Функции одного переменного.

Опр. $X \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in X$ ставится в соответствие по нек-му закону (f) вполне определённое число $y \in \mathbb{R}$, то это значит, что на X задана функция $y = f(x)$.

x – аргумент, y – значение ф-ии.

$f: X \to \mathbb{R}$ – обозначение

X – мн-во (область) определения

$Y \equiv \{y : y = f(x), x \in X\}$ – мн-во (область) значений

Если функция задана формулой, то можно говорить о естественной области определения (мн-во, где формула имеет смысл)

Функции одного переменного.

Опр. $X \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in X$ ставится в соответствие по нек-му закону (f) вполне определённое число $y \in \mathbb{R}$, то это значит, что на X задана функция $y = f(x)$.

x – аргумент, y – значение ф-ии.

$f: X \to \mathbb{R}$ – обозначение

X – мн-во (область) определения

$Y \equiv \{y : y = f(x), x \in X\}$ – мн-во (область) значений

Если функция задана формулой, то можно говорить о естественной области определения (мн-во, где формула имеет смысл)

Примеры

1. $y = c \equiv \text{const}$; $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = \{c\}$
2. $y = x$; $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (-\infty, +\infty)$
3. $y = x^2$; $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = [0, +\infty)$
4. $y = \sqrt{1 - x^2}$; $X = [-1, 1]$, $Y = [0, 1]$
5. $y = x!$; $X = \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$,

   $Y = \{1, 2, 6, 24, 120, \ldots\}$

Т.о. посл-сти – тоже ф-ии, определённые на $\mathbb{N}$ (или на $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \ldots\} \subset \mathbb{Z}$)

6. $y = \operatorname{sgn} x$; $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = \{-1, 0, 1\}$
7. $y = [x] = E(x)$; $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = \mathbb{Z}$
8. $y = f(x) = \begin{cases} 0, & x\text{ – иррац. число} \\ 1, & x\text{ – рацион. число} \end{cases}$ | функция Дирихле

   $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = \{0, 1\}$

Функции одного переменного.

Опр. $X \subset \mathbb{R}$. Если $\forall x \in X$ ставится в соответствие по нек-му закону (f) вполне определённое число $y \in \mathbb{R}$, то это значит, что на X задана функция $y = f(x)$.

x – аргумент, y – значение ф-ии.

$f: X \to \mathbb{R}$ – обозначение

X – мн-во (область) определения

$Y \equiv \{y : y = f(x), x \in X\}$ – мн-во (область) значений

Если функция задана формулой, то можно говорить о естественной области определения (мн-во, где формула имеет смысл)

Примеры

1. $y = c \equiv \text{const}$; $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = \{c\}$
2. $y = x$; $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = (-\infty, +\infty)$
3. $y = x^2$; $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = [0, +\infty)$
4. $y = \sqrt{1 - x^2}$; $X = [-1, 1]$, $Y = [0, 1]$
5. $y = x!$; $X = \mathbb{N}_0 \equiv \{0, 1, 2, 3, \dots\}$,
   $Y = \{1, 2, 6, 24, 120, \dots\}$

Т.о. посл-ти – тоже ф-ии, определённые на $\mathbb{N}$ (или на $\{n_0, n_0+1, n_0+2, \dots\} \subset \mathbb{Z}$)

6. $y = \operatorname{sgn} x$; $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = \{-1, 0, 1\}$
7. $y = [x] = E(x)$; $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = \mathbb{Z}$
8. $y = \chi(x) = \begin{cases} 0, & x \text{ – ирраци. число} \\ 1, & x \text{ – рацион. число} \end{cases}$ | функция Дирихле

   $X = (-\infty, +\infty)$, $Y = \{0, 1\}$

Некоторые мн-ва на действительной оси

$x_0 \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$, $M > 0$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ – δ-окрестность x_0 $\quad U_\delta(x_0)$

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \setminus \{x_0\} = (x_0 - \delta, x_0) \cup (x_0, x_0 + \delta)$

– проколотая δ-окрестность x_0 $\quad \mathring{U}_\delta(x_0)$

$[x_0, x_0 + \delta)$ – правая δ-окр. x_0

$(x_0, x_0 + \delta)$ – правая проколотая δ-окр. x_0

$(x_0 - \delta, x_0]$ – левая δ-окр. x_0

$(x_0 - \delta, x_0)$ – левая проколотая δ-окр. x_0

$(M, +\infty)$ – M-окрестность $+\infty$

$(-\infty, -M)$ – M-окрестность $-\infty$

$(-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$ – M-окрестность ∞

Предел функции

Опр. (Коши). Пусть $f(x)$ определена в нек-й прокол. окр-сти x_0 (т.е. $\exists \tilde{\delta}>0 : f(x)$ опред. в $\overset{\circ}{U}_{\tilde{\delta}}(x_0) \equiv (x_0-\tilde{\delta}, x_0) \cup (x_0, x_0+\tilde{\delta})$). A — предел $f(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $\forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Опр. (Гейне). Пусть $f(x)$ определена в нек-й прокол. окр-сти x_0. A — предел $f(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall \{x_n\}: x_n \neq x_0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

