Дискретна математика

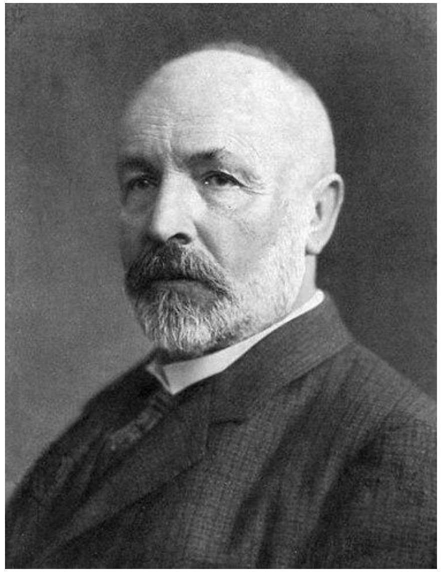
Розділ математики, що вивчає дискретні об’єкти та структури, а також застосування цих об’єктів та структур.

- Дискретні сигнали менше піддаються спотворенням
- Спотворення легше виявляти і виправляти
- Дискретні сигнали легше обробляти і зберігати

Література:

1. Зельдович Я. Б. Мышкис А.Д. … Элементы прикладной математики
2. Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов
3. Нікольський Ю.В., Пасічник В.В., Щербина Ю.М. Дискретна математика
4. Бондаренко М.Ф., Булоус Н.В., Руткас А.Г. Комп’ютерна дискретна математика.

Розділ 1. Множини



Поняття множини ми відносимо до первинних понять математики (аксіоматичних).

Основоположник теорії множин Георг Кантор

(1845-1918)

Множина – зібрання предметів, які можна розрізнити між собою, але які уявляються разом, як одне ціле.

«Предмети» - елементи.

A, B, C…

a, b, c, a_1, a_2, …

$a \in A$, $b \notin A$ $\quad b \,\overline{\in}\, A \quad A = B$

Розділ 1. Множини

- $A = B$

$(A = B) \Leftrightarrow (\forall a \in A \Longrightarrow a \in B)$and $(\forall b \in B \Longrightarrow b \in A)$

Приклад: {3, 4, 5, 8} = {8, 3, 5, 4}

Зауваження {} – невпорядковані множини

() – впорядковані множини

(3, 4, 5, 8) ≠ (8, 3, 5, 4)

Мультимножина множини A – $M(A)$

$$A = \{3, 4, 5, 6\} \quad M(A) = \{3, 3, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6\}$$

Об’єм множини

Одноелементна множина

Порожня множина $\emptyset$

- Підмножини

Якщо всі елементи однієї множини належать іншій множині, то кажуть, що існує відношення включення:

$A \subseteq B$ – включено

$B \supseteq A$ – включає

При цьому A підмножина множини B, а B – надмножина A.

Якщо такого відношення не існує, то $A \not\subset B$.

Існують ще знаки $\subsetneq, \supsetneq, \not\supseteq, \not\subseteq, \not\supset$.

Зрозуміло, що $A \subseteq A$ – це відношення рівності через включення.
Використовуючи його – рівність множин можна визначити ще й так:

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B) \text{and } (B \subseteq A)$$

Розділ 1. Множини

- Теорема

Порожня множина є підмножиною будь якої множини

Доведення від протилежного, а не від противного

Допустимо, що $\emptyset \subseteq A = false$

Це означає, що існує якийсь елемент $a \notin A$, але при цьому $a \in \emptyset$.

А порожня множина за визначенням не містить жодного елемента.

Задання множин:

- Переліком чи вказанням
- Предикатом у вигляді форми $x = \{x|P(x)\}$ або $x = \{x: P(x)\}$

$x = \{x|x^2 = 4\}$; $x = \{x|\text{просте число}\}$; з обмеженням $x = \{x \in A|P(x)\}$

Множина-ступінь (булеан)

Власні і невласні підмножини

Множина, що складається з усіх можливих підмножин даної множини – булеан

$$A = \{a, b, c\} \quad P(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Об’єм булеана множини з n елементів - 2^n

Універсальна множина (універсум)

1. Універсум містить всі елементи, що розглядаються в даній конкретній задачі
2. Всі множини, що розглядаються в даній задачі є підмножинами універсуму.

