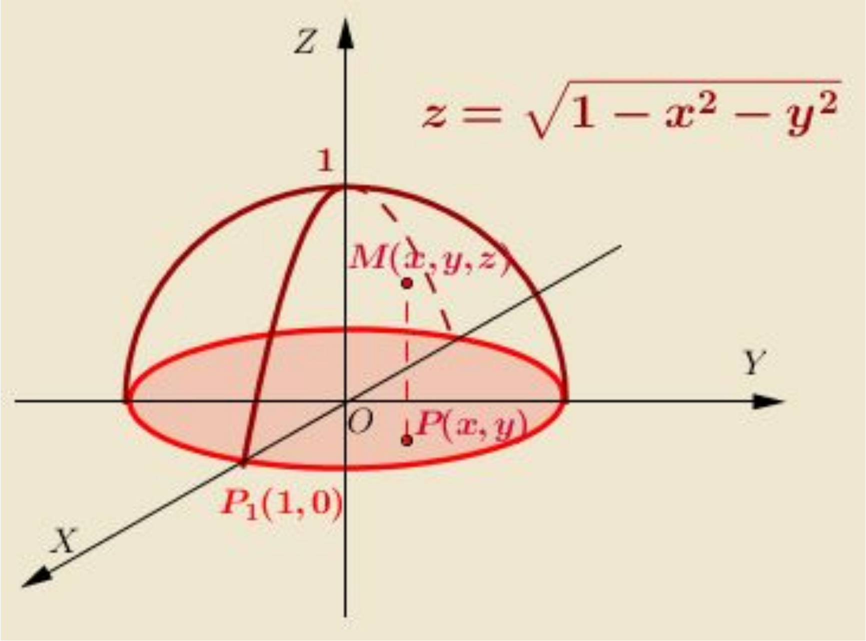


2
0
−2
−2
0
2
10
5
0
−5
−10



10
5
0
−5
−10
−2
0
2
2
0
−2

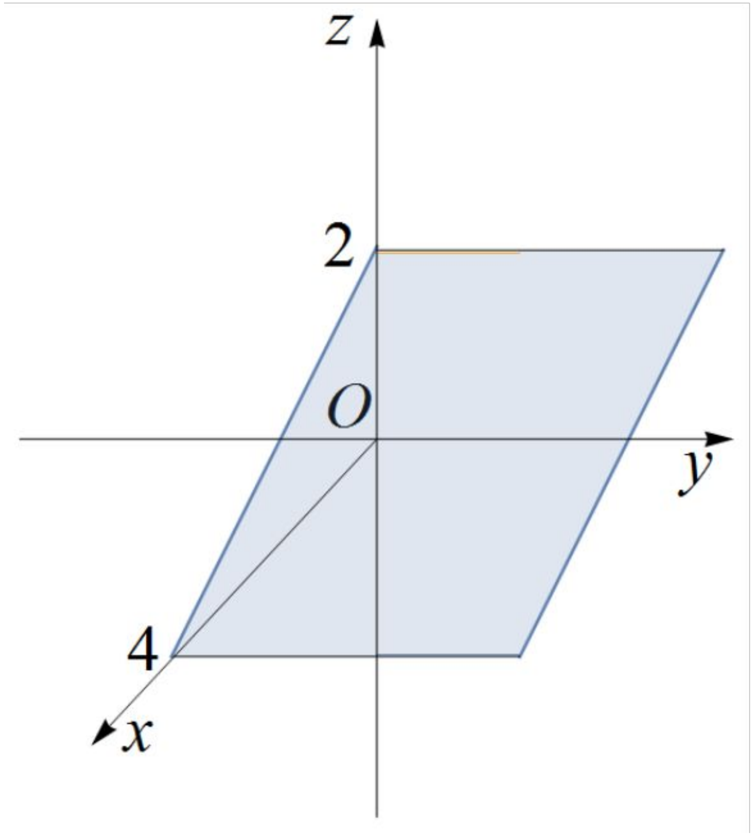
Пример

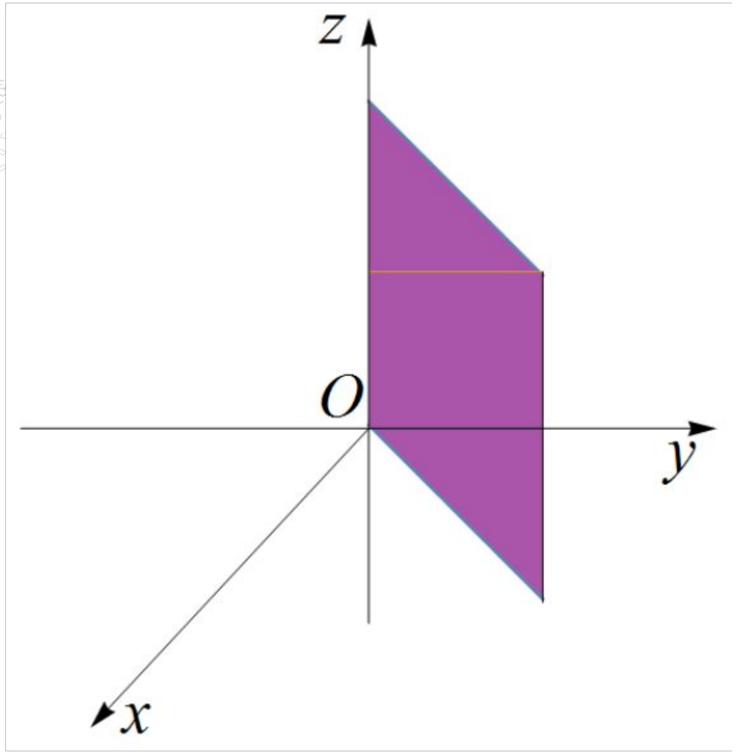


Примеры

$$x + 2z = 4$$

$$y = x$$





Построить самостоятельно:

Плоскость: $z = 1 - x$

Полусфера: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

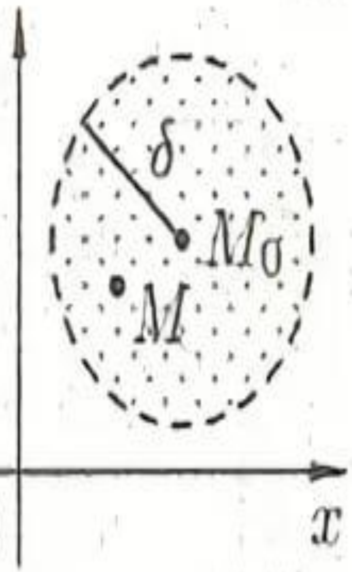
Ограниченность функции двух переменных

- Функция z = f(x;y) называется ограниченной в области D, если существуют такие числа M и N, что

$$M \le f(x;y) \le N$$

для всех (x,y) из области D.

Например, $z = \sin(x^2 + 2y)$



Введем понятие окрестности точки. Множество всех точек $M(x, y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$, называется *$\delta$-окрестностью точки* $M_0(x_0; y_0)$. Другими словами, δ-окрестность точки M_0 – это все внутренние точки круга с центром M_0 и радиусом δ.

Определение. ***Функцией*** n ***переменных*** называется правило, которое каждому набору действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D$ ставит в соответствие единственное число $z \in E$.

Функция n переменных обозначается $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Предел и непрерывность функции двух переменных.