Предел функции

Опр. (Коши). Пусть $f(x)$ определена в нек-й прокол. окр-сти x_0 (т.е. $\exists \tilde{\delta} > 0 : f(x)$ опред. в $\overset{\circ}{U}_{\tilde{\delta}}(x_0) \equiv (x_0 - \tilde{\delta}, x_0) \cup (x_0, x_0 + \tilde{\delta})$). A — предел $f(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$: $\forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$.

Опр. (Гейне). Пусть $f(x)$ определена в нек-й прокол. окр-сти x_0. A — предел $f(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall \{x_n\} : x_n \neq x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Т1. Опр. Коши $\Leftrightarrow$ Опр. Гейне.

Д-во. $К \Rightarrow Г$. $f(x)$ опр. в прок. окр. x_0

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\forall \{x_n\} : x_n \neq x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, т.е. $\forall \delta > 0 \ \exists N$:

$\forall n > N \ \ 0 < |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - A| < \varepsilon$, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

$Г \Rightarrow К$. Пусть опр. Коши неверно, т.е.

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \ \exists x,\ 0 < |x - x_0| < \delta$, но $|f(x) - A| \geq \varepsilon$

$\delta = \delta_1 = 1 \ \exists x_1,\ 0 < |x_1 - x_0| < \delta_1$, но $|f(x_1) - A| \geq \varepsilon$

$\delta = \delta_2 = \frac{1}{2} \ \exists x_2,\ 0 < |x_2 - x_0| < \delta_2$, но $|f(x_2) - A| \geq \varepsilon$

. . . .

$\delta = \delta_n = \frac{1}{n} \ \exists x_n,\ 0 < |x_n - x_0| < \delta_n$, но $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$

. . . .

$\{x_n\} : x_n \neq x_0,\ \underbrace{x_0 - \delta_n}_{\to x_0} < x_n < \underbrace{x_0 + \delta_n}_{\to x_0},\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

При этом (по Гейне) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, а по построению $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon$, т.е.

$\underline{0} = |A - A| = \lim\limits_{n\to\infty} |f(x_n) - A| \geq \varepsilon \underline{> 0}$ (Против.)

Т. доказана.

Предел функции

Опр. (Коши). Пусть $f(x)$ определена в нек-й прокол. окр-сти x_0 (т.е. $\exists \tilde{\delta}>0$: $f(x)$ опред. в $\mathring{U}_{\tilde{\delta}}(x_0) \equiv (x_0-\tilde{\delta}, x_0) \cup (x_0, x_0+\tilde{\delta})$). A — предел $f(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$: $\forall x, \; 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$.

Опр. (Гейне). Пусть $f(x)$ определена в нек-й прокол. окр-сти x_0. A — предел $f(x)$ при $x \to x_0$, если $\forall \{x_n\}: x_n \neq x_0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

Обозначение: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

T1. Опр. Коши $\Leftrightarrow$ Опр. Гейне.

Д-во. $К \Rightarrow Г$. $f(x)$ опр. в прок. окр. x_0

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \forall x, \; 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

$\forall \{x_n\}: x_n \neq x_0, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, т.е. $\forall \delta > 0 \; \exists N$:

$\forall n > N \;\; 0<|x_n-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x_n)-A|<\varepsilon$, т.е.

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

$Г \Rightarrow К$. Пусть опр. Коши неверно, т.е.

$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \; \exists x, \; 0<|x-x_0|<\delta$, но $|f(x)-A| \geq \varepsilon$

$\delta=\delta_1=1 \; \exists x_1, \; 0<|x_1-x_0|<\delta_1$, но $|f(x_1)-A|\geq\varepsilon$

$\delta=\delta_2=\frac{1}{2} \; \exists x_2, \; 0<|x_2-x_0|<\delta_2$, но $|f(x_2)-A|\geq\varepsilon$

. . . .

$\delta=\delta_n=\frac{1}{n} \; \exists x_n, \; 0<|x_n-x_0|<\delta_n$, но $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon$

. . . .

