

Функции одного переменного.

Опн. $X \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in X$ ставится в соответствие по нек-му закону (f) значение определённое число $y \in \mathbb{R}$, то это значит, что на X задана функция $y = f(x)$.

x -аргумент, y -значение ф-ии.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ - обозначение

X - ин-во (область) определения

$Y \equiv \{y : y = f(x), x \in X\}$ - ин-во (область) значений

Если функция задана формулой, то можно говорить о её общей области определения

(ин-во, где формула имеет смысл)

Функции одного переменного.

Оп. $X \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in X$ ставится в соответствие по некоторому закону (f) вполне определённое число $y \in \mathbb{R}$, то это значит, что на X задана функция $y = f(x)$.

x -аргумент, y -значение ф-ии.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ - обозначение

X - ил-во (область) определения

$Y \equiv \{y : y = f(x), x \in X\}$ - ил-во (область) значений

Если функция задана формулой, то можно говорить о её естественной области определения (ил-во, где формула имеет смысл)

Примеры

$$1. y = c \equiv \text{const}; X = (-\infty, +\infty), Y = \{c\}$$

$$2. y = x; X = (-\infty, +\infty), Y = (-\infty, +\infty)$$

$$3. y = x^2; X = (-\infty, +\infty), Y = [0, +\infty)$$

$$4. y = \sqrt{1-x^2}; X = [-1, 1], Y = [0, 1]$$

$$5. y = x!; X = \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

$$Y = \{1, 2, 6, 24, 120, \dots\}$$

Т.о. числ-ми - тоже ф-ии, определённые на \mathbb{N} (или на $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\} \subset \mathbb{Z}\}$)

$$6. y = \sin x; X = (-\infty, +\infty), Y = \{-1, 0, 1\}$$

$$7. y = [x] = E(x); X = (-\infty, +\infty), Y = \mathbb{Z}$$

$$8. y = f(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{иррац. число} \\ 1, & x - \text{рац. число} \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{функция} \\ \text{Дирахле} \end{matrix}$$

$$X = (-\infty, +\infty), Y = \{0, 1\}$$

Функции одного переменного.

Опн. $X \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in X$ ставится в соответствие по нек-му закону (f) вполне определённое число $y \in \mathbb{R}$, то это значит, что на X задана функция $y = f(x)$.

x -аргумент, y -значение ф-ии.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ - обозначение

X - мн-во (область) определения

$Y = \{y : y = f(x), x \in X\}$ - мн-во (область) значений

Если функция задана формулой, то можно говорить о её общей области определения (мн-во, где формула имеет смысл)

Примеры

1. $y = c \equiv \text{const}; X = (-\infty, +\infty), Y = \{c\}$
2. $y = x; X = (-\infty, +\infty), Y = (-\infty, +\infty)$
3. $y = x^2; X = (-\infty, +\infty), Y = [0, +\infty)$
4. $y = \sqrt{1-x^2}; X = [-1, 1], Y = [0, 1]$
5. $y = x!; X = \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots\}, Y = \{1, 2, 6, 24, 120, \dots\}$

Т.о. числ-оси - тоже ф-ии, определённые на \mathbb{N} (или на $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\} \subset \mathbb{Z}$)

6. $y = \operatorname{sgn} x; X = (-\infty, +\infty), Y = \{-1, 0, 1\}$
7. $y = [x] = E(x); X = (-\infty, +\infty), Y = \mathbb{Z}$
8. $y = f(x) = \begin{cases} 0, & x - \text{иррац. число} \\ 1, & x - \text{рац. число} \end{cases}$ | функция Дирака
 $X = (-\infty, +\infty), Y = \{0, 1\}$

Некоторые мн-ва по левобережной оси

$$x_0 \in \mathbb{R}, \delta > 0, M > 0$$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ - δ -окрестность x_0 $U_\delta(x_0)$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$
- проколотая δ -окрестность x_0 $\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$

$[x_0, x_0 + \delta)$ - правая δ -окр. x_0

$(x_0, x_0 + \delta)$ - правая проколотая δ -окр. x_0

$(x_0 - \delta, x_0]$ - левая δ -окр. x_0

$(x_0 - \delta, x_0)$ - левая проколотая δ -окр. x_0

$(M, +\infty)$ - M -окрестность $+\infty$

$(-\infty, -M)$ - M -окрестность $-\infty$

$(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ - M -окрестность ∞

Предел функции

Оп. (Коши). Пусть $f(x)$ определена в нек-й прокл. окр-сти x_0 (т.е. $\exists \tilde{\delta} > 0 : f(x)$ опред. в $\overset{\circ}{U}_{\tilde{\delta}}(x_0) \equiv (x_0 - \tilde{\delta}, x_0) \cup (x_0, x_0 + \tilde{\delta})$), A — предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 :$
 $\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Оп. (Гейне). Пусть $f(x)$ определено в нек-й прокл. окр-сти x_0 , A — предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если $\forall \{x_n\} : x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$
 $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Предел функции

