Пензенский государственный технологический университет

- Кафедра «ПРИКЛАДНАЯ ИНФОРМАТИКА»

ДИСЦИПЛИНА «Инженерная и компьютерная графика»

РАЗДЕЛ I. **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ**

Преподаватель: доцент каф. ПИ
Ремонтова Л.В.

2015 г.

ГЕОМЕТРИЯ
Тема 1 раздела:
ЗАДАНИЕ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ И МНОГОГРАННИКОВ НА КОМПЛЕКСНОМ ЧЕРТЕЖЕ (ЭПЮРЕ МОНЖА)

Лекция № 1
Предмет начертательной геометрии.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИЙ ТОЧКИ. ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

ПЛАН ПРОВЕДЕНИЯ ЛЕКЦИИ № 1
Раздел I
НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Тема 1 раздела
ЗАДАНИЕ ТОЧКИ, ПРЯМОЙ, ПЛОСКОСТИ И МНОГОГРАННИКОВ НА КОМПЛЕКСНОМ ЭПЮРЕ (ЧЕРТЕЖЕ) МОНЖА

Тема лекции
ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ПРОЕКЦИЙ ТОЧКИ. ИНВАРИАНТНЫЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

Учебные цели - после изучения темы лекции студенты должны:
Знать, зачем необходима НГ и что служит предметом её изучения
Знать понятие обратимости чертежа
Знать идею метода двух изображений
- ***Знать, сущность метода прямоугольных (ортогональных) проекций***
- ***Знать взаимное расположение горизонтальной и фронтальной проекции точки на эпюре***
- ***Знать взаимное расположение фронтальной и профильной проекций точки на эпюре***
- ***Знать связь между координатами точки и её проекциями***
- ***Знать инвариантные свойства ортогонального проецирования***
- ***Иметь понятие о равноудаленных и конкурирующих точках***

Учебные вопросы лекции:
- ***Проекции точки на двух плоскостях проекций***
- ***Проекции точки на трёх плоскостях проекций***
- ***О равноудаленных точках***
- ***О конкурирующих точках***
- ***Инвариантные свойства ортогонального проецирования***

Задание на самостоятельную работу:
- ***Изучить, понять и запомнить материал лекции 2***
- ***Для тех, кто рисунки в лекции выполнял без инструмента и цветных карандашей, выполнить чертежи в соответствии с требованиями лектора и на каждое занятие по НГ носить необходимые инструменты и принадлежности***

Рекомендуемая учебная литература:
Изучить и запомнить изложенный теоретический материал по конспекту лекций и учебнику Фролов С.А. Начертательная геометрия: учебник.- 3-е изд., перераб и доп.- М.:ИНФРА-М, 2008.- (Высшее образование): **см. с. 22-38**

Проблема:

- *как изобразить на листе чертежа, имеющего только два измерения, фигуры трехмерного пространства, и наоборот, как определить формы, размеры и взаимное расположение геометрических фигур в пространстве по имеющимся изображениям и решить поставленные задачи, т.е. как получить обратимые изображения?*

Начертательная геометрия как наука:

- В процессе решения указанной проблемы и возникла наука ***Начертательная геометрия.*** Она служит мостом между стереометрией и планиметрией.
- Название науки **НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ** содержит два слова. Слово ГЕОМЕТРИЯ связывает науку с областью математики, а слово НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ, происходящее от слов **НАЧЕРТАТЬ, ЧЕРТИТЬ** или **ЧЕРТА**, указывает на графическую форму познания науки.

Цель изучения начертательной геометрии

- во-первых, обеспечить бакалавра методами построения изображений любых фигур;
- во-вторых, - способами графического решения позиционных и метрических задач;
- в-третьих, развить пространственное воображение, без которого немыслимо никакое инженерное творчество.

Задачи начертательной геометрии

- Они могут быть **позиционными**, **метрическими** или содержать позиционную и метрическую составляющие**:**
- - **позиционные** задачи требуют ответа о взаимном расположении геометрических фигур,
- - **метрические** задачи - об истинных размерах расстояний и углов, как между элементами одной фигуры, так и между разными фигурами.

Предмет изучения начертательной геометрии

- 1) метод проекций, устанавливающий взаимно однозначное соответствие между фигурами трёхмерного пространства и их двумерными изображениями;
- 2) изображения самих фигур;
- 3) способы решения позиционных и метрических задач при различных взаимных положениях фигур.

