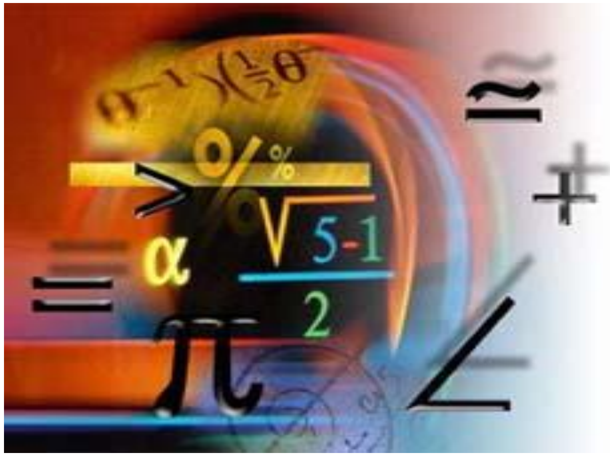


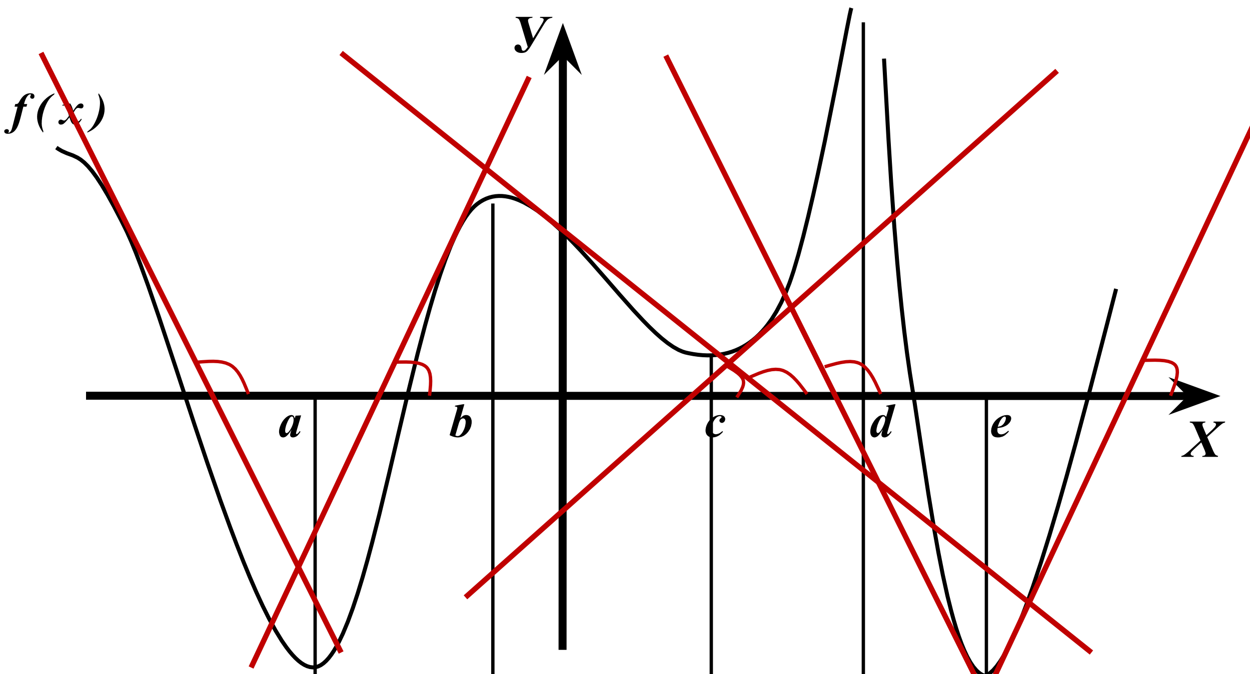
# Исследование свойств функции при помощи производной
# (задача В7 открытого банка задач ЕГЭ).

г. Мурманск МБОУ гимназия №3

Шахова Татьяна Александровна.

# Монотонность и производная.

**Исследуем, как ведет себя производная функции на промежутках возрастания и убывания.**




| $f(x)$ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ | ↘ | ↗ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | - | + | - | + | - | + |

$$f(x)\downarrow \text{при} \quad x\in(-\infty;a]\cup[b;c]\cup(d;+\infty)$$

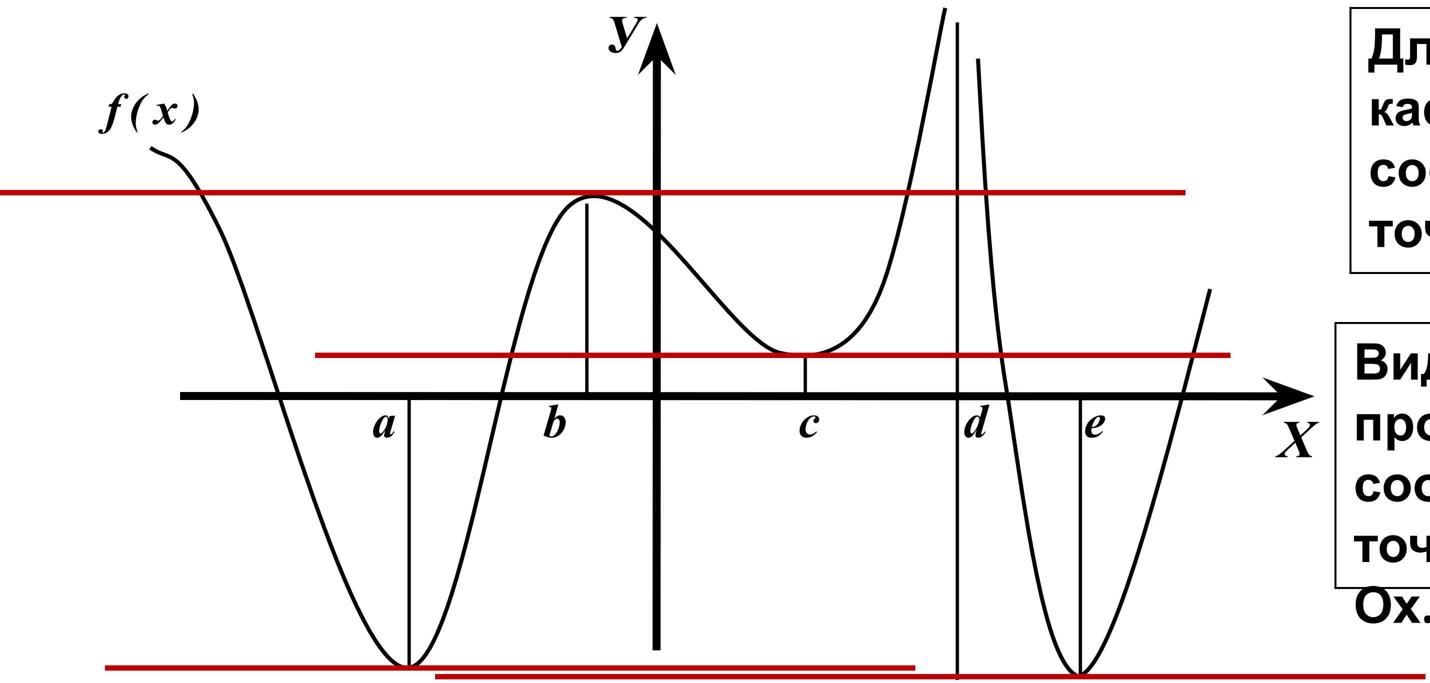
$$f(x)\uparrow \text{при} \quad x\in[a;b]\cup[c;d)\cup[e;+\infty)$$

**Для этого проведем касательные на соответствующих промежутках.**

**Знаем: если угол с положительным направлением Ох острый – производная в данной точке положительна; если тупой - отрицательна.**

# Экстремумы.

Исследуем, как ведет себя производная функции в точках экстремума.



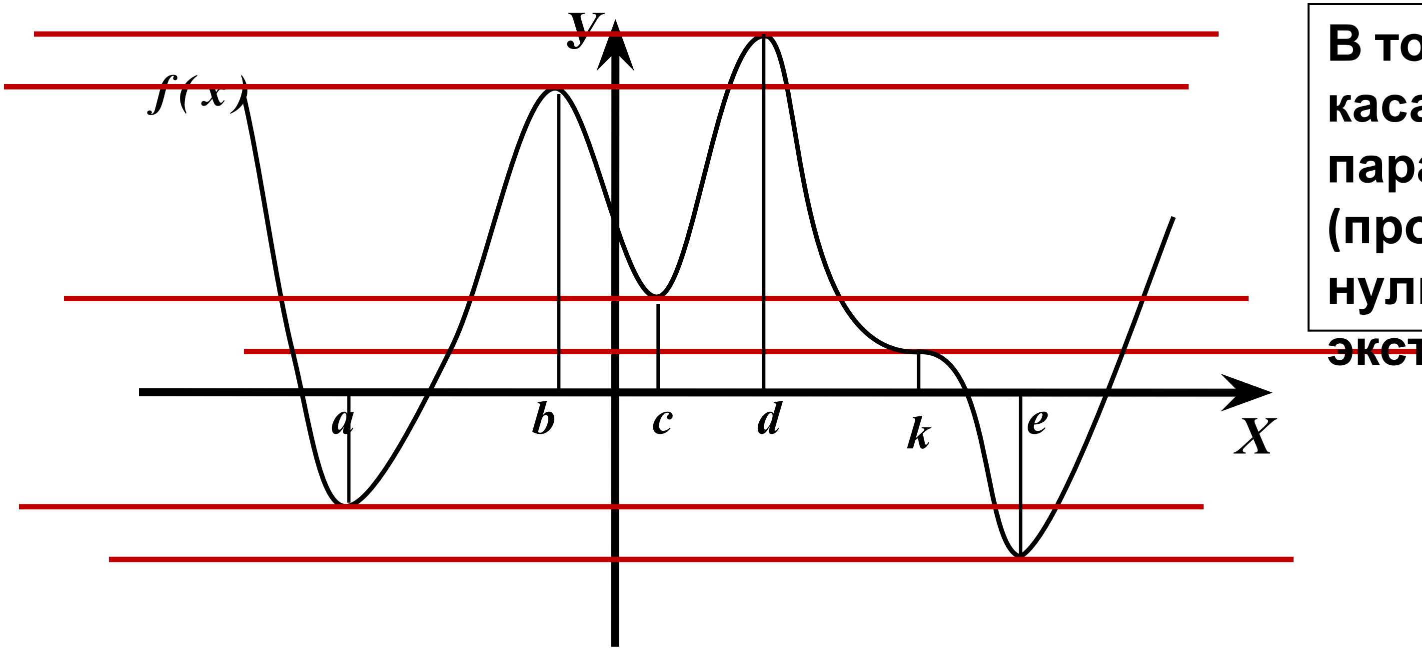

Для этого проведем касательные в соответствующих точках.