Оп. Коши. Пусть $f(x)$ определена в

нек-й прокл. окр-сти x_0 (т.е. $\exists \tilde{\delta} > 0 : f(x)$ опред. в $U_{\tilde{\delta}}(x_0) \equiv (x_0 - \tilde{\delta}, x_0) \cup (x_0, x_0 + \tilde{\delta})$). A — предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Оп. Гейне. Пусть $f(x)$ определена в

нек-й прокл. окр-сти x_0 , A — предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если $\forall \{x_n\} : x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Обозначение: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Т1. Оп. Коши \Leftrightarrow Оп. Гейне.

Д-бо. $K \Rightarrow \Gamma$. $f(x)$ опр. в прокл. окр. x_0

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\forall \{x_n\} : x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{ т.е. } \forall \delta > 0 \ \exists N :$

$\forall n > N \ 0 < |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon, \text{ т.е.}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

$\Gamma \Rightarrow K$. Пусть опр. Коши неверно, т.е.

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x, 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ но } |f(x) - A| \geq \varepsilon$

$\delta = \delta_1 = 1 \ \exists x_1, 0 < |x_1 - x_0| < \delta_1, \text{ но } |f(x_1) - A| \geq \varepsilon$

$\delta = \delta_2 = \frac{1}{2} \ \exists x_2, 0 < |x_2 - x_0| < \delta_2, \text{ но } |f(x_2) - A| \geq \varepsilon$

$\dots \dots \dots \delta = \delta_n = \frac{1}{n} \ \exists x_n, 0 < |x_n - x_0| < \delta_n, \text{ но } |f(x_n) - A| \geq \varepsilon$

$\{x_n\} : x_n \neq x_0, \underbrace{x_0 - \delta_n}_{\rightarrow x_0} < x_n < \underbrace{x_0 + \delta_n}_{\rightarrow x_0}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$

При этом (по Гейне) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, а по построению $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$, т.е.

$O = |A - A| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - A| \geq \varepsilon > 0$ (прот.)

Т. доказано

Предел функции

Опр. (Коши). Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 (т.е. $\exists \delta > 0 : f(x)$ опред. в $U_\delta(x_0) \equiv (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$), и — предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Оп. (Гейне). Пусть $f(x)$ определено в некоторой окрестности x_0 , и предел $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, если $\forall \{x_n\}: x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Одозначение: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

T1. Опр. Коши \Leftrightarrow Опр. Георг.

\mathcal{D} -бо. $K \Rightarrow \Gamma$. $f(x)$ опр. в окр. опр. x_0

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\forall \{x_n\} : x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \text{т.е. } \forall \delta > 0 \exists N :$

$\forall n > N \quad 0 < |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon, \text{т.е.}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A.$

$\Gamma \Rightarrow K$. Пусть опр. Коши неверно, т.е.

$$\exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ such that } |f(x) - A| \geq \epsilon$$

$$\delta = \delta_1 = 1 \quad \exists x_1, 0 < |x_1 - x_0| < \delta_1, \text{ no } |f(x_1) - A| \geq \varepsilon$$

$$\delta = \delta_2 = \frac{1}{2} \quad \exists x_2, 0 < |x_2 - x_0| < \delta_2, \text{ no } |f(x_2) - A| \geq \epsilon$$

$$\delta = \delta_n = \frac{1}{n} \quad \exists x_n, \quad 0 < |x_n - x_0| < \delta_n, \quad \text{such that } |f(x_n) - A| \geq \epsilon$$

$$\{x_n\} : x_n \neq x_0, \frac{x_0 - \delta_n}{\rightarrow x_1} < x_n < \frac{x_0 + \delta_n}{\rightarrow x_n}, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$$

При этом (по Гейне) $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, а по опре-
делению $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$, т. е.

$$\underline{\underline{O = |A - A| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n) - A| \geq \varepsilon > 0}} \quad (\text{by defn.})$$

T. Доказана

Помимо предела можно обобщить по скругай:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \beta \quad \begin{array}{l} \alpha = x_0, x_0 + 0, x_0 - 0, \infty, +\infty, -\infty \\ \beta = A, A + 0, A - 0, \infty, +\infty, -\infty \end{array}$$