Определение. δ***-окрестностью точки*** $P_0(x_0, y_0)$ называется внутренняя часть круга радиуса δ с центром в этой точке: $\left\{P(x,y): \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < \delta\right\}$.

Любая точка P этой δ-окрестности находится от точки P_0 на расстоянии меньшем δ.

Пусть функция $z = f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $P_0(x_0, y_0)$ за исключением быть может самой точки P_0.

Определение. Число A называется ***пределом функции двух переменных*** или ***двойным пределом функции*** $z = f(x, y)$ при $P(x, y) \to P_0(x_0, y_0)$, если для любого числа ε найдется такая δ-окрестностью точки $P_0(x_0, y_0)$, что для любой точки $P(x, y)$ этой окрестности, за исключением точки P_0, будет выполнено неравенство:

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

При этом записывают:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A \text{ или } \lim_{P\to P_0} f(P) = A.$$

Из определений, следует что

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y) = A \Leftrightarrow \lim_{\rho\to 0} f(x,y) = A},$$

где $\rho = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}$ – расстояние между точками P и P_0.

Частные приращения функции двух переменных

- Частным приращением по x функции z = f(x; y) в точке $(x_0; y_0)$ называется разность
- $$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0),$$
- то есть приращение функции, полученное за счет приращения Δx при y - const.