$\{x_n\}: x_n \neq x_0, \; \underbrace{x_0-\delta_n}_{\to x_0} < x_n < \underbrace{x_0+\delta_n}_{\to x_0}, \; \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

При этом (по Гейне) $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$, а по построению $|f(x_n)-A|\geq\varepsilon$, т.е.

$$\underline{0} = |A-A| = \lim_{n\to\infty} |f(x_n)-A| \geq \varepsilon \underline{> 0} \quad \text{(Против.)}$$

Т. доказана.

Понятие предела можно обобщить на случай:

$$\lim_{x\to\alpha} f(x) = \beta \qquad \begin{array}{l} \alpha = x_0, x_0+0, x_0-0, \infty, +\infty, -\infty \\ \beta = A, A+0, A-0, \infty, +\infty, -\infty \end{array}$$

Пусть $f(x)$ опр. в нек-й прок. окр. α (если $\alpha = \infty, +\infty, -\infty$, то прокол. — опускаем). $\beta = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, если $\forall$ окр. $\beta \; (U(\beta)) \; \exists$ прок. окр. $\alpha \; (\mathring{U}(\alpha))$: $\forall x \in \mathring{U}(\alpha) \Rightarrow f(x) \in U(\beta)$. Это по Коши. А по Гейне:

$\beta = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x)$, если $\forall \{x_n\}: x_n \neq \alpha, \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \beta$.

Если $\beta = \pm\infty, \infty$; то $f(x)$ не имеет предела (!!!)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A-0 \qquad \lim_{x\to x_0+0} f(x) = +\infty$$

$\underline{\text{T2}}$. $f(x)$ опред. в нек-й прок. окр. x_0

$\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x), \exists \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x), \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x).$

Д-во. $\Rightarrow$. $A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x,$

$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. $f(x)$ определена

и в правой и в левой прок. окр. $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ $(\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A)$

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ $(\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A)$

$\Leftarrow \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = A$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$

Теорема д-зана.

Т2. $f(x)$ опред. в нек-й прок. окр. x_0

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x),\ \exists \lim_{x\to x_0-0} f(x),\ \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Д-во. $\Rightarrow$. $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$. $f(x)$ определена и в правой и в левой прок. окр. $x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$:

$$\forall x\in(x_0, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\ \left(\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A\right)$$

$$\forall x\in(x_0-\delta, x_0) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\ \left(\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A\right)$$

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$, т.е.:

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0:\ \forall x\in(x_0,x_0+\delta_1)\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0:\ \forall x\in(x_0-\delta_2,x_0)\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0:\ \forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$. Теорема д-зана.

Т2'. $f(x)$ опред. в нек-й окр ∞ (т.е. $\exists \tilde{M}>0$: $f(x)$ опред. на $(-\infty,-\tilde{M})\cup(\tilde{M},+\infty)$.

$$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} f(x),\ \exists \lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Доказать самостоятельно.

В дальнейшем утверждения будут формулироваться и д-зываться только для двустор. предела

Т2. $f(x)$ опред. в нек-й прок. окр. x_0

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x),\ \exists \lim_{x\to x_0-0} f(x),\ \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Д-во. $\Rightarrow$. $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall x,$ $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. $f(x)$ определена и в правой и в левой прок. окр. $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$:

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \ (\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A)$$

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \ (\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A)$$

$\Leftarrow$ $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$ и $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0 : \forall x \in (x_0, x_0+\delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0 : \forall x \in (x_0-\delta_2, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0 : \forall x,\ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$

Теорема д-зана.

Т2'. $f(x)$ опред. в нек-й окр. ∞ (т.е. $\exists \tilde{M} > 0$: $f(x)$ опред. на $(-\infty, -\tilde{M}) \cup (\tilde{M}, +\infty)$.

$$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} f(x),\ \exists \lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Доказать самостоятельно.

В дальнейшем утверждения будут формулироваться и д-зываться только для двустор. предела

Т3. $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Rightarrow$ этот предел единствен.

Д-во. $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$, $B = \lim_{x\to x_0} f(x)$, $A \neq B$, т.е. $\forall \{x_n\} : x_n \neq x_0,\ \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ и $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$, что не может быть (единственность предела посл-сти)

T2. $f(x)$ опред. в нек-й прок. окр. x_0

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x), \exists \lim_{x\to x_0-0} f(x), \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Д-во. $\Rightarrow$. $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0: \forall x,$ $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$. $f(x)$ определено и в правой и в левой прок. окр. $x_0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:$

$$\forall x \in (x_0, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \ (\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A)$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon \ (\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A)$$

$\Leftarrow$ $\lim_{x\to x_0+0} f(x) = A$ и $\lim_{x\to x_0-0} f(x) = A$, т.е.

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0: \forall x \in (x_0, x_0 + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0: \forall x \in (x_0 - \delta_2, x_0) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \min(\delta_1, \delta_2) > 0: \forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$, т.е. $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$

Теорема д-зана.