Требования к чертежу:

1. Точность,
2. Простота,
3. Наглядность,
4. **Обратимость.**

- Первые три требования не нуждаются в пояснениях.

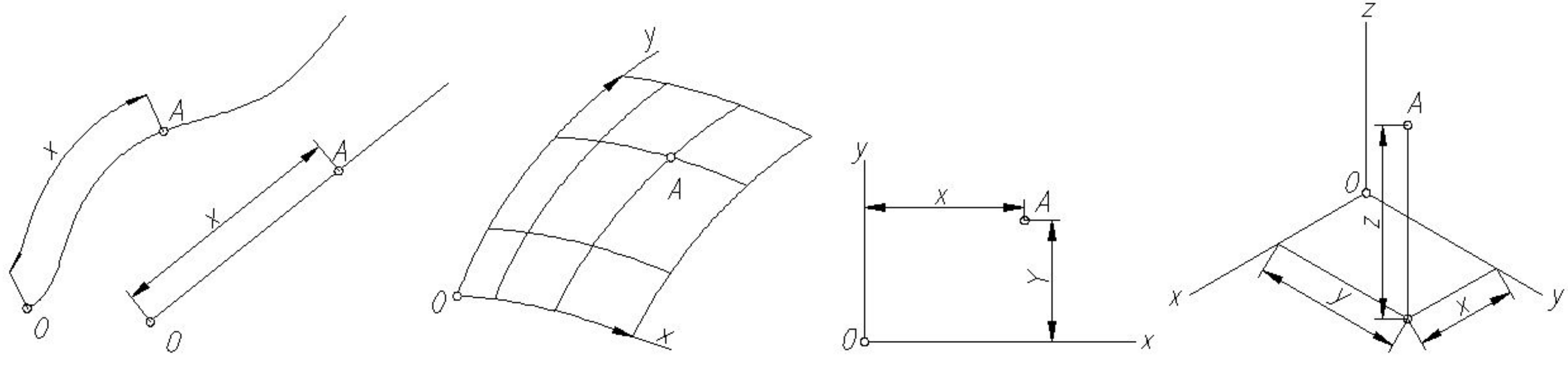
С позиций теории множеств, любая геометрическая фигура рассматривается как множество всех принадлежащих ей точек

Как на поверхности, так и на линии существует своё множество точек. Положение точки на любой линии (рис. а) определяется *одной* координатой, например расстоянием *x* от фиксированной точки отсчёта *0*;

Точки на кривой поверхности - двумя криволинейными координатами *x* и *y* (рис. b), точки на плоскости – двумя линейными координатами *x* и *y* (рис. с). Поэтому говорят, что точки на линии составляют однопараметрическое множество точек ∞^1, а точки на криволинейной или плоской поверхности - двупараметическое множество точек ∞^2.

Множество точек пространства трёхпараметрично, так как любая его точка однозначно определяется тремя координатами (рис. d), что принято обозначать как ∞^3.

Линия, определяемая множеством точек ∞^1, может принадлежать поверхности, с множеством точек ∞^2, или трёхмерному пространству с множеством точек ∞^3.



a) b) c) d)