Частным приращением по у функции
z = f(x; y) в точке $(x_0; y_0)$ называется разность

$$\Delta_y z = f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0),$$

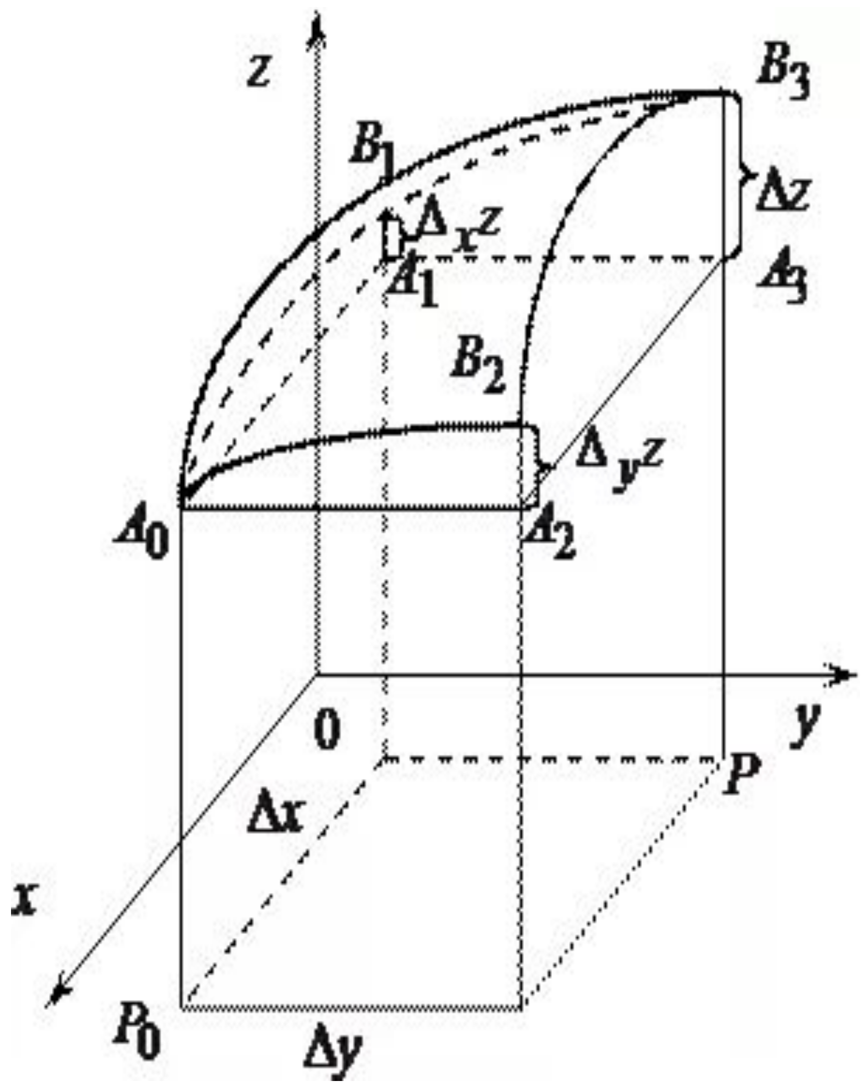
то есть приращение функции, полученное за счет приращения Δy при x - const.

Полное приращение функции z = f(x;y)