T2'. $f(x)$ опред. в нек-й окр. ∞ (т.е. $\exists \tilde{M} > 0$: $f(x)$ опред. на $(-\infty, -\tilde{M}) \cup (\tilde{M}, +\infty)$).

$$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} f(x), \exists \lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Доказать самостоятельно.

В дальнейшем утверждения будут формулироваться и д-зываться только для двустор. предела

T3. $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Rightarrow$ этот предел единствен.

Д-во. $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$, $B = \lim_{x\to x_0} f(x)$, $A \neq B$, т.е. $\forall \{x_n\}: x_n \neq x_0, \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A$ и $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B$, чего не может быть (единственность предела посл-сти)

T4. $\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Rightarrow \exists \eta > 0, \exists M > 0:$

$$\forall x, 0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow |f(x)| \leq M$$

Д-во. $A = \lim_{x\to x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:$

$$\forall x, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

$\varepsilon = 1$ $\exists \eta = \delta|_{\varepsilon=1} > 0$, $\exists M = |A| + 1 > 0 \Rightarrow$

$\forall x,\ 0 < |x - x_0| < \eta\ (= \delta|_{\varepsilon=1})$ $|f(x)| =$

$= |A + (f(x) - A)| \leq |A| + |f(x) - A| < |A| + 1 = M$

Т. д-зана.

T2. $f(x)$ опред. в нек-й прок. окр. x_0

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x),\ \exists \lim_{x\to x_0-0} f(x),\ \lim_{x\to x_0+0} f(x)=\lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Д-во. $\Rightarrow$. $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т.е. $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0:\ \forall x,$ $0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$. $f(x)$ определено и в правой и в левой прок. окр. $x_0 \Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$:

$$\forall x\in(x_0, x_0+\delta) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon \ (\lim_{x\to x_0+0} f(x)=A)$$

$$\forall x\in(x_0-\delta, x_0) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon \ (\lim_{x\to x_0-0} f(x)=A)$$

$\Leftarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=A$, т.е.

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0:\ \forall x\in(x_0, x_0+\delta_1) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_2>0:\ \forall x\in(x_0-\delta_2, x_0) \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$

$\Rightarrow \forall\varepsilon>0\ \exists\delta=\min(\delta_1,\delta_2)>0:\ \forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

Теорема д-зана.

T2'. $f(x)$ опред. в нек-й окр ∞ (т.е. $\exists \tilde{M}>0$: $f(x)$ опред. на $(-\infty,-\tilde{M})\cup(\tilde{M},+\infty)$).

$$\exists \lim_{x\to\infty} f(x) \Leftrightarrow \exists \lim_{x\to+\infty} f(x),\ \exists \lim_{x\to-\infty} f(x),\ \lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x).$$

Доказать самостоятельно.

В дальнейшем утверждения будут формулироваться и д-зываться только для двустор. предела

T3. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Rightarrow$ этот предел единствен.

Д-во. $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $B=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, $A\neq B$,

т.е. $\forall \{x_n\}:\ x_n\neq x_0,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=B$, что не может быть (единственность предела посл-сти)

T4. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \Rightarrow \exists\eta>0,\ \exists M>0$:

$$\forall x,\ 0<|x-x_0|<\eta \Rightarrow |f(x)|\le M$$

Д-во. $A=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, т.е. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$:

$$\forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$$

$\varepsilon=1\quad \exists\eta=\delta|_{\varepsilon=1}>0,\ \exists M=|A|+1>0 \Rightarrow$

$\forall x,\ 0<|x-x_0|<\eta\ (=\delta|_{\varepsilon=1})\quad |f(x)|=$

$=|A+(f(x)-A)|\le |A|+|f(x)-A|<|A|+1=M$

Т. д-зана.

T5. $\exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\neq 0 \Rightarrow \exists\eta>0:\ \forall x,\ 0<|x-x_0|<\eta$

$$\Rightarrow \operatorname{sgn} f(x)=\operatorname{sgn} A$$

Д-во. $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \forall x,\ 0<|x-x_0|<\delta \Rightarrow$

$\Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon$, т.е. $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$

$\varepsilon=\frac{|A|}{2},\ \exists\eta=\delta|_{\varepsilon=\frac{|A|}{2}}>0 \Rightarrow \forall x,\ 0<|x-x_0|<\eta \Rightarrow$

$$A-\frac{|A|}{2}<f(x)<A+\frac{|A|}{2}$$

$A>0 \Rightarrow f(x)>A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}>0$

$A<0 \Rightarrow f(x)<A+\frac{-A}{2}=\frac{A}{2}<0$ Т. доказана