Видим: касательные, проведенные в соответствующих точках параллельны Ох.

Угловой коэффициент таких касательных =0. Следовательно производная в этих точках равна нулю.

# Экстремумы.

**Достаточно ли для экстремума, чтобы производная функции в соответствующей точке была равна нулю?**

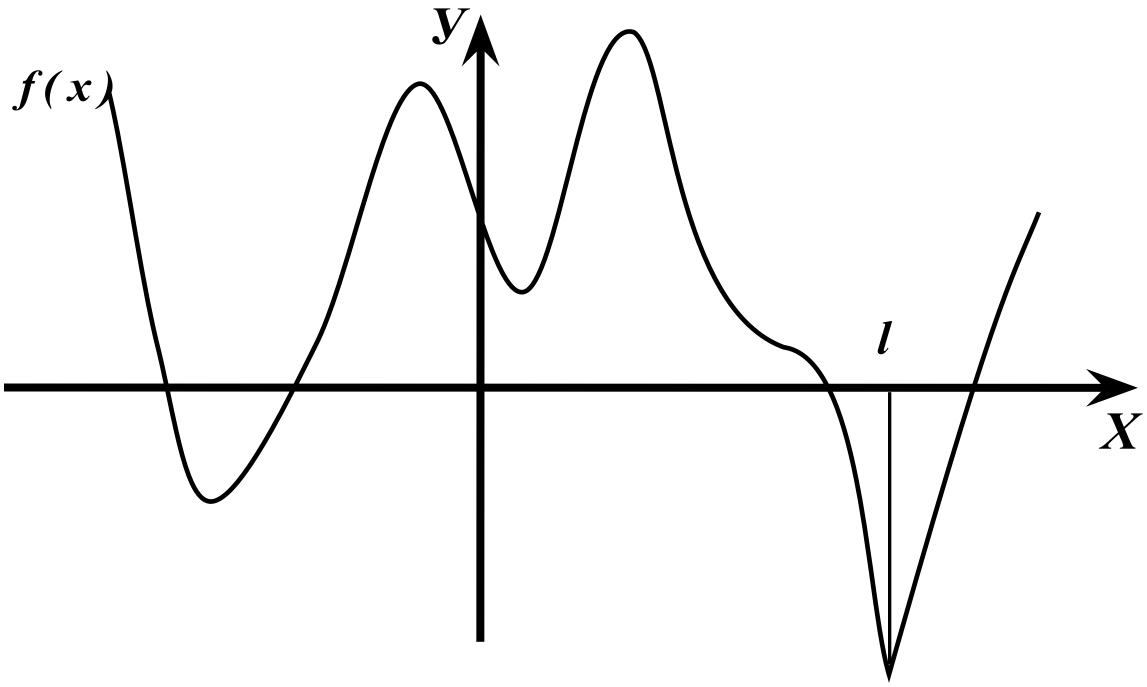



**В точке k касательная параллельна Ox (производная равна нулю), но экстремума нет.**

**Назовем внутренние точки области определения, в которых производная равна нулю стационарными.**

# Экстремумы.

Необходимо ли для экстремума, чтобы производная функции в соответствующей точке была равна нулю?



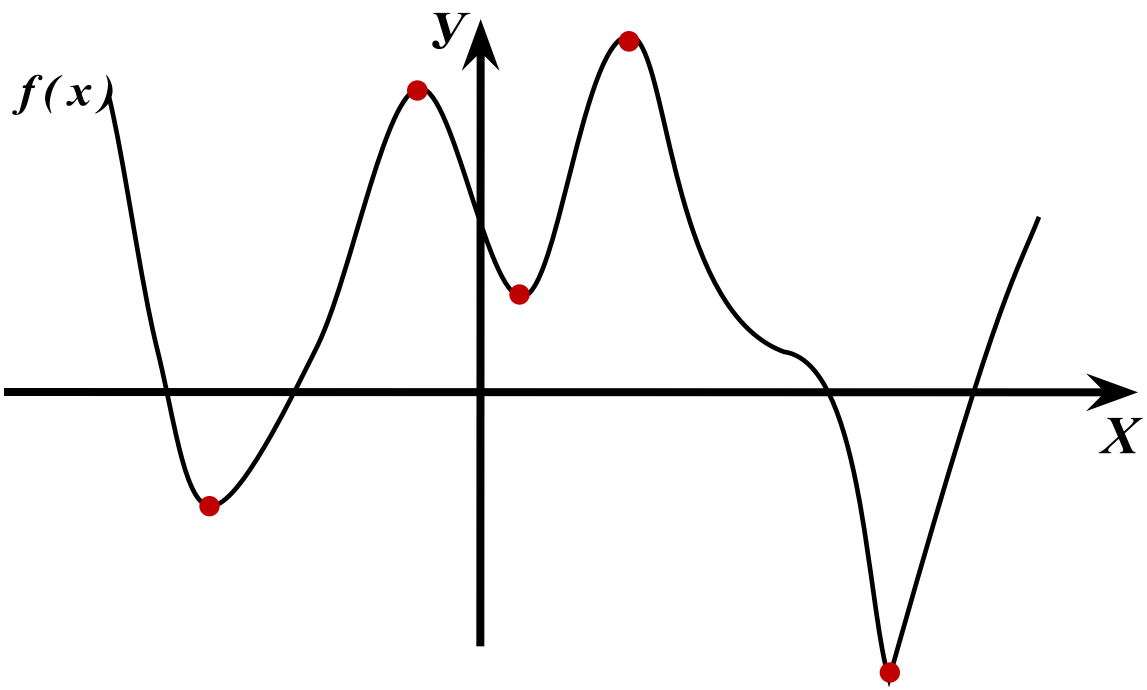

В точке $l$ касательную провести нельзя.

Тем не менее в ней существует минимум.

Назовем внутренние точки области определения, в которых производная не существует **критическими.**

# Экстремумы.

**Необходимо ли для экстремума, чтобы производная функции в соответствующей точке была равна нулю?**




**Для того, чтобы во внутренней точке области определения существовал экстремум необходимо и достаточно, чтобы производная функции в этой точке изменила знак.**

# Важно при решении задач открытого банка понимать следующее:

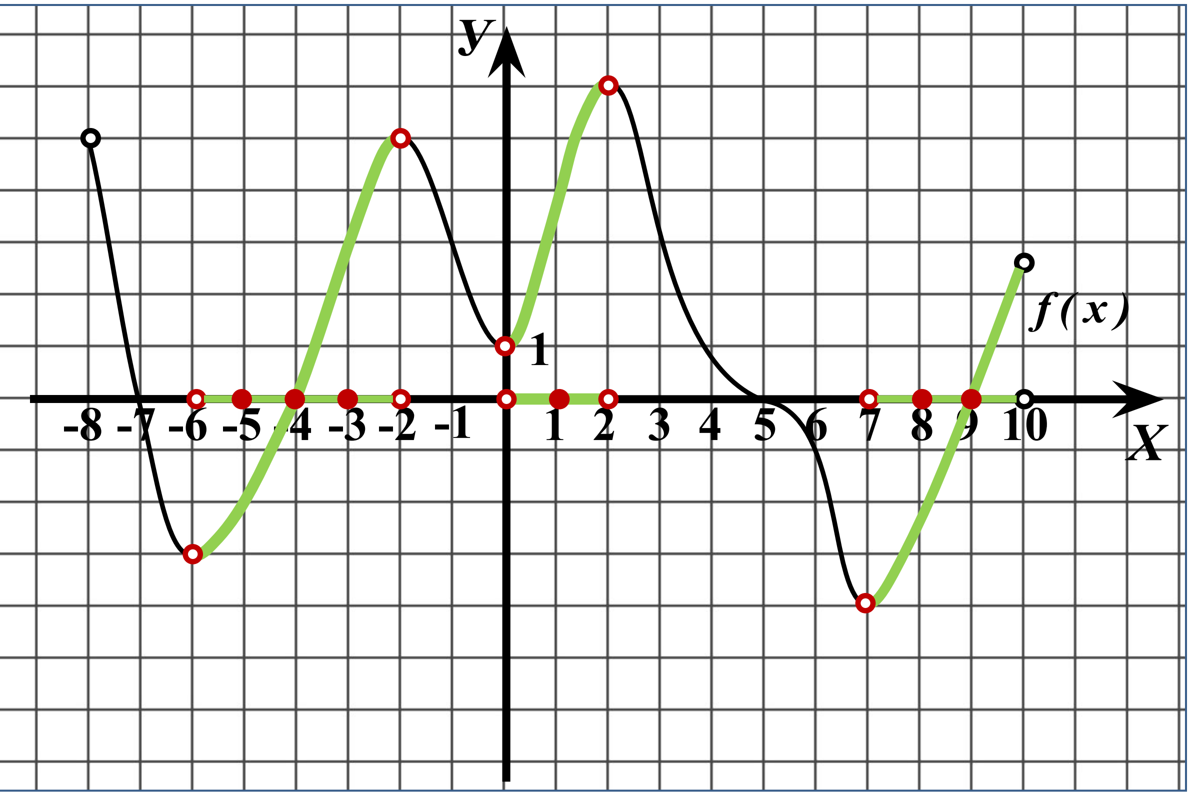
**Точка – подразумевается абсцисса точки.**

**Сумма точек – подразумевается сумма абсцисс точек.**

# Сделаем выводы.

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $f(x)\uparrow$ *при* $x \in [a;b]$ | $f'(x) \geq 0$ *при* $x \in [a;b]$ |
| $f(x)\downarrow$ *при* $x \in [a;b]$ | $f'(x) \leq 0$ *при* $x \in [a;b]$ |
| ***f(x)* имеет экстремум в точке *а*** ***а*- внутренняя точка *D(f)*** | $f'(x)=0$ ***или не существует в точке а и меняет знак*** |
| ***f(x)* имеет максимум точке *а*** ***а*- внутренняя точка *D(f)*** | $f'(x)$ ***меняет знак с плюса на минус в точке а*** |
| ***f(x)* имеет минимум точке *а*** ***а*- внутренняя точка *D(f)*** | $f'(x)$ ***меняет знак с минуса на плюс в точке а*** |