- Теоретико-множинні операції

- Об'єднання $A \cup B$

$$A \cup B = \{x | x \in A \; or \quad x \in B\}$$

Приклад: $A = \{1, 2, 3\}; \quad B = \{\, 2, 3, 4\}; \quad A \cup B = \{1, 2, 3, 4\};$

- Переріз (перетин, добуток) $A \cap B$

$$A \cap B = \{x | x \in A \; and \; x \in B\}$$

Приклад: $A = \{1, 2, 3\}; \quad B = \{\, 2, 3, 4\}; \quad A \cap B = \{\, 2, 3\};$

Поняття покриття і розбиття

- Теоретико-множинні операції

- Різниця множин $A\backslash \mathrm{B}$

$$A\backslash B = \{x | x \in A \; and \;\; x \notin B\}$$

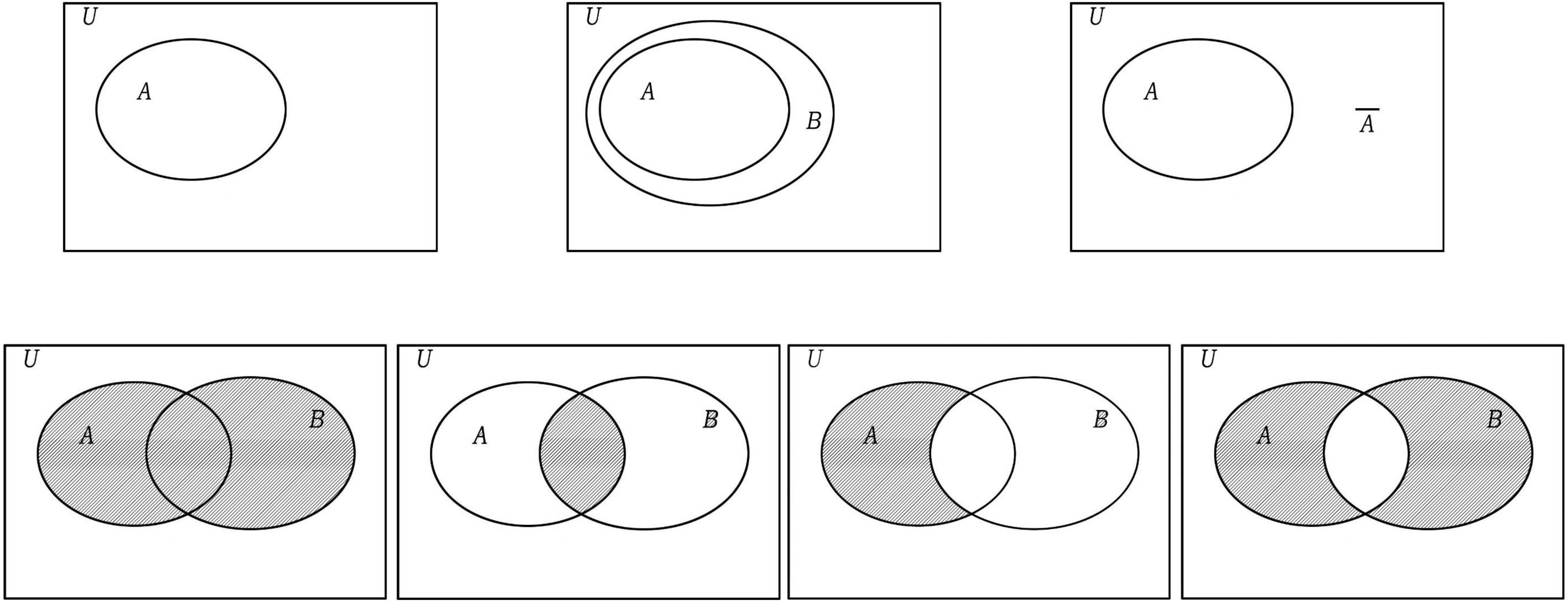
Приклад: $A = \{1, 2, 3\}$; $\quad B = \{\,2, 3, 4\}$; $\quad A\backslash B = \{1\}$; $B\backslash A = \{4\}$