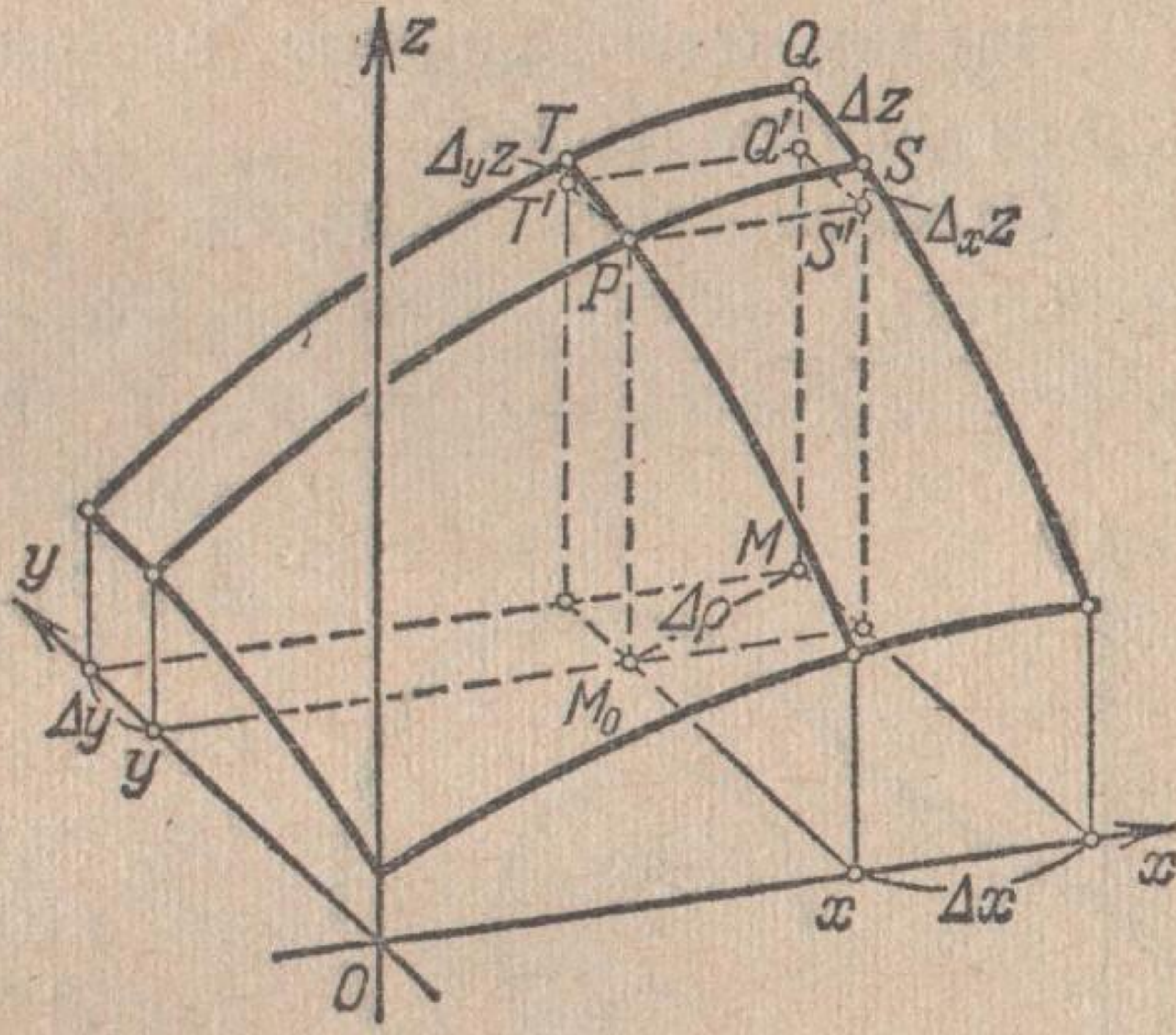
Полным приращением функции z = f(x;y) в точке $(x_0; y_0)$ называется разность

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)$$

Геометрический смысл частных и полного приращений функции двух переменных



о-
z
я
г.
х
ит
т-
а-
ок



1)
ет

Непрерывность функции в точке.

- Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если

1). функция определена в точке M_0 и некоторой ее окрестности;

2). существует $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$;

3). $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)\cdot$

Второе определение непрерывности функции z =f(x; y) в точке

Пусть функция z = f(x; y) непрерывна в точке $M_0(x_0;y_0)$ (по первому определению).

Тогда $x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y,$ $\qquad \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) = f(x_0; y_0)$

или $\quad \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} [f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)] = 0$.

Но $f(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0) = \Delta z$ - полное приращение функции.

Пусть $\Delta \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, при $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$, $\Delta \rho \to 0$, тогда получим

$$\boxed{\lim_{\Delta \rho \to 0} \Delta z = 0}$$

Непрерывность

Другое определение: Функция *z=f(x,y)* называется *непрерывной в точке* M_0 , если в этой точке бесконечно малому приращению аргументов соответствует бесконечно малое приращение функции, т. е. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0,$

где $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$.

Частные производные функции двух переменных
z = f (x; y)

Частной производной функции z = f(x; y) по x называется

$$z'_x = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$$

(y - const)

Другое обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

Частной производной функции z = f(x; y) по y называется

$$z'_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}$$

(x - const)

Другое обозначение: $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

Пример

Найти частные производные:

$$z = 3x^4 + 2y^3 + 5x^2 y - 2xy^2 + 4x - y + 5$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^3 + 10xy - 2y^2 + 4$$

(y = const)

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 + 5x^2 - 4xy - 1$$

(x = const)

Пример

Найти частные производные:

$$z = e^{2x+5y}\sin(4 - 2x+5y^2)$$

$$z'_x = e^{2x+5y} \cdot 2 \cdot \sin(4 - 2x+5y^2) + e^{2x+5y}\cos(4 - 2x+5y^2) \cdot (-2)$$

$(y = \text{const})$

$$z'_y = e^{2x+5y} \cdot 5 \cdot \sin(4 - 2x+5y^2) + e^{2x+5y}\cos(4 - 2x+5y^2) \cdot (10y)$$

$(x = \text{const})$

Геометрический смысл частных производных

Пусть $y = y_0 = \text{const}$. Это плоскость, параллельная координатной плоскости Oxz. В пересечении с поверхностью z = f(x; y) получим линию.