**Прототип №1. На рисунке изображён график функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Определите количество точек, в которых производная функции f(x) положительна.**

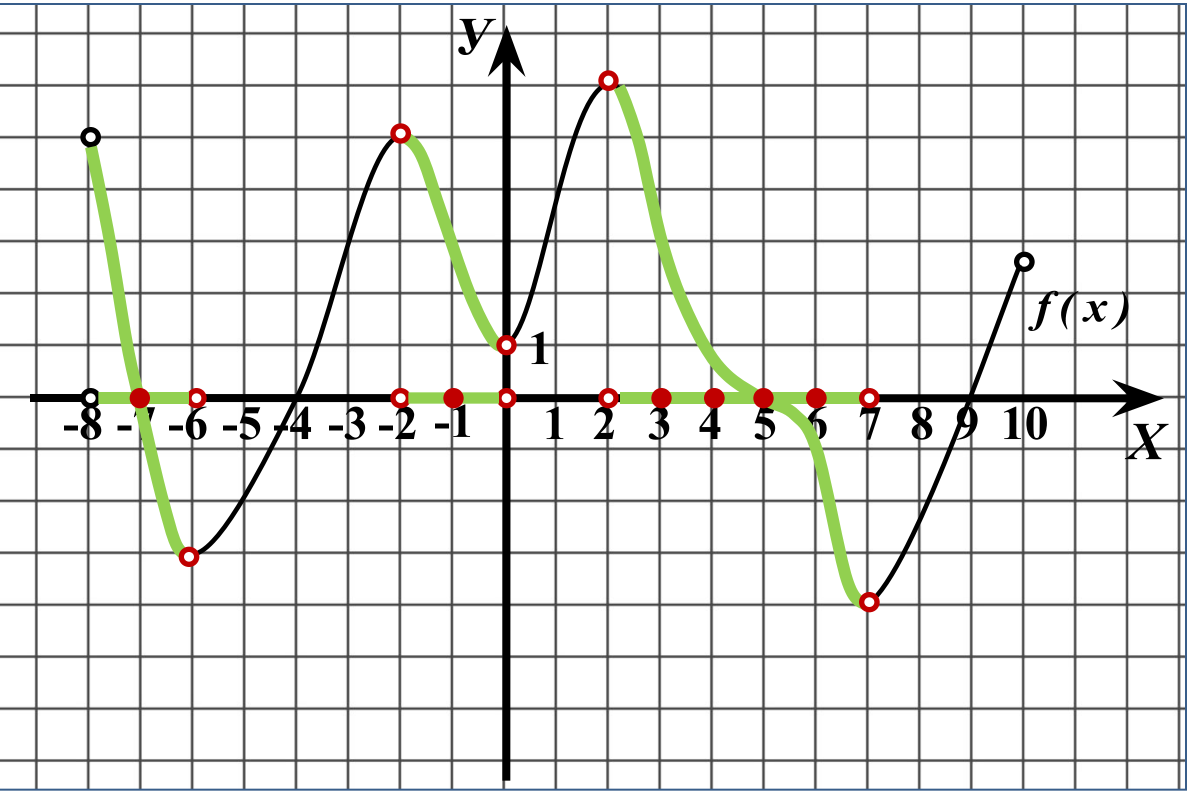



**$f'(x)>0$, если функция возрастает. За исключением точек экстремума. В них производная равна нулю. Определим промежутки возрастания функции без вышеуказанных точек.**

**Подсчитаем количество целых точек на этих промежутках.**

***Ответ : 6.***

**Прототип №2. На рисунке изображён график функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Определите количество точек, в которых производная функции f(x) отрицательна.**

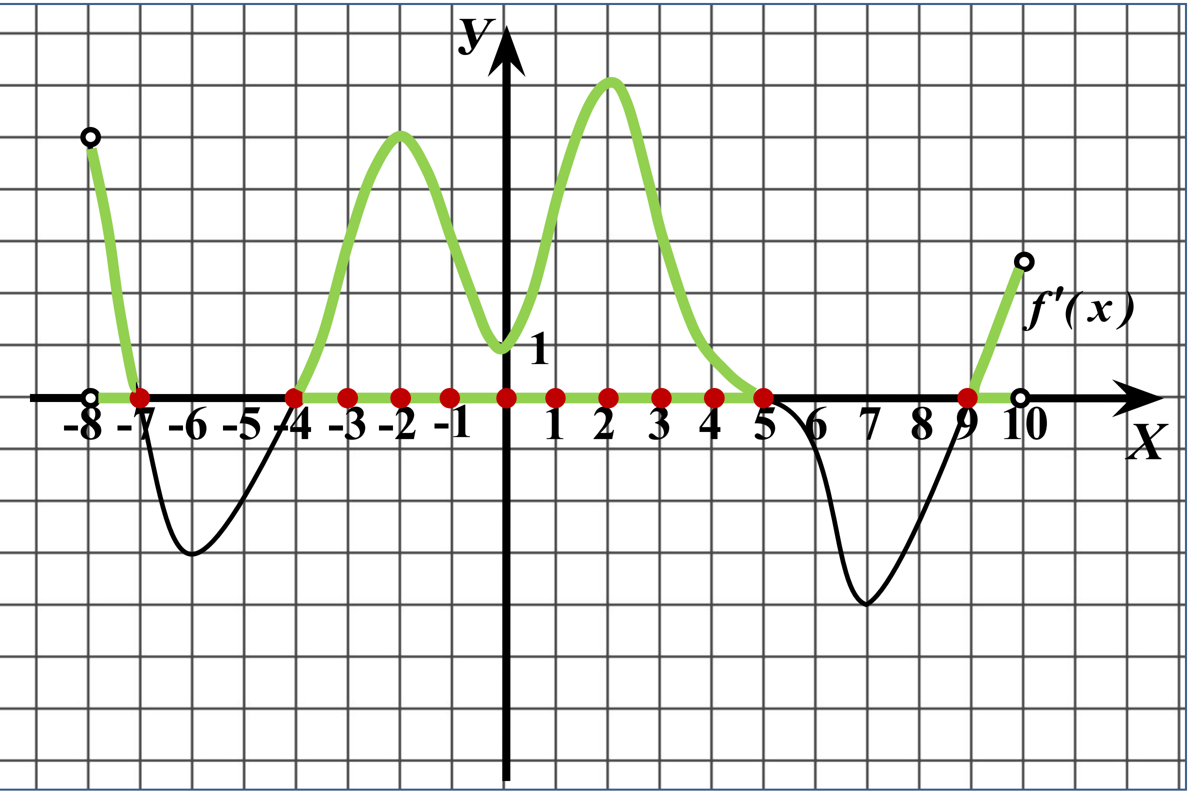



**f'(x)<0, если функция убывает. За исключением точек экстремума. В них производная равна нулю. Определим промежутки убывания функции без вышеуказанных точек.**

**Подсчитаем количество целых точек на этих промежутках.**

***Ответ : 6.***

**Прототип №3. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите промежутки возрастания функции f(x). В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.**




**Условие возрастания функции f(x) на промежутке: f´(x)≥0**

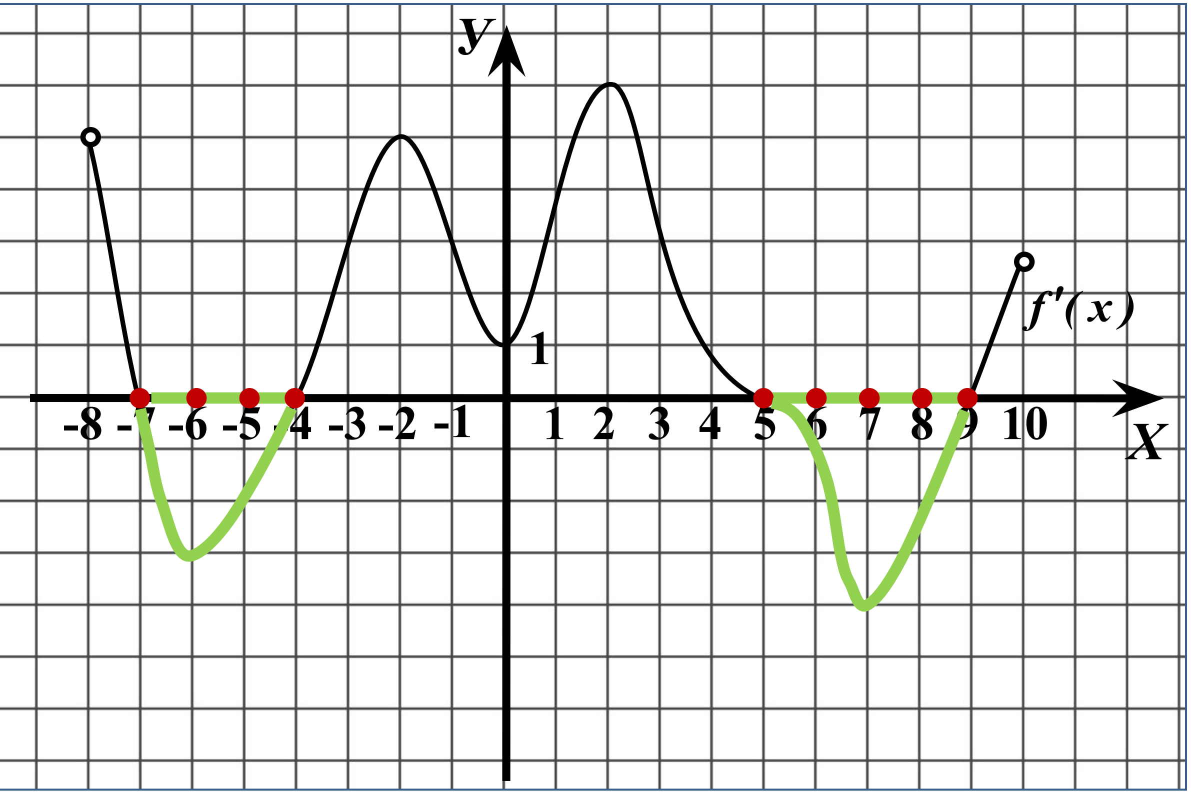
**Определим промежутки, на которых производная функции принимает неотрицательные значения (график не ниже Ox).**