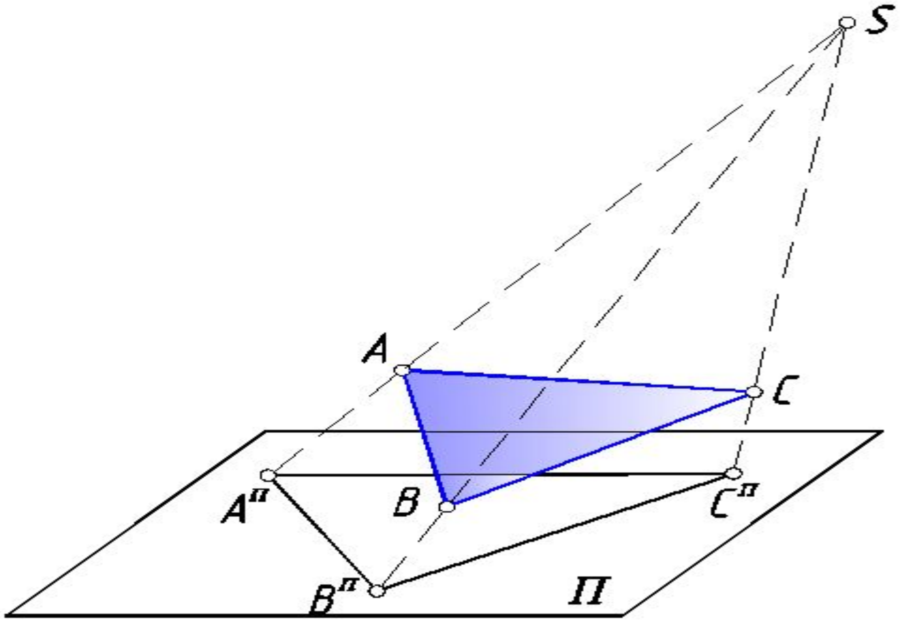
Понятие обратимости чертежа

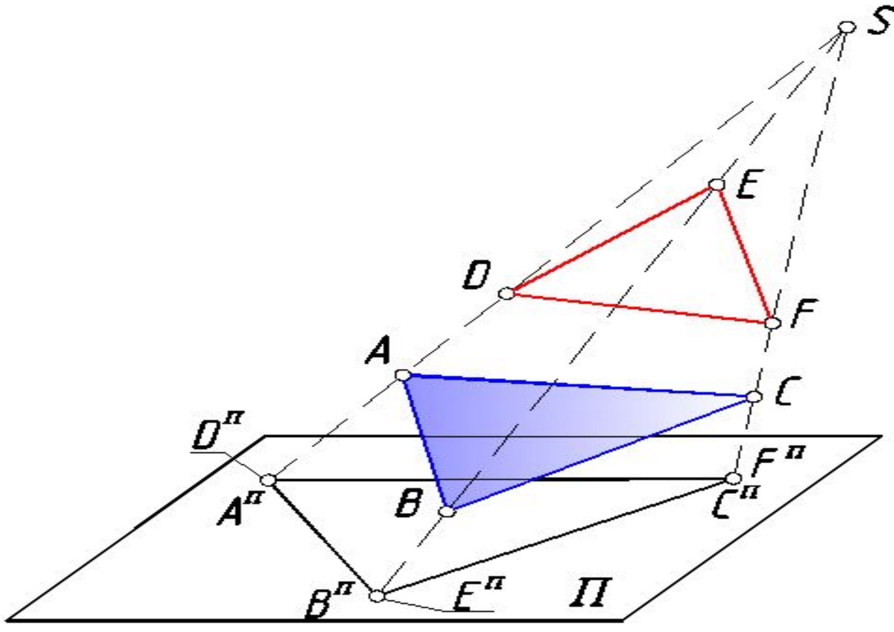
Чертеж называется обратимым, если по изображению фигуры можно восстановить ее форму, размеры и положение в пространстве.

- Множество точек пространства **трёхпараметрично**, так как любая его точка однозначно определяется **тремя** координатами, что принято обозначать как ∞^3.
- Поэтому признак обратимости можно уточнить так: **чертеж будет обратимым, если трехпараметрическому множеству точек пространства соответствует трёхпараметрическое множество их**