Угол α - угол, образованной касательной к этой линии и положительным направлением оси Ox.

Касательная проведена в точке $P_0(x_0; y_0; z_0)$, где $z_0 = f(x_0; y_0)$.

Аналогично,

Пусть $x = x_0 = \text{const}$. Это плоскость, параллельная координатной плоскости Oyz. В пересечении с поверхностью z = f(x; y) получим линию.

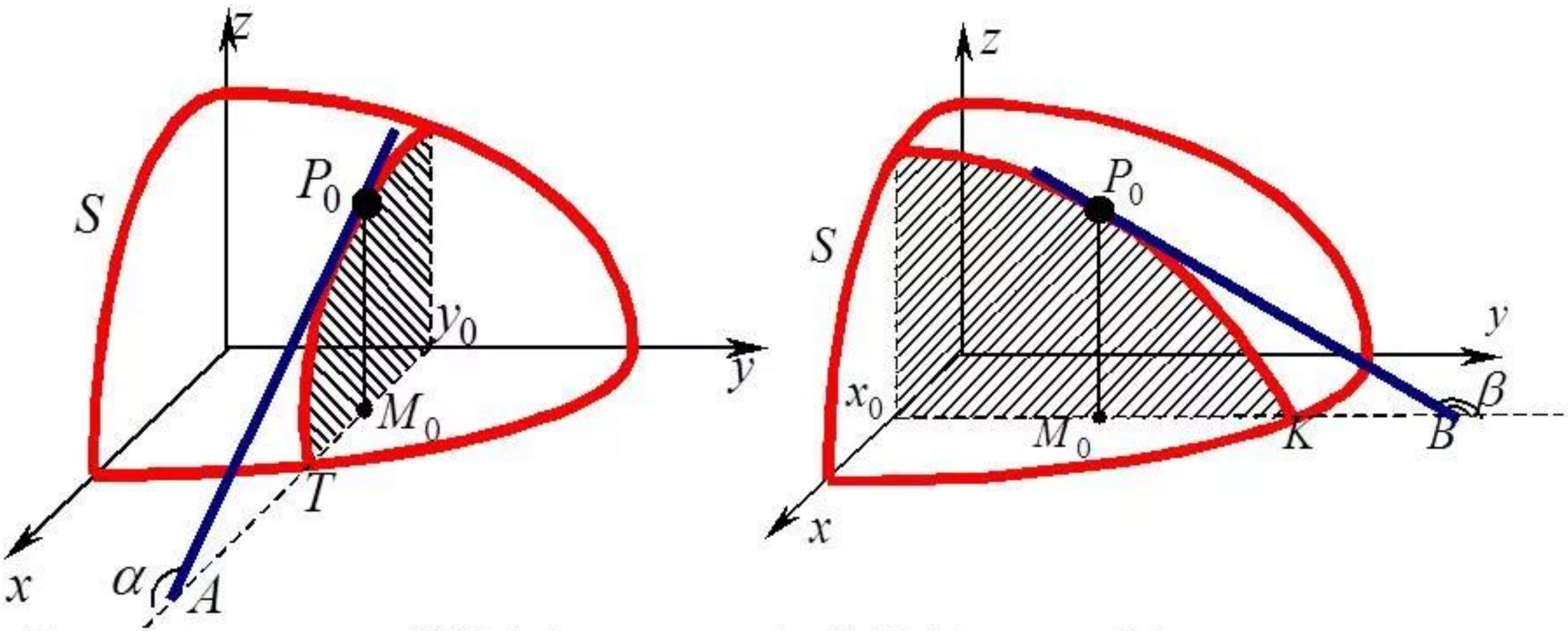
Угол β- угол, образованной касательной к этой линии и положительным направлением оси Oy.

Касательная проведена в той же точке.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ частных производных функции ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ.

Пусть функция $z = f(x,y)$ имеет в $M_0(x_0,y_0)$ частную производную по x (y).

Пусть поверхность S – график функции $z = f(x,y)$.