**Подсчитаем сумму целых точек на этих промежутках.**

-7+(-4)+(-3)+(-2)+(-1)+0+1+2+3+4+5+9= 7

***Ответ : 7.***

**Прототип №4. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите промежутки убывания функции f(x). В ответе укажите сумму целых точек, входящих в эти промежутки.**




**Условие убывания функции f(x) на промежутке: f′(x)≤0**

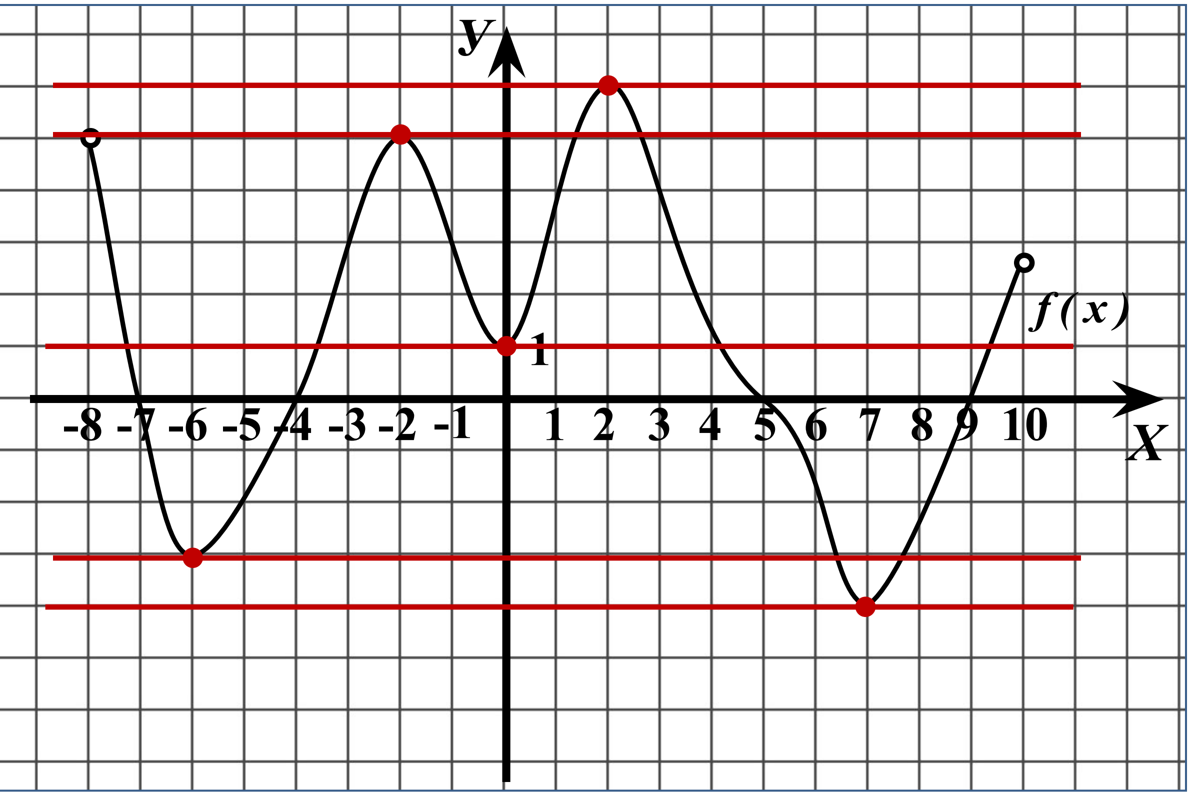
**Определим промежутки, на которых производная функции принимает неположительные значения (график не выше Ox).**

**Подсчитаем сумму целых точек на этих промежутках.**

$\cancel{-7}+(\cancel{-6})+(\cancel{-5})+(-4)+\cancel{5}+\cancel{6}+\cancel{7}+8+9=\ 13$

*Ответ : 13.*

**Прототип №5. На рисунке изображён график функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y=2.**



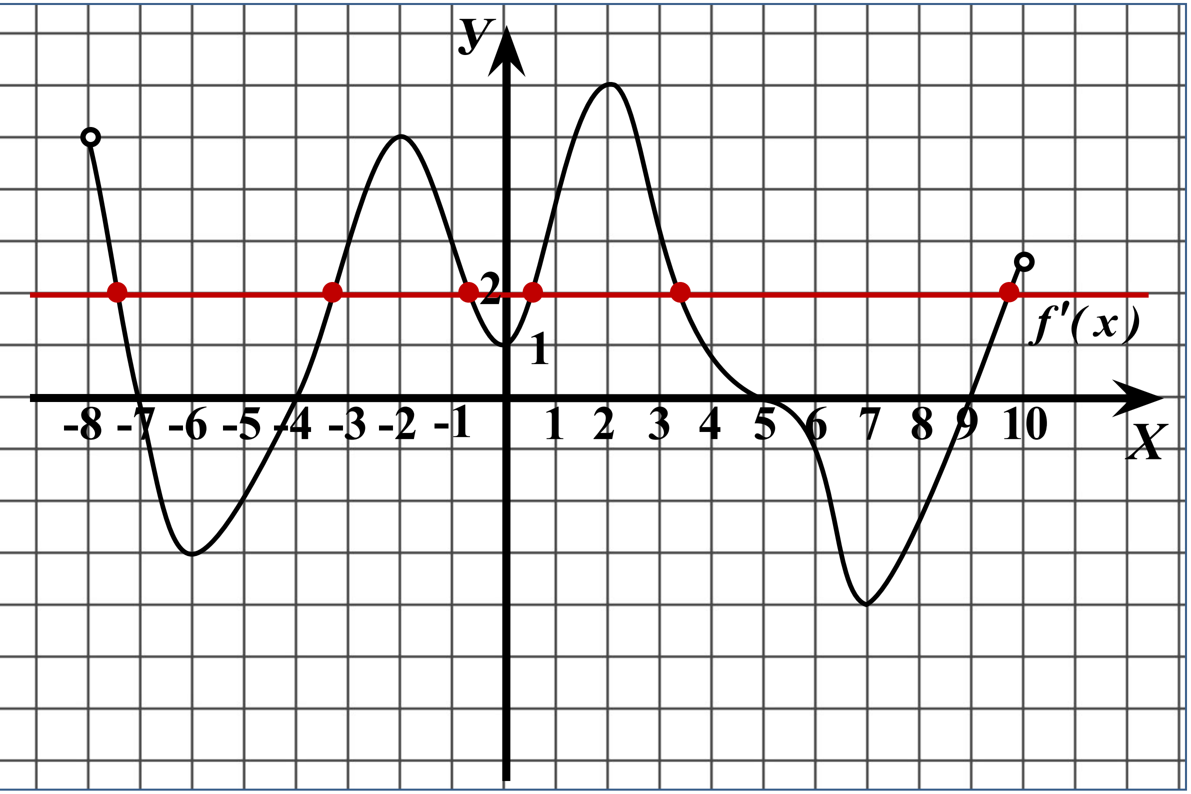

**Прямая y=2 параллельна Ох, следовательно и касательные параллельны Ох.**

**Проведем такие касательные (в точках экстремума).**

**Подсчитаем количество таких точек (касательных).**

**Ответ : 5.**

**Прототип №6. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите количество точек, в которых касательная к графику функции параллельна прямой y=2x+3 или совпадает с ней.**



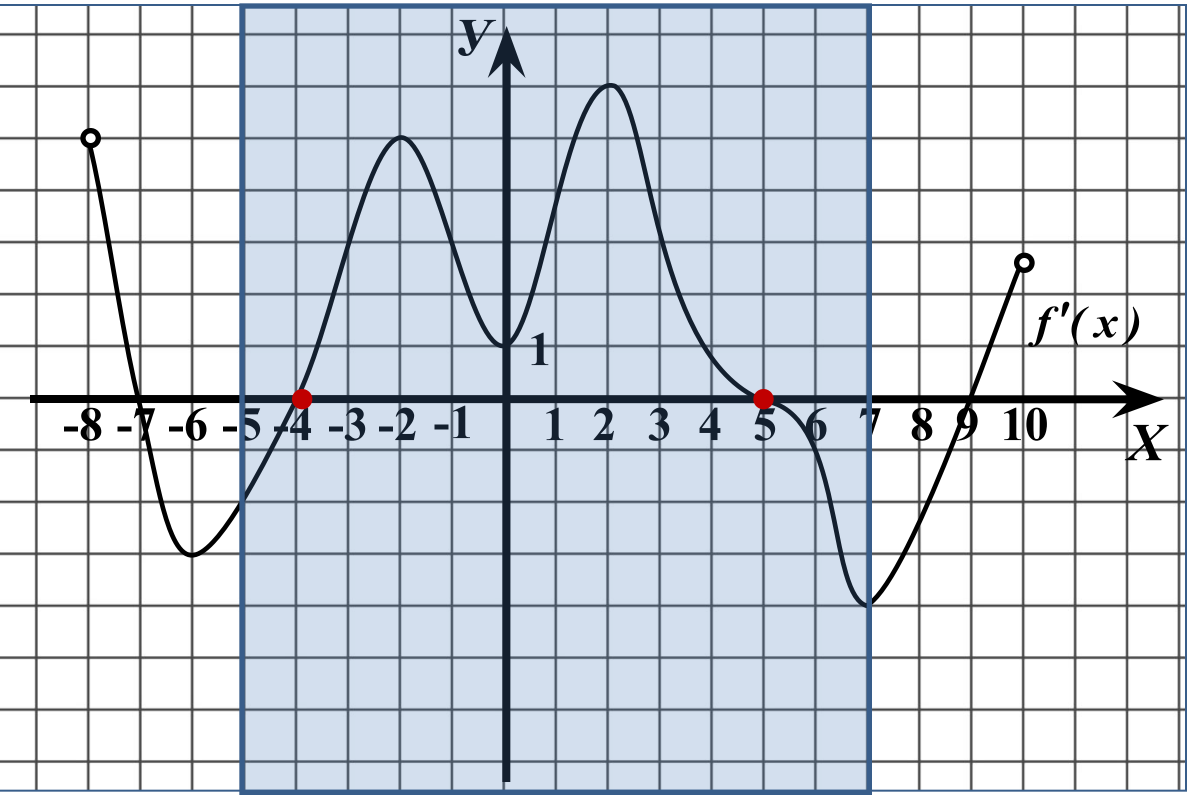

Так как касательная к графику функции f(x) параллельна прямой y=2x+3 или совпадает с ней, то она имеет такой же угловой коэффициент =2

Следовательно, значение производной в точках касания =2 (геометрический смысл производной).