Пусть $f(x)$ опр. в нек-х прк. окр. α (если $\alpha = \infty, +\infty, -\infty$, то прк. — опускаем). $\beta = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$, если $\forall \text{окр. } \beta \exists \text{ окр. окр. } \alpha (U(\alpha))$:
 $\forall x \in U(\alpha) \Rightarrow f(x) \in U(\beta)$, это по Канн. А но Геди:

$$\beta = \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x), \text{ если } \forall \{x_n\}: x_n \neq \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \beta.$$

Если $\beta = \pm\infty, \infty$; то $f(x)$ не имеет предела (!!!)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A - 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_+ + 0} f(x) = +\infty$$

T2. f(x) onped. B uex- σ npxk. exp. x_0 $t=3=3$

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x).$$

D-Bo. $\Rightarrow A = \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x)$, t.e. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. $f(x)$ approaches A

и в правой и в левой окр. x_0 $\Rightarrow \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0$:

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = A)$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - f| < \varepsilon \quad (\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow x_0+0}} f(x) = A \cup \lim_{\substack{x \rightarrow x_0-0}} f(x) = A, \text{ i.e.}$$

$$\exists A \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1) : 0 < \exists \varepsilon \in A : |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, i.e. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$

T2. $f(x)$ опред. в некоторой окр. x_0

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

Д-бо. $\Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x,$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. f(x)$$
 определено

и правой и левой окр. $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A)$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A)$$

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A, \text{т.е.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \text{т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Теорема 2-закон.

T2! $f(x)$ опред. в некоторой окр. ∞ (т.е. $\exists \tilde{M} > 0 :$

$f(x)$ опред. на $(-\infty, -\tilde{M}) \cup (\tilde{M}, +\infty)$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Доказательство.

В данном случае утверждение будет формулироваться в следующем виде для двухстороннего предела

линейной зависимости

Очк (Коэни). Угловой коэффициент

$$(0,1) : 0 < \theta < \pi/2 \text{ или } 0 < \theta < \pi/2 \text{ либо } 0 < \theta < \pi/2$$

$$\rightarrow R : ((\theta, \alpha, \beta) \cup (\alpha, \theta - \pi)) = (0, \pi/2) \text{ либо } 0 < \theta < \pi/2$$

$$3 > |A - (0)| \Leftrightarrow 3 > |A - 0| > 0, \text{ т.е. } A \neq 0$$

Очк (Лебег). Угловое значение

$$(0,1) : \text{нелиней} - R, \text{ либо } 0 < \theta < \pi/2 \text{ либо } 0 < \theta < \pi/2$$

$$= 0 \text{ или } 0 < \theta < \pi/2 : 0 < A < \infty, 0 < \theta < \pi/2$$

$$R = (0, \pi/2) \text{ либо } 0 < \theta < \pi/2$$

$$A = (0, \pi/2) \text{ либо } 0 < \theta < \pi/2$$

Очк Коши \Leftrightarrow Очк Лебег

$$0 < \theta < \pi/2 \text{ либо } 0 < \theta < \pi/2 \Leftrightarrow K, 0 < \theta < \pi/2$$

$$3 > |A - (0)| \Leftrightarrow 3 > |A - 0| > 0, \text{ т.е. } 0 < \theta < \pi/2$$

$$= 0 \text{ или } 0 < \theta < \pi/2 : 0 < A < \infty, 0 < \theta < \pi/2$$

$$R = (0, \pi/2) \text{ либо } 0 < \theta < \pi/2$$

Очк Коши \Leftrightarrow Очк Коэни

$$3 < |A - (0)| \Leftrightarrow 3 > |A - 0| > 0, \text{ т.е. } 0 < \theta < \pi/2$$

T2. $f(x)$ опред. в некоторой окр. x_0

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

D-Bo. $\Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x,$

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. $f(x)$ определено и в правой и в левой окр. $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A)$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A)$$

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \wedge \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A, \text{т.е. } A = 0$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \text{т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Теорема 2-я

T2'. $f(x)$ опред. в некоторой окр. ∞ (т.е. $\exists \tilde{M} > 0 :$

$f(x)$ опред. на $(-\infty, -\tilde{M}) \cup (\tilde{M}, +\infty)$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Доказать самостоятельно.