- Диз'юнктивна сума (симетрична різниця)

$$A \oplus B = \{x | (x \in A \; or \; x \in B) and \; x \notin A \cap B\}$$

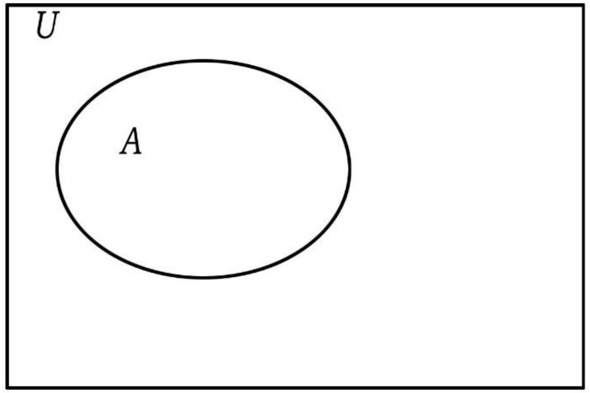
Приклад: $A = \{1, 2, 3\}$; $\quad B = \{\,2, 3, 4\}$; $\quad A \oplus B = \{1, 4\}$;

Діаграми Ейлера

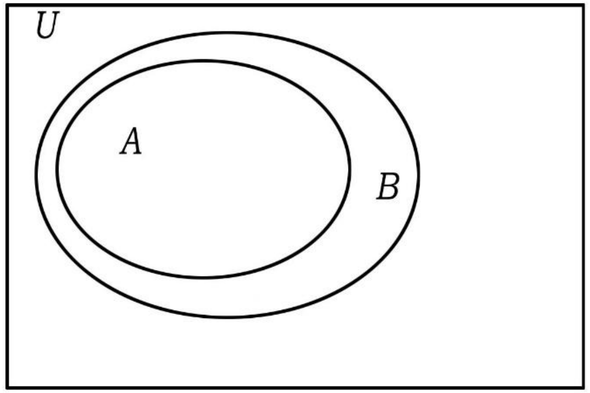


Розділ 1. Множини

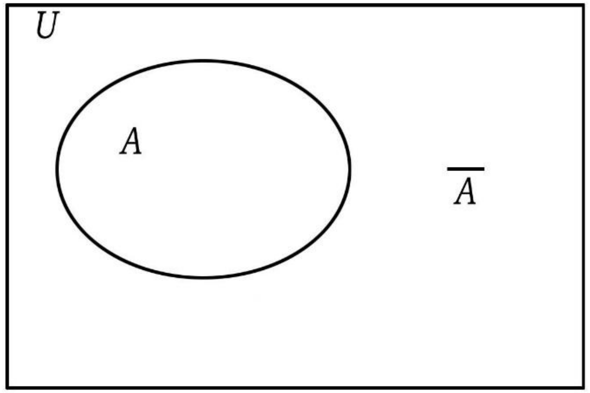
- Діаграми Ейлера



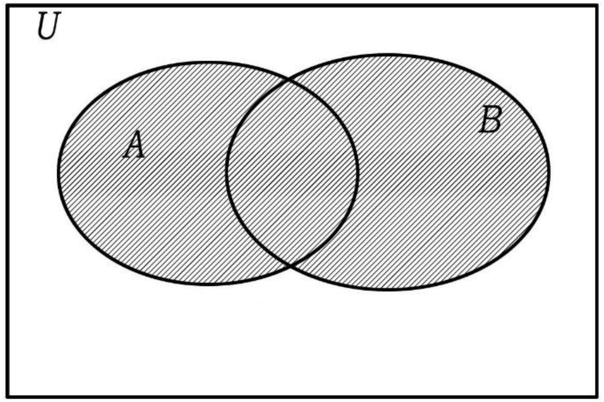
A



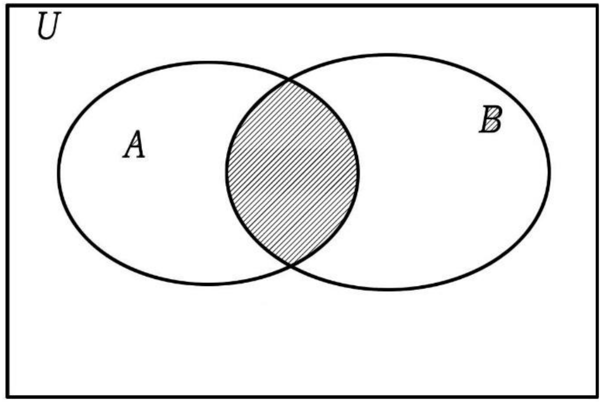
$A \subseteq B$



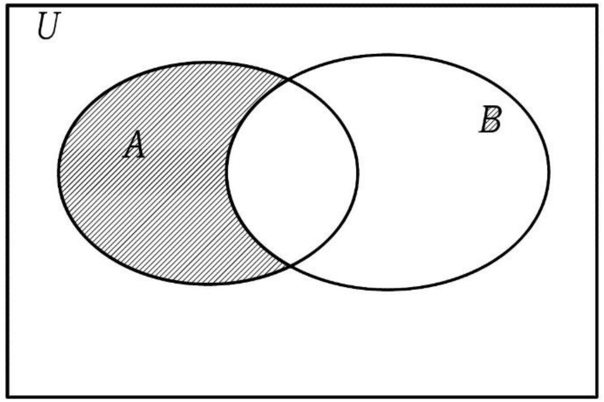
$\bar{A}$



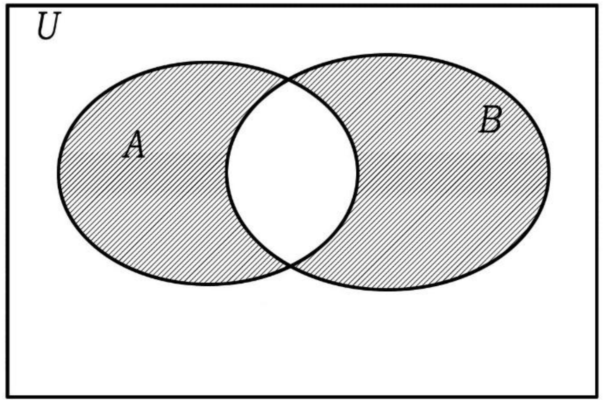
$A \cup B$



$A \cap B$



$A \backslash B$



$A \oplus B$

Розділ 1. Множини

1. $A \cup B = B \cup A$ комутативний закон для об’єднання і перерізу

   $A \cap B = B \cap A$

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ асоціативний закон

   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ дистрибутивний закон !!!!!!!

   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

4. $A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$ Властивості універсуму і порожньої

5. $A \cup \bar{A} = U$ $A \cap \bar{A} = \emptyset$

6. $A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$

7. $\overline{\emptyset} = U$ $\overline{U} = \emptyset$

8. $A \cup A = A$ $A \cap A = A$ закон ідемпотентності

9. $A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$ закон поглинання

10. $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ закон де Моргана

11. Якщо $A \cup B = U \quad i \quad A \cap B = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad B = \bar{A}$

12. $\bar{A} = U \backslash \mathrm{A}$

13. $\bar{\bar{A}} = A$

14. $A \backslash B = A \cap \bar{B}$

15. $A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$

16. $A \oplus B = B \oplus A$

17. $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$

18. $A \oplus \emptyset = \emptyset \oplus A = A$

19. $(A \subseteq B) \Longrightarrow \{(A \cap B) = A; (A \cup B) = B; \;\; A \cap \bar{B} = \emptyset$

20. $(A = B) \Longrightarrow A \oplus B = \emptyset$

- Перші 10 властивостей задані парами тотожностей, що називаються дуальними.

Одне з пари можна отримати з іншого заміною $U \longleftrightarrow \emptyset$ та $\cup \longleftrightarrow \cap$.

Вказані символи носять теж назву дуальних

Принцип дуальності: Якщо в довільній теоремі замінити всі символи на відповідні дуальні, то отримаємо теж вірну теорему.