Определим, сколько раз производная принимает значение = 2.

*Ответ : 6.*

**Прототип №7. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите количество точек экстремума функции на отрезке [-5;7].**

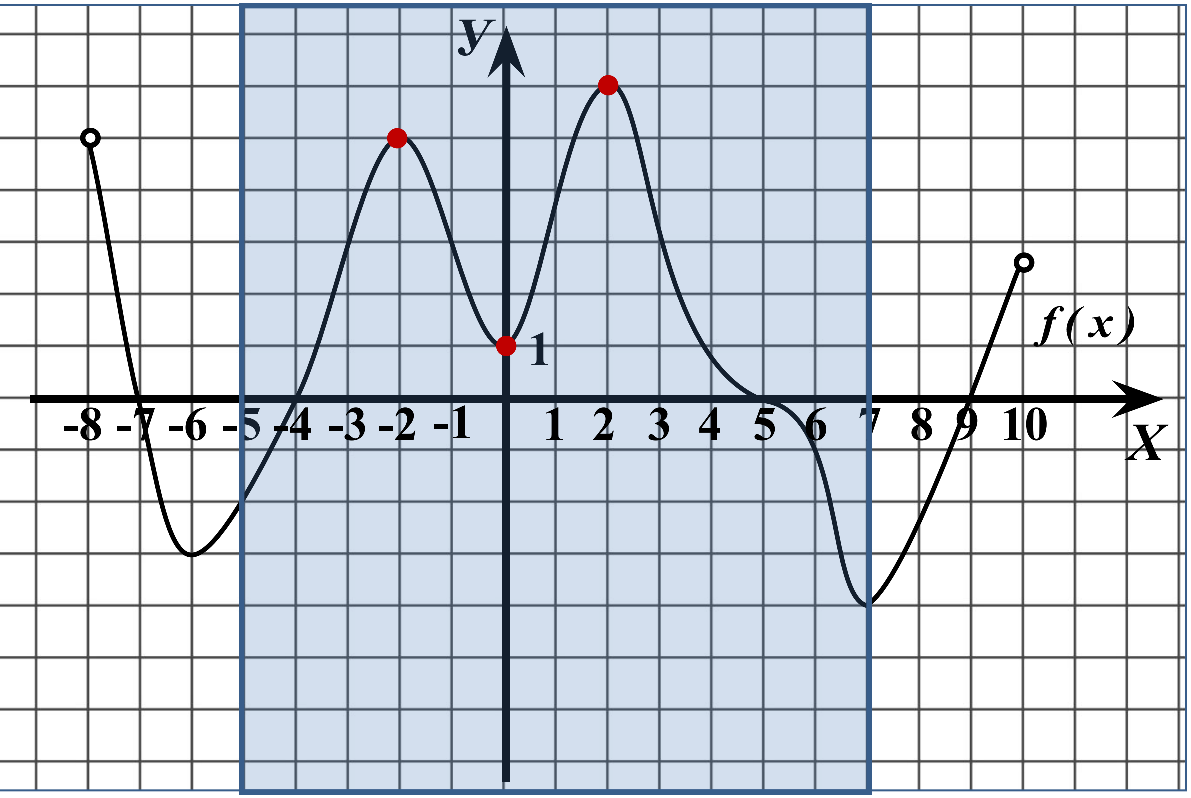



**Условие экстремума: производная меняет знак.**

**Следовательно, ищем точки пересечения графика производной с Ox на заданном промежутке.**

*Ответ : 2.*

**Прототип №8.** На рисунке изображён график функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите сумму точек экстремума функции на отрезке [-5;7].




В точке экстремума меняется характер монотонности функции (возрастание сменяется на убывание и наоборот).

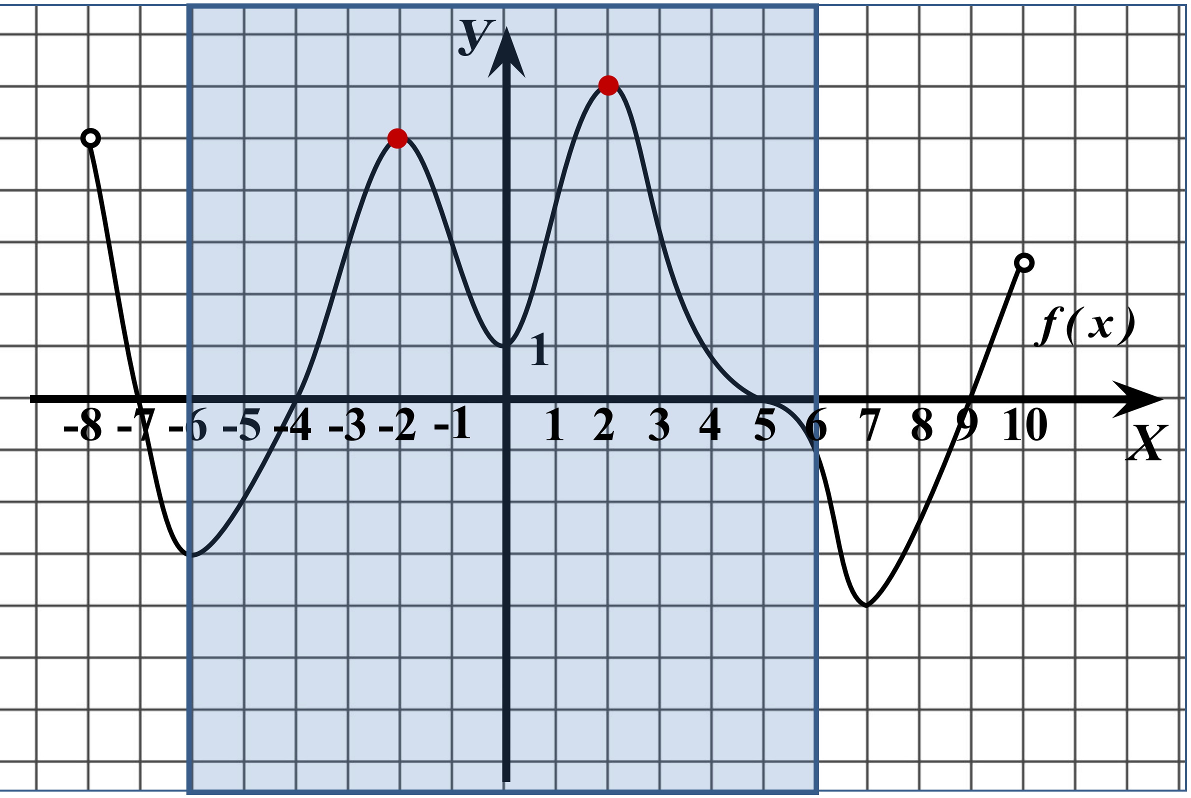
Найдем такие точки на заданном промежутке.

Подсчитаем сумму их абсцисс.

-2+0+2=0

*Ответ : 0.*

**Прототип №9. На рисунке изображён график функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите количество точек максимума функции на отрезке [-6;6].**

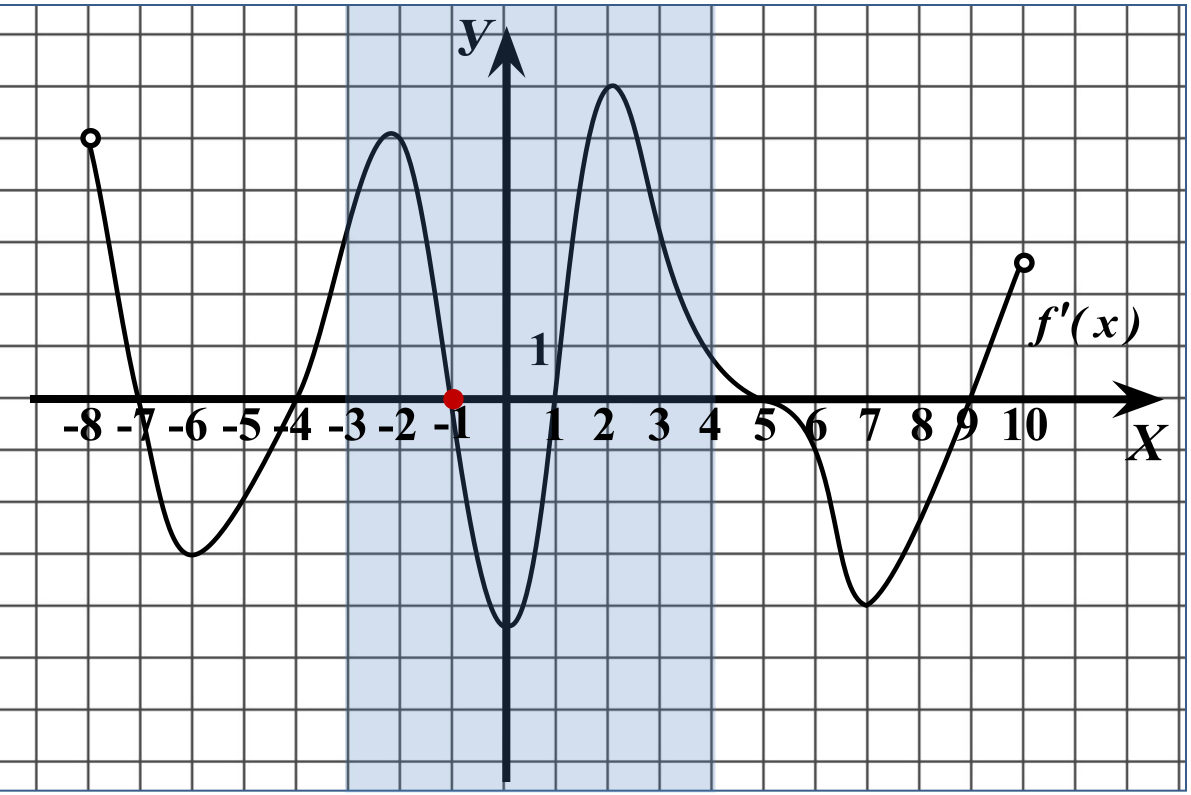



**В точке максимума возрастание сменяется на убывание.**

**Найдем такие точки на заданном промежутке.**

*Ответ : 2.*

**Прототип №10. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите количество точек максимума функции на интервале (-3;4).**