В данном случае утверждение формулируется и доказывается только для $\lim_{x \rightarrow +\infty}$ предела

T3. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow$ этот предел единожден.

$$D-Bo. A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), A \neq B,$$

$$\text{т.е. } \forall \{x_n\}: x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$$

$$\wedge \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B, \text{что не может быть (единственность}$$

пределов на числ-ах)}

$$B > |A - (0)| \Leftrightarrow B > |x_0 - x_0| > 0, \text{т.е.}$$

также $B > |A - (0)|$ (единственность пределов)

$$(0) > |A - (0)| \Leftrightarrow 0 > |x_0 - x_0| \geq 0, \text{т.е.}$$

$$0 > |x_0 - x_0| \geq 0 : \left\{ \begin{array}{l} 0 > 0 \\ 0 \geq 0 \end{array} \right. \text{т.е. } 0 > 0$$

$$A = (0) \wedge B = (0) \Leftrightarrow$$

одинаковые значения

$$B > |A - (0)| \Leftrightarrow B > |x_0 - x_0| > 0, \text{т.е.}$$

$$B > |x_0 - x_0| > 0 : \left\{ \begin{array}{l} B > 0 \\ 0 > 0 \end{array} \right. \text{т.е. } B > 0$$

$$A = (0) \wedge B = (0) \Leftrightarrow$$

одинаковые значения

$$B > |A - (0)| \Leftrightarrow B > |x_0 - x_0| > 0, \text{т.е.}$$

$$B > |x_0 - x_0| > 0 : \left\{ \begin{array}{l} B > 0 \\ 0 > 0 \end{array} \right. \text{т.е. } B > 0$$

$$A = (0) \wedge B = (0) \Leftrightarrow$$

одинаковые значения

T2. $f(x)$ опред. в некоторой окр. x_0

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

D-Bo. $\Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x,$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon. f(x)$$
 определено

и в правой и левой окр. $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon (\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A)$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon (\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A)$$

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A, \text{ т.е.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \text{т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Теорема 2-закон.

T2'. $f(x)$ опред. в некоторой окр. ∞ (т.е. $\exists \tilde{M} > 0 :$

$f(x)$ опред. на $(-\infty, -\tilde{M}) \cup (\tilde{M}, +\infty)$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x).$$

Доказать симметрично.

В дальнейшем будем формулировать и доказывать только для общего предела

T3. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow$ есть предел единовеч.

$$D-Bo. A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), A \neq B,$$

т.е. $\forall \{x_n\} : x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$, что не может быть (единственность предела на \mathbb{R})

T4. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow \exists \eta > 0, \exists M > 0 : \forall x,$

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| \leq M$$

D-Bo. $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x,$

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\varepsilon = 1 \quad \exists \eta = \delta |_{\varepsilon=1} > 0, \exists M = |A| + 1 > 0 \Rightarrow$$

$$\forall x, 0 < |x - x_0| < \eta (= \delta |_{\varepsilon=1}) \quad |f(x)| =$$

$$= |A + (f(x) - A)| \leq |A| + |f(x) - A| < |A| + 1 = M.$$

Т. 2-закон.

T2. $f(x)$ опред. в некоторой окр. x_0

$$\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x), \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

D-Bo. $\Rightarrow A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x,$

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. $f(x)$ определено и в правой и в левой окр. x_0 $\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A)$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \quad (\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A)$$

$$\Leftarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A, \text{ т.е.}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \text{т.е. } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Теорема 2-закон.

T2'. $f(x)$ опред. в некоторой окр. ∞ (т.е. $\exists \tilde{M} > 0 :$

$f(x)$ опред. на $(-\infty, -\tilde{M}) \cup (\tilde{M}, +\infty)$.

$$\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \exists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x).$$

Доказать симметрично.

В дальнейшем утверждения будут формулироваться в засечках такого вида: если предположить

T3. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow$ это предел единственный.

D-Bo. $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), A \neq B,$

т.е. $\forall \{x_n\} : x_n \neq x_0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$

и $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = B$, что не может быть (единственность предела по определению)

T4. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \Rightarrow \exists \eta > 0, \exists M > 0 :$

$\forall x, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| \leq M$

D-Bo. $A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\varepsilon = 1 \exists \eta = \delta \Big|_{\varepsilon=1} > 0, \exists M = |A| + 1 > 0 \Rightarrow$

$\forall x, 0 < |x - x_0| < \eta (= \delta \Big|_{\varepsilon=1}) \quad |f(x)| =$

$= |A + (f(x) - A)| \leq |A| + |f(x) - A| < |A| + 1 = M$

Т. доказано.

T5. $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \neq 0 \Rightarrow \exists \eta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow$

$\Rightarrow \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} A$

D-Bo. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon, \text{т.е. } A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$

$\varepsilon = \frac{|A|}{2}, \exists \eta = \delta \Big|_{\varepsilon=\frac{|A|}{2}} > 0 \Rightarrow \forall x, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow$

$A - \frac{|A|}{2} < f(x) < A + \frac{|A|}{2}$

$A > 0 \Rightarrow f(x) > A - \frac{A}{2} = \frac{A}{2} > 0$

$A < 0 \Rightarrow f(x) < A + \frac{-A}{2} = \frac{A}{2} < 0$ Т. доказано