Будь яку властивість, крім перших п’яти можна довести, використовуючи перших п’ять. Їх доводять виключно з відношень належності

- Виходячи з властивостей асоціативності та комутативності, випливає узагальнення операції перерізу та об'єднання для довільної кількості множин

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_n \equiv \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ $\sum_{i=1}^{3} x_i$

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n \equiv \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

Завдяки цьому, можна узагальнити закон де Моргана

$\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}$ $\bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}$

- Рівняння з множинами. Алгоритм:

1. Рівність перетворюється до диз'юнктивної суми лівої і правої частин, яка прирівнюється до $\emptyset$. Це можна зробити за властивістю 20.

2. Одержане рівняння зводять до вигляду

$$(M \cap X) \cup (N \cap \overline{X}) = \emptyset$$

3. Об'єднання двох множин збігається з порожньою множиною лише тоді, коли обидві є порожніми, отже

$$(M \cap X) = \emptyset$$
$$(N \cap \overline{X}) = \emptyset$$

4. Ці рівняння мають розв'язки, якщо

$$N \subset X$$
$$X \subset \overline{M}$$

Виходячи з властивості транзитивності маємо розв'язок: $N \subset X \subset \overline{M}$, який існує лише за умови $N \subset \overline{M}$ - умова його існування.

Розділ 1. Множини

Розглянемо приклад:

$$X \cup C = D$$

$$(X \cup C) \oplus D = \emptyset$$

$$A \oplus B = (A \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap B)$$

$$((X \cup C) \cap \bar{D})) \cup ((\overline{X \cup C}) \cap D) = \emptyset$$

$$(X \cup C) \cap \bar{D}) = \emptyset$$
$$(\overline{X \cup C}) \cap D = \emptyset$$

$$(X \cap \overline{D)} \cup (C \cap \overline{D)} = \emptyset$$
$$\bar{X} \cap \bar{C} \cap D = \emptyset$$

$$X \cap \bar{D} = \emptyset$$
$$C \cap \bar{D} = \emptyset \qquad \Longrightarrow$$
$$\bar{X} \cap (\bar{C} \cap D) = \emptyset$$

$$X \subset D$$
$$C \subset D$$
$$X \subset \overline{(\bar{C} \cap D)}$$

$$X \subset D$$
$$C \subset D$$
$$X \supset D \backslash C$$

$C \subset D$ *умова існування*

$D \backslash C \subset X \subset D$ *розв'язок*

- Конкретні дані

$$C = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$D \setminus \mathrm{C} = \{5, 6\}$$

Розв'язки:

$$\{5, 6\} \subset X \subset \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Тобто, довільна підмножина D, що містить елементи $\{5, 6\}$

- Декартовий добуток множин

Нехай задано дві множини A і B.

Декартовим добутком цих множин є множина всіх впорядкованих пар елементів (a, b), в яких $a \in A,\ b \in B$.

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

Приклад: $A = \{a_1, a_2, a_3\}$

$$B = \{b_1, b_2\}$$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_1), (a_3, b_2)\}$$

$$A \times B \neq B \times A$$

$$A \times (B \times C) \neq (A \times B) \times C$$

$$\big(a, (b, c)\big) \neq ((a, b), c)$$

- Покажемо останнє, розписавши ліву і праву частини останньої рівності

$A \times (B \times C) = \{(a_1, (b_1, c_1)), \big(a_2, (b_1, c_1)\big), \dots\}$

$(A \times B) \times C = \{((a_1, b_1), c_1), ((a_2, b_1), c_1), \dots\}$

Але виконується дистрибутивний закон відносно об'єднання, перерізу, різниці:

$$(A_1 \cup A_2) \times B = A_1 \times B \cup A_2 \times B$$
$$(A_1 \cap A_2) \times B = A_1 \times B \cap A_2 \times B$$
$$(A_1 \backslash A_2) \times B = A_1 \times B \backslash A_2 \times B$$

Узагальнення декартового добутку

$\prod_{i=1}^{n} A_i = A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n \qquad (a_1, a_2, \dots a_n)$