Тогда $f'_x(M_0) = \operatorname{tg}\alpha \quad (f'_y(M_0) = \operatorname{tg}\beta)$,

где $\alpha(\beta)$ – угол наклона к оси $Ox(Oy)$ касательной, проведенной в точке $P_0(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ к линии пересечения поверхности S и плоскости $y = y_0$ $(x = x_0)$.

Физический смысл частных производных

Частная производная $z'_x(x_0;y_0)$- это скорость изменения z относительно переменной х в точке $P_0(x_0;y_0)$.

Частная производная $z'_y(x_0;y_0)$- это скорость изменения z относительно переменной у в той же точке.

Пример

При вычислении частной производной функции нескольких переменных по одной из этих переменных используют правило дифференцирования функции одной переменной, считая все остальные переменные постоянными.

$$z = x^2 + 7x^2y^3 + y + 4$$

$$z'_x = 2x + 14xy^3$$

$$z'_y = 21x^2y^2 + 1$$

$$z = e^{x^3 + y^2}$$

$$z'_x = e^{x^3 + y^2} \cdot 3x^2$$

$$z'_y = e^{x^3 + y^2} \cdot 2y$$

Определение дифференцируемой функции

Функция $z = f(x, y)$ называется ***дифференцируемой в точке М(x,y),*** если ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho) ,$$

где Δx и Δy -произвольные приращения аргументов x и y в некоторой окрестности точки М(x,y), А и В – постоянные, независящие от Δx и Δy , $o(\rho)$- бесконечно малая более высокого порядка, чем $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ -расстояние между $M(x,y)$ и $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$

Или: функция называется дифференцируемой в точке, если

ее полное приращение можно представить в виде

$$\Delta z = A \cdot \Delta x + B \cdot \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y,$$

где $\alpha_1 \to 0$ и $\alpha_2 \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$

Полный дифференциал:

$$dz = A\Delta x + B\Delta y$$

Что представляют собой A и B ?

Связь между дифференцируемостью и существованием частных производных функции двух переменных

Если функция z = f(x; y) имеет в точке M(x; y) дифферен-циал $dz = A\Delta x + B\Delta y$, то в этой точке существуют и обе частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, причем

$$A = \frac{\partial z}{\partial x}, \ B = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Доказательство

Дадим приращение Δx величине x, а y оставляем постоянным $(\Delta y = 0)$,

Тогда $dz = A\Delta x$,

$$\Delta_x z = dz + o(\Delta\rho) = A \cdot \Delta x + o(|\Delta x|),$$

так как $\Delta\rho = |\Delta x|$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(A + \frac{o(|\Delta x|)}{\Delta x} \right) = A$$

Это значит, существует $\dfrac{\partial z}{\partial x} = A.$ Аналогично, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = B.$

Полный дифференциал.

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

Теорема

Если в точке (x; y) частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ существуют и непрерывны, то в этой точке функция имеет дифференциал.

Теорема. Связь между дифференцируемостью и непрерывностью функции в точке.

Если функция z = f(x; y) дифференцируема в точке (x; y), то она непрерывна в этой точке.

Доказательство.

По условию функция дифференцируема, это значит ее полное приращение можно представить в виде:

$$\Delta z = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$$

тогда

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

Частные производные высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z = f(x,y)$ называются частные производные от частных производных первого порядка.

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$z''_{xy} = (z'_x)'_y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

$$z''_{yy} = (z'_y)'_y \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

Теорема

Пусть функция z = f(x; y) в некоторой окрестности точки (x; y) имеет смешанные производные z''_{xy} и z''_{yx} , причем они непрерывны в этой точке. Тогда в этой точке смешанные производные равны между собой:

$$\boxed{z''_{xy} = z''_{yx}}$$

Пример

Найти частные производные второго порядка

$$\boxed{z = 3x^4 + y^3 - xy + x^2y^5 + 4x - 7y + 10}$$

$$z'_x = 12x^3 - y + 2xy^5 + 4, \quad z'_y = 3y^2 - x + 5x^2y^4 - 7$$

$$z''_{xx} = (z'_x)'_x = 36x^2 + 2y^5, \quad z''_{xy} = (z'_x)'_y = -1 + 10xy^4,$$

$$z''_{yx} = (z'_y)'_x = -1 + 10xy^4, \quad z''_{yy} = (z'_y)'_y = 6y + 20x^2y^3$$

Экстремум функции нескольких переменных.