Метод проекций

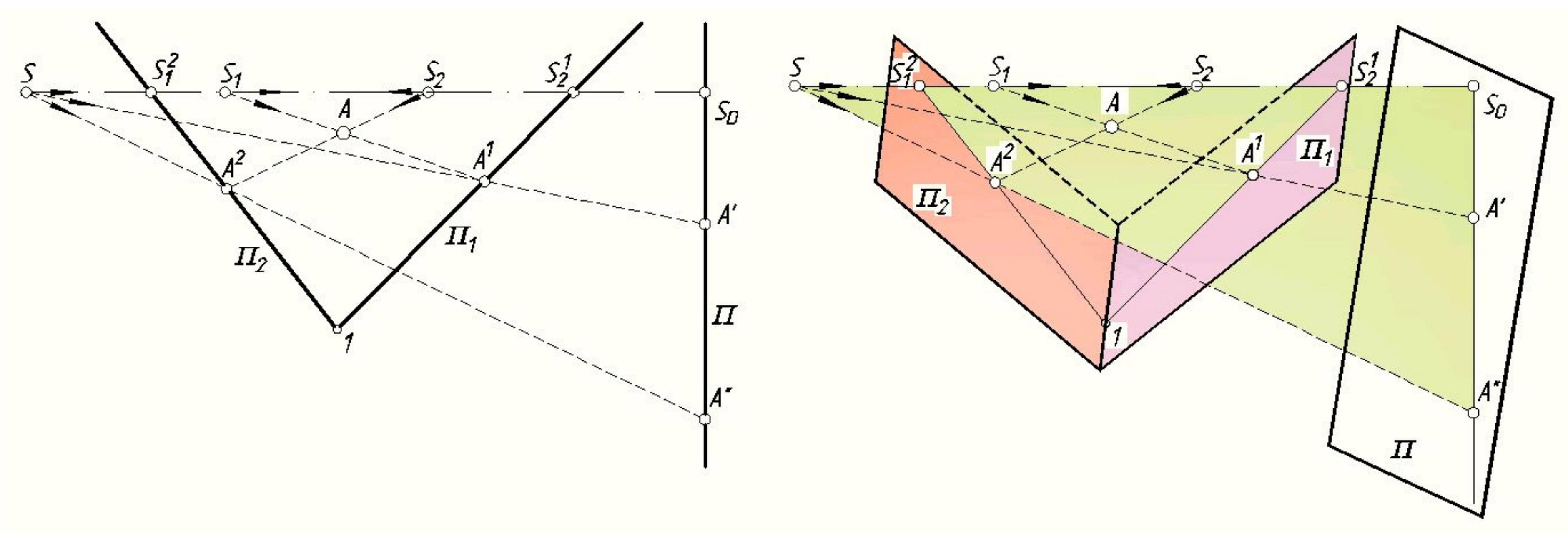
- В основу метода положена операция получения изображения точки, как результат пересечения проецирующего луча, проходящего через точку S, с плоскостью проекций П.
- Для реализации метода необходим **аппарат проецирования и объекты проецирования**. Введём следующие обозначения:
- 1) **аппарат проецирования** - это плоскость проекций **П** и центр проецирования **S**;
- 2) **объект проецирования** - точки A, B, C... какой-либо фигуры;
- 3) **результат проецирования** - проекции $A^П$, $B^П$, $C^П$, …точек A, B, C





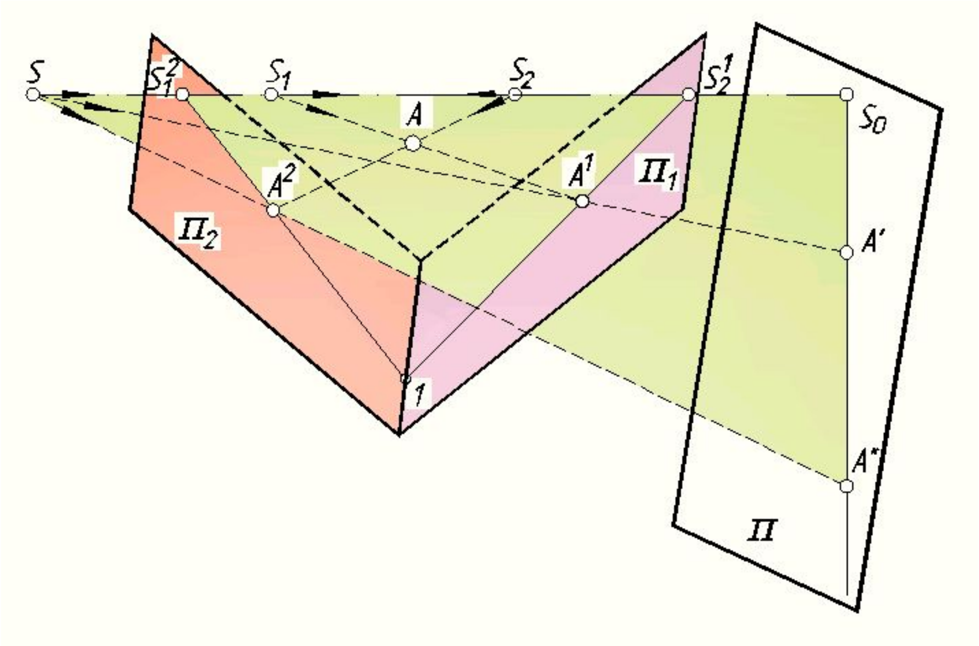
Метод двух изображений

- Классический метод двух изображений реализуется при наличии **трёх** аппаратов **центрального** проецирования:
- основной аппарат проецирования – плоскость П и центр S,
- вспомогательный аппарат проецирования – плоскость $П_1$ и центр S_1,
- вспомогательный аппарат проецирования – плоскость $П_2$ и центр S_2.
- При этом все центры проецирования должны лежать на одной прямой! *Прямая S_0A□A□* на плоскости П *называется линией связи* между основными проекциями A□ и A□, а *точка S_0 называется исключённой точкой* на плоскости П



Метод двух изображений

- Мысленно, по рисунку, выполните построения в обратной последовательности, начиная от A' и A". При этом, как видите, можно восстановить положение точки в пространстве! Значит, <u>полученное изображение является обратимым</u>.
- С точки зрения исчислительной геометрии обратимость полученного изображения объясняется так:
- точка A пространства определена тремя параметрами (∞^3),
- пара A', A" основных проекций точки A, <u>лежащих на линии связи</u>, тоже определяется тремя параметрами – например, проекцию A' можно выбрать из множества ∞^2 точек плоскости П, а проекцию A" можно выбрать лишь из множества ∞^1 точек**,** принадлежащих линии связи S_0A'A".
- Поэтому пары двух основных проекций A' и A" будут составлять трехпараметрическое множество
- $\infty^3 = \infty^2 + \infty^1$.

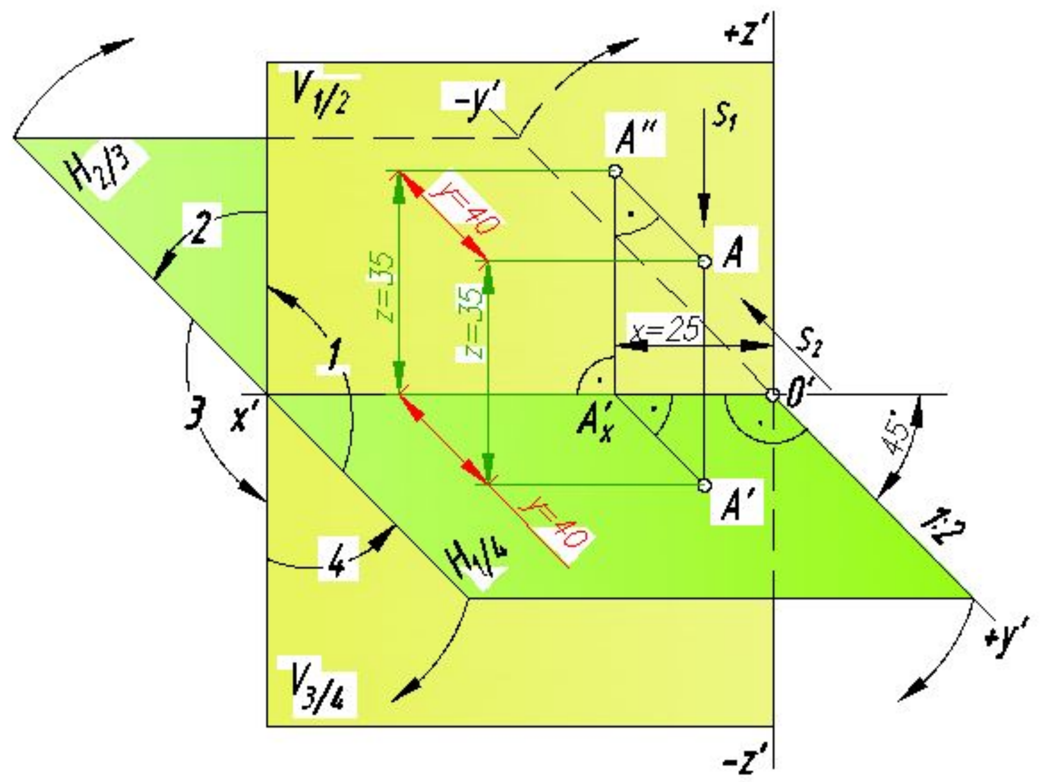


1. Проекции точки на 2-х плоскостях проекций