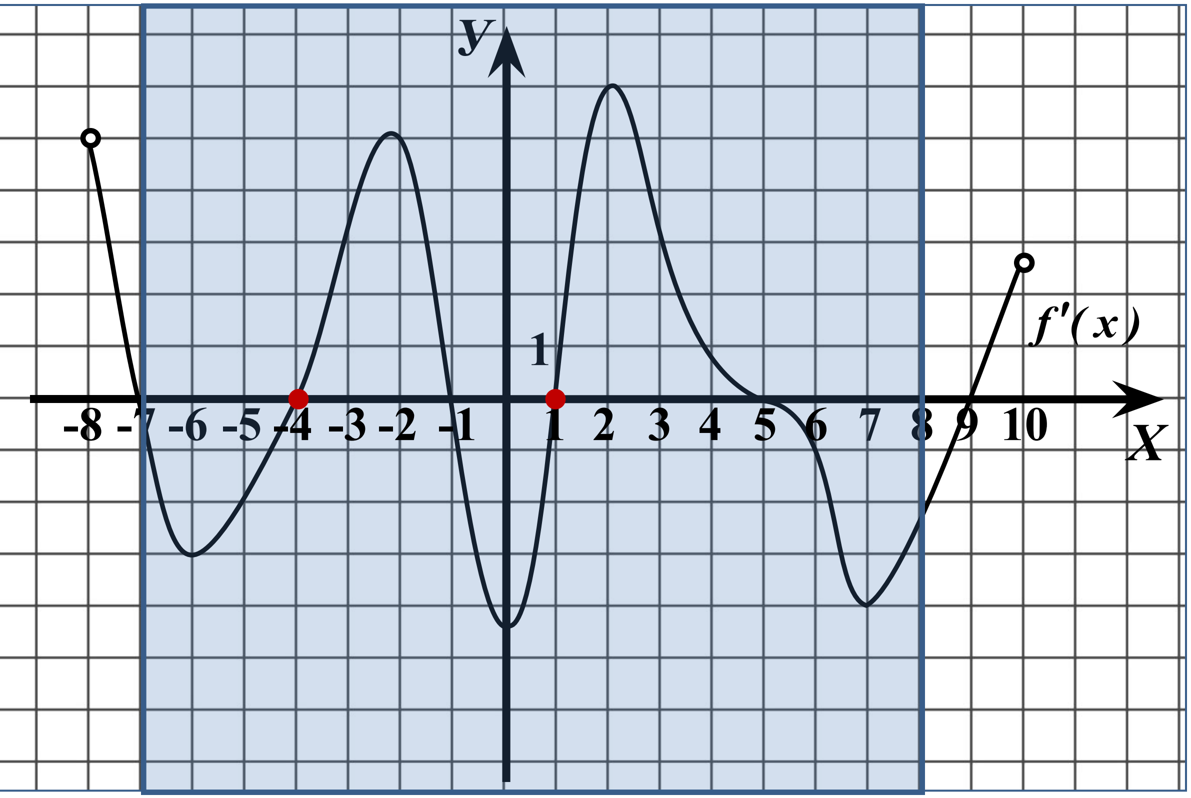



**Условие максимума функции: производная меняет знак с плюса на минус.**

**На графике производной ищем такие точки на заданном промежутке (неформально: график производной уходит под Ox).**

*Ответ : 1.*

**Прототип №11. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите количество точек минимума функции на отрезке [-7;8].**

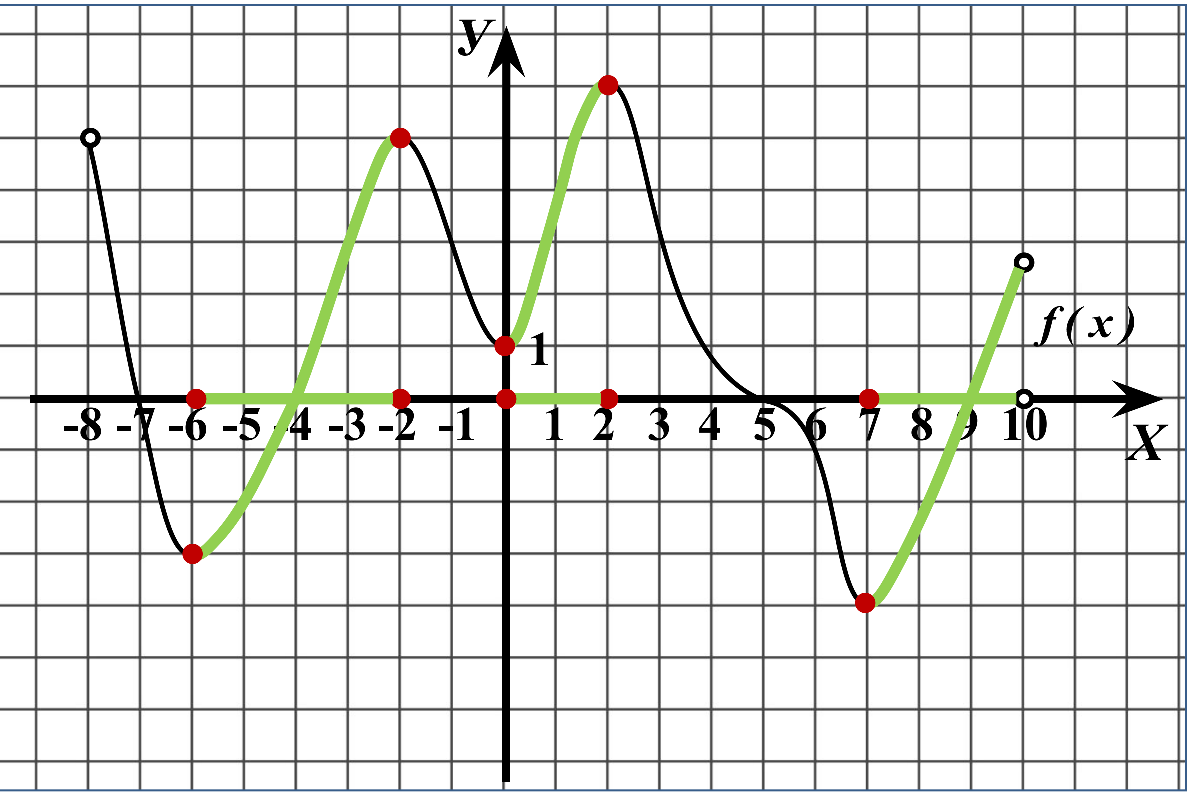



**Условие минимума функции: производная меняет знак с минуса на плюс.**

**На графике производной ищем такие точки на заданном промежутке (неформально: график производной выходит из под Ox).**

*Ответ : 2.*

**Прототип №12. На рисунке изображён график функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите промежутки возрастания функции. В ответе укажите длину наибольшего из них.**

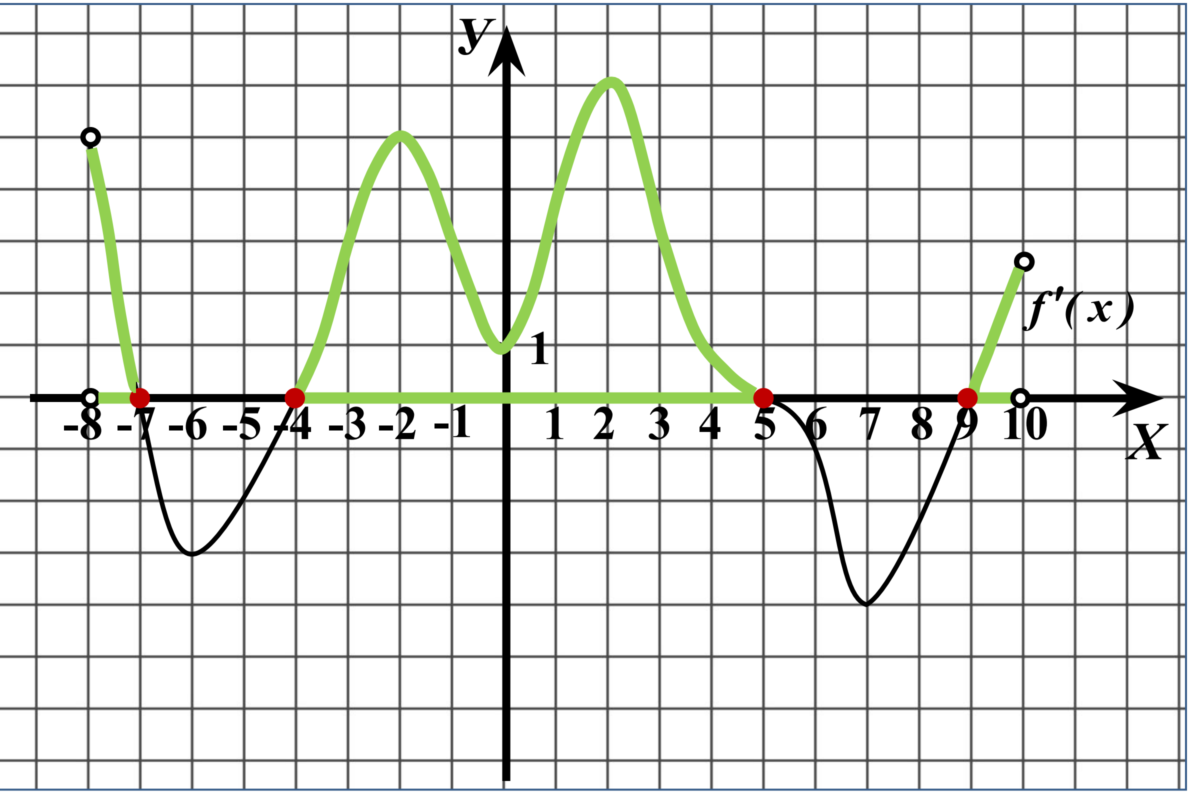



**Определим промежутки возрастания функции.**

**Наибольший промежуток возрастания имеет длину =4.**

*Ответ : 4.*

**Прототип №13. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите промежутки возрастания функции f(x). В ответе укажите длину наибольшего из них.**