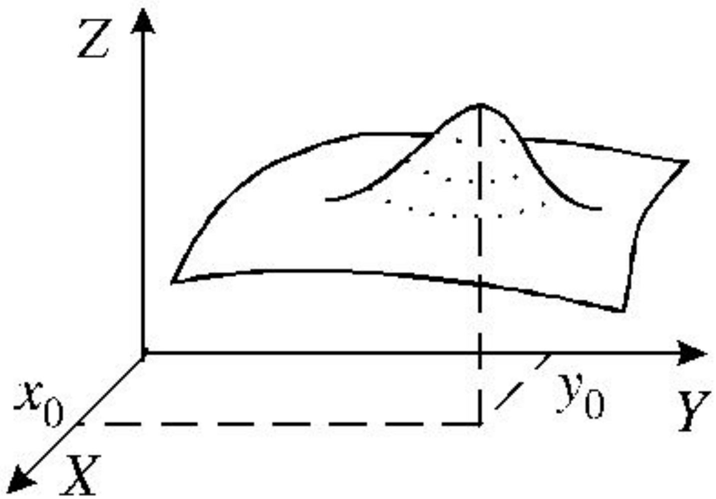
Пусть функция $z = f(x;y)$ определена в некоторой области D и точка $M_0(x_0, y_0) \in D$.

Точка M_0 называется точкой **максимума** функции $z = f(x;y)$, если для любой точки $M(x,y)$, принадлежащей δ - окрестности точки M_0 и такой, что $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) < f(M_0)$.

Точка M_0 называется точкой **минимума** функции $z = f(x;y)$, если для любой точки $M(x,y)$, принадлежащей δ - окрестности точки M_0 и такой, что $M \neq M_0$ выполняется неравенство $f(M) > f(M_0)$.

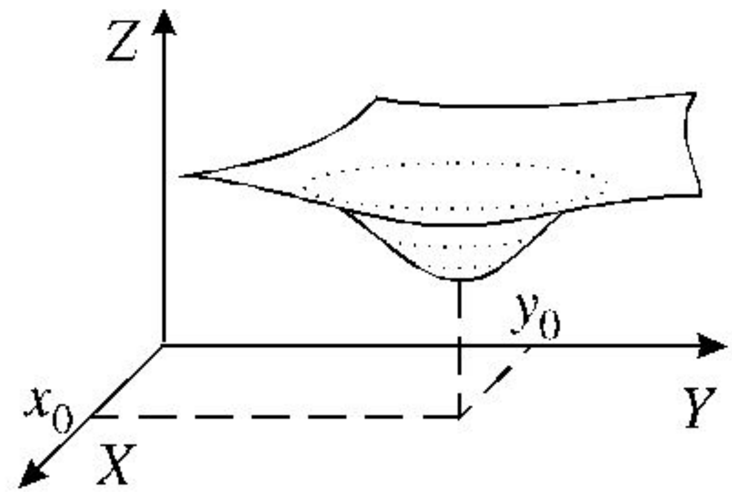
Следовательно, в точке максимума функция $z = f(x;y)$ принимает значение наибольшее, а в точке минимума – наименьшее по сравнению с ее значениями во всех достаточно близких точках. Максимум и минимум функции называются ее **экстремумами** и обозначают $\max f(x,y)$ и $\min f(x,y)$.

Геометрическое изображение точек экстремума:



$M_0(x_0,y_0)$ - точка максимума.

Рис.1



$M_0(x_0,y_0)$ - точка минимума.

Рис. 2

Необходимое условие экстремума функции

Теорема

(необходимое условие экстремума функции)

Если в точке $M(x_0, y_0)$ дифференцируемая функция z=f(x,y) имеет экстремум, то ее частные производные в этой точке равны нулю, то есть $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$

Доказательство:

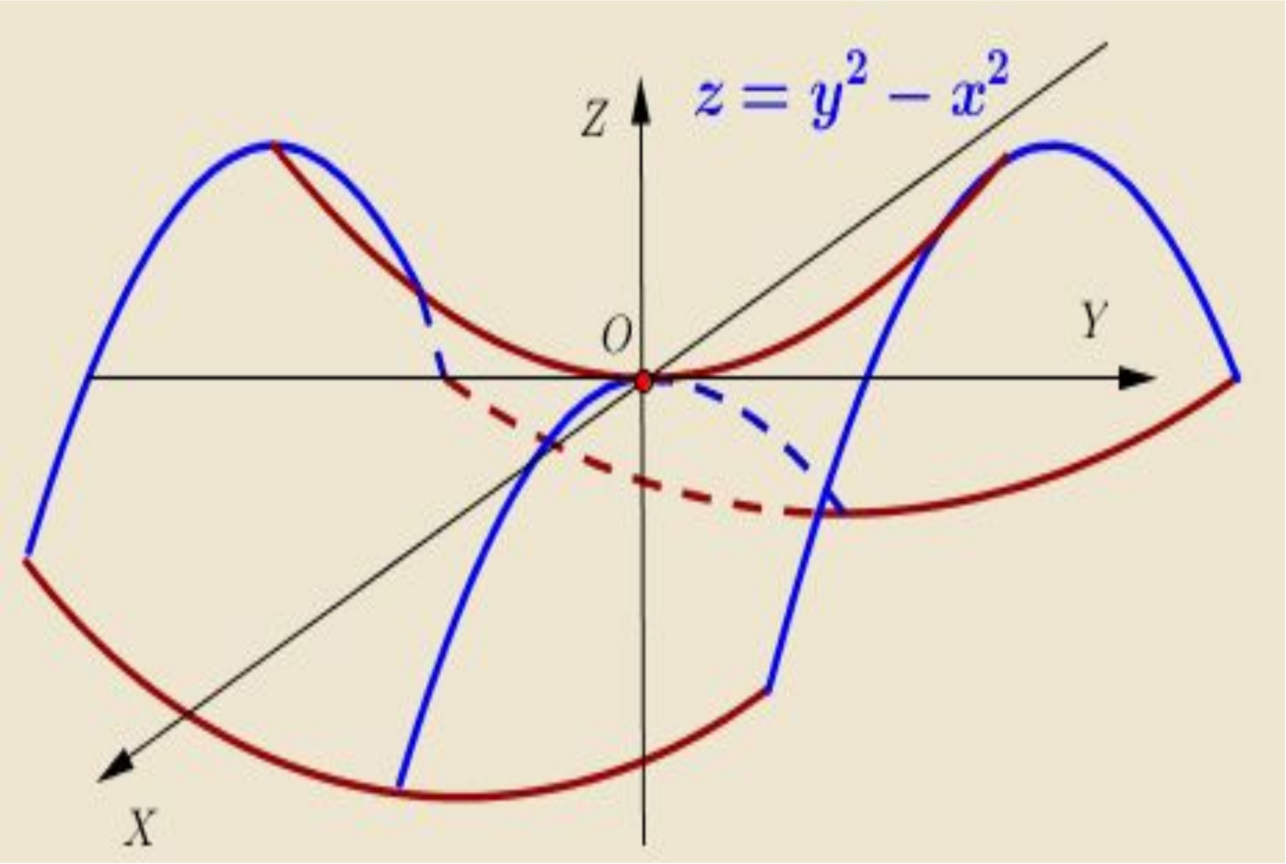
Зафиксируем одну переменную, например $y = y_0$.

Получим $f(x, y_0) = \varphi(x)$- функцию одной переменной, которая имеет экстремум при $x = x_0$

Согласно необходимому условию экстремума функции одной переменной $\varphi'(x_0) = 0 \Rightarrow f'_x(x_0, y_0) = 0$

Аналогично $f'_y(x_0, y_0) = 0$

Пример $z = y^2 - x^2$, $z'_x = -2x, \quad z'_y = 2y$



Необходимые и достаточные условия существования экстремума

Необходимые условия экстремума. Если функция $z = f(x;y)$ достигает экстремума в точке $M_0(x_0, y_0)$, то её частные производные в этой точке равны нулю или не существуют:

$$z'_x(x_0;y_0)=0, \quad z'_y(x_0;y_0)=0$$

Точки, в которых частные производные первого порядка равны нулю или не существуют называются *критическими точками* функции.

Для нахождения экстремума функции в данной области необходимо каждую критическую точку подвергнуть дополнительному исследованию.

Достаточные условия экстремума. Пусть функция $z = f(x;y)$ в некоторой области D имеет непрерывные частные производные и точка $M_0(x_0, y_0)$ есть критическая точка данной функции. Обозначим:

$$A = f''_{xx}(x_0;y_0), \quad B = f''_{xy}(x_0;y_0), \quad C = f''_{yy}(x_0;y_0) \quad \text{и} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}.$$

Тогда:

1) Если $\Delta > 0, \ A > 0$, то функция в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет минимум;

2) Если $\Delta > 0, \ A < 0$, то функция в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет максимум;

3) Если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция экстремума не имеет.

Пример

Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1$$