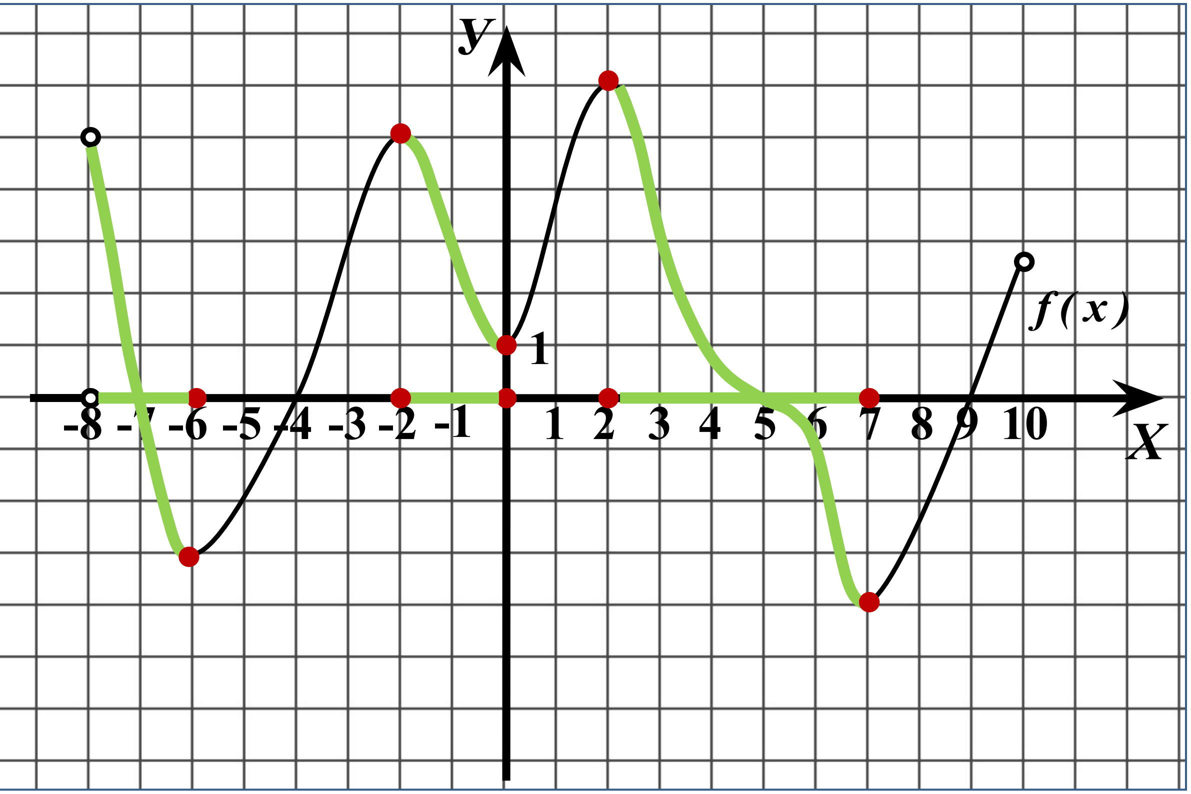

**Условие возрастания функции f(x) на промежутке: f´(x)≥0**

**Определим промежутки, на которых производная функции принимает неотрицательные значения (график производной не ниже Ox).**

**Наибольший промежуток имеет длину 9.**

***Ответ : 9.***

**Прототип №14. На рисунке изображён график функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите промежутки убывания функции. В ответе укажите длину наибольшего из них.**

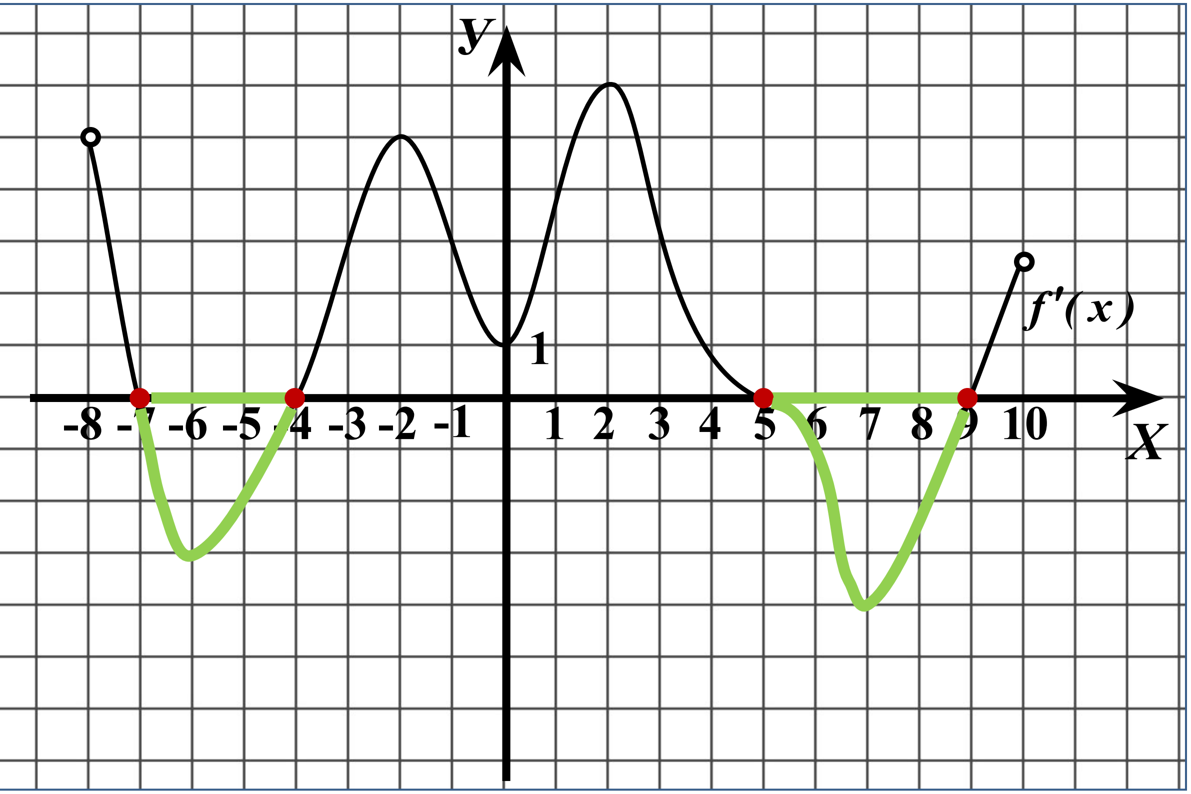



**Определим промежутки убывания функции.**

**Наибольший отрезок убывания имеет длину =5.**

*Ответ : 5.*

**Прототип №15. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). Найдите промежутки убывания функции f(x). В ответе укажите длину наименьшего из них.**



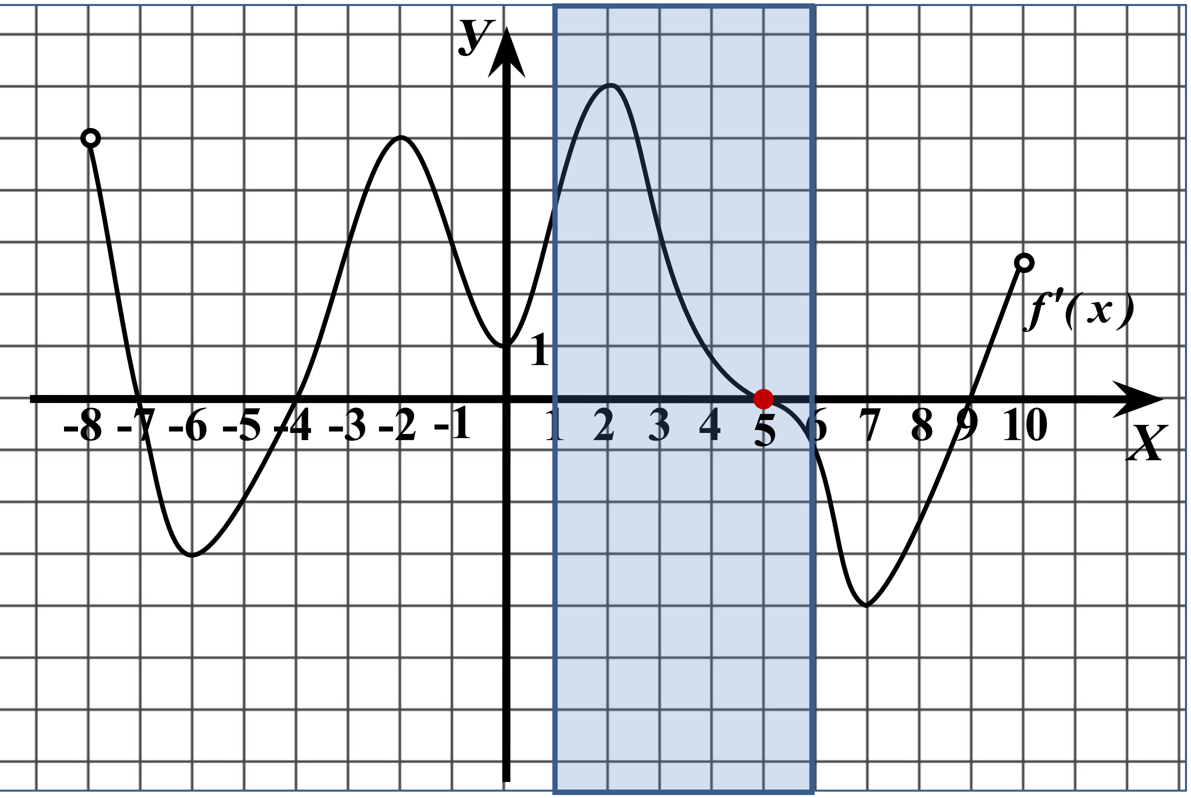

**Условие убывания функции f(x) на промежутке: $f'(x) \le 0$**

**Определим промежутки, на которых производная функции принимает неположительные значения (график не выше Ox).**

**Наименьший промежуток имеет длину =3.**

*Ответ : 3.*

**Прототип №16. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). В какой точке отрезка [1;6] функция принимает наибольшее значение?**



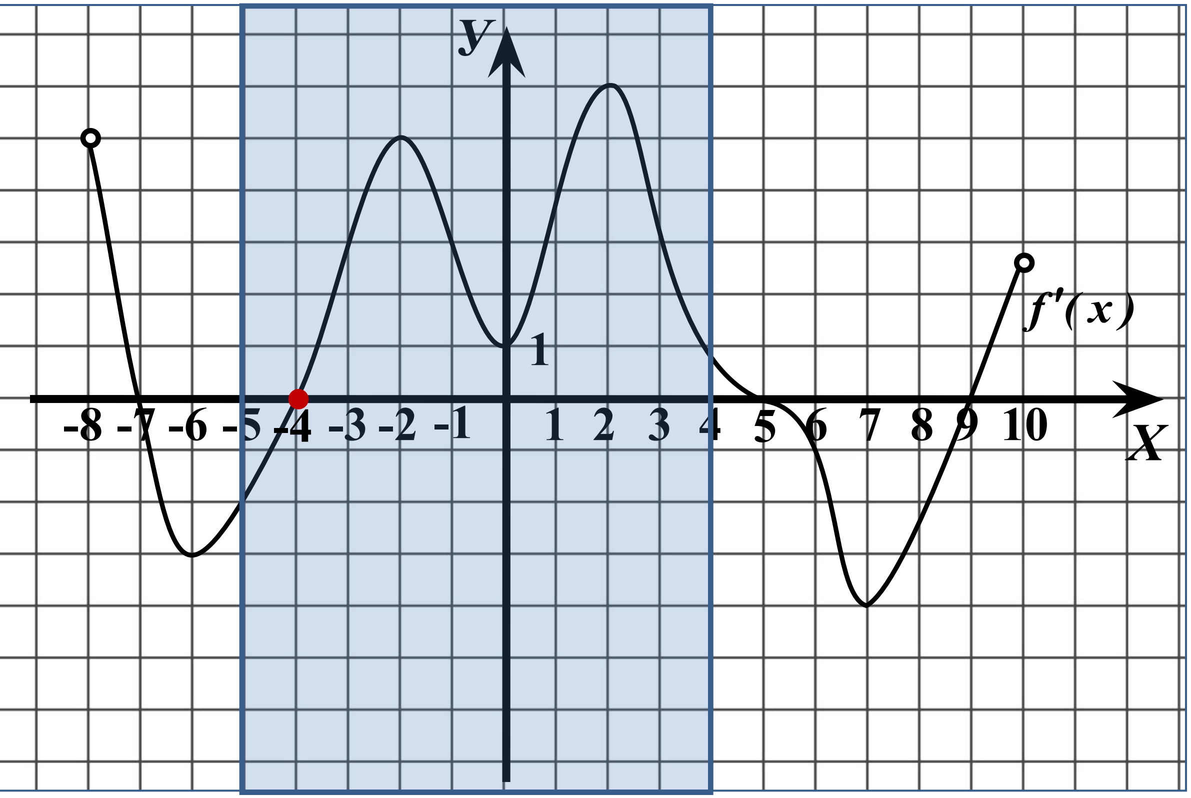

**На заданном промежутке производная функции в одной точке меняет знак с плюса на минус.**

**Следовательно имеет один максимум на этом промежутке.**

**Если функция на промежутке имеет одну точку максимума, то именно в ней она достигает наибольшего значения.**

*Ответ : 5.*

**Прототип №17. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). В какой точке отрезка [-5;4] функция принимает наименьшее значение?**



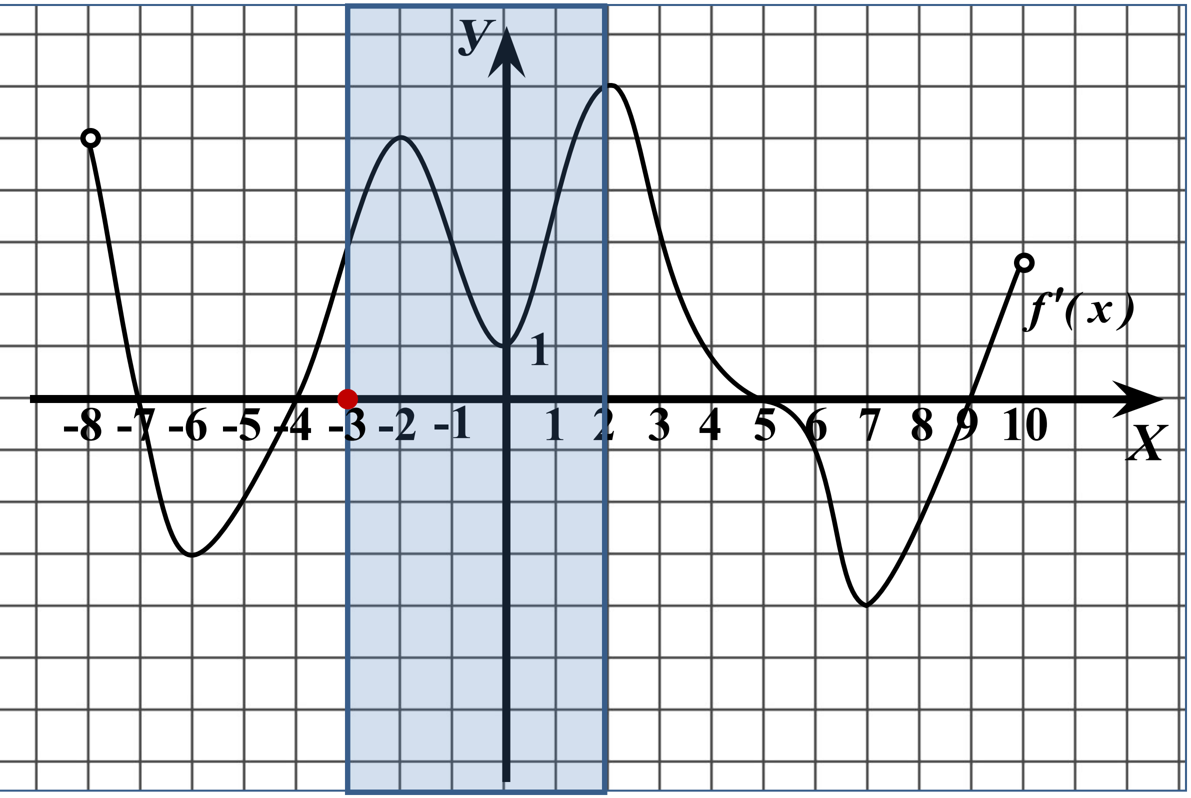

На заданном промежутке производная функции в одной точке меняет знак с минуса на плюс.

Следовательно имеет один минимум на этом промежутке.

Если функция на промежутке имеет одну точку минимума, то именно в ней она достигает наименьшего значения.

*Ответ : –4.*

**Прототип №18. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). В какой точке отрезка [-3;2] функция принимает наименьшее значение?**



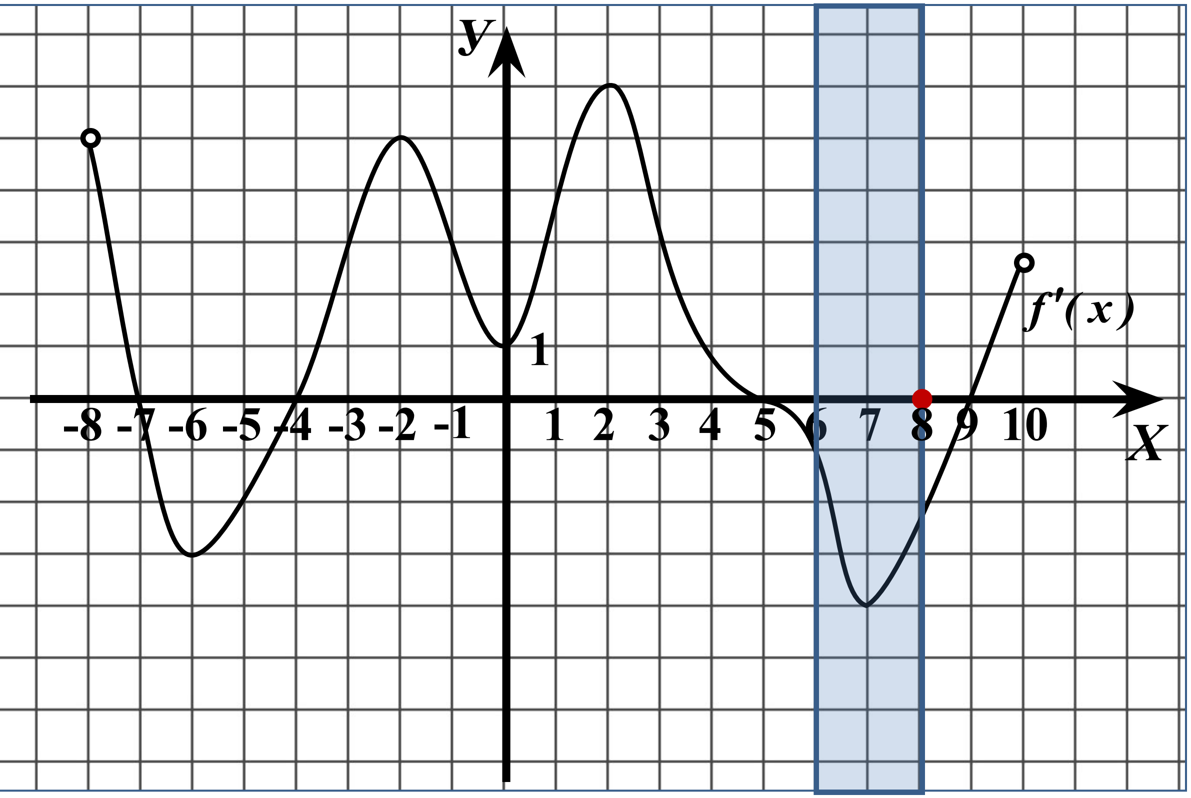

**На заданном промежутке производная функции всегда положительна (график производной выше Ox).**

**Следовательно функция f(x) на этом промежутке только возрастает.**

**Если функция на промежутке только возрастает, то наименьшее значение она принимает при наименьшем значении x из этого промежутка.**

*Ответ : –3.*

**Прототип №19. На рисунке изображён график производной функции f(x) определенной на интервале (-8;10). В какой точке отрезка [6;8] функция принимает наименьшее значение?**




**На заданном промежутке производная функции всегда отрицательна (график производной ниже Ox).**

**Следовательно функция f(x) на этом промежутке только убывает.**

**Если функция на промежутке только убывает, то наименьшее значение она принимает при наибольшем значении x из этого промежутка.**

***Ответ : 8.***

Дополнительный ресурс:

http://reshuege.ru/test?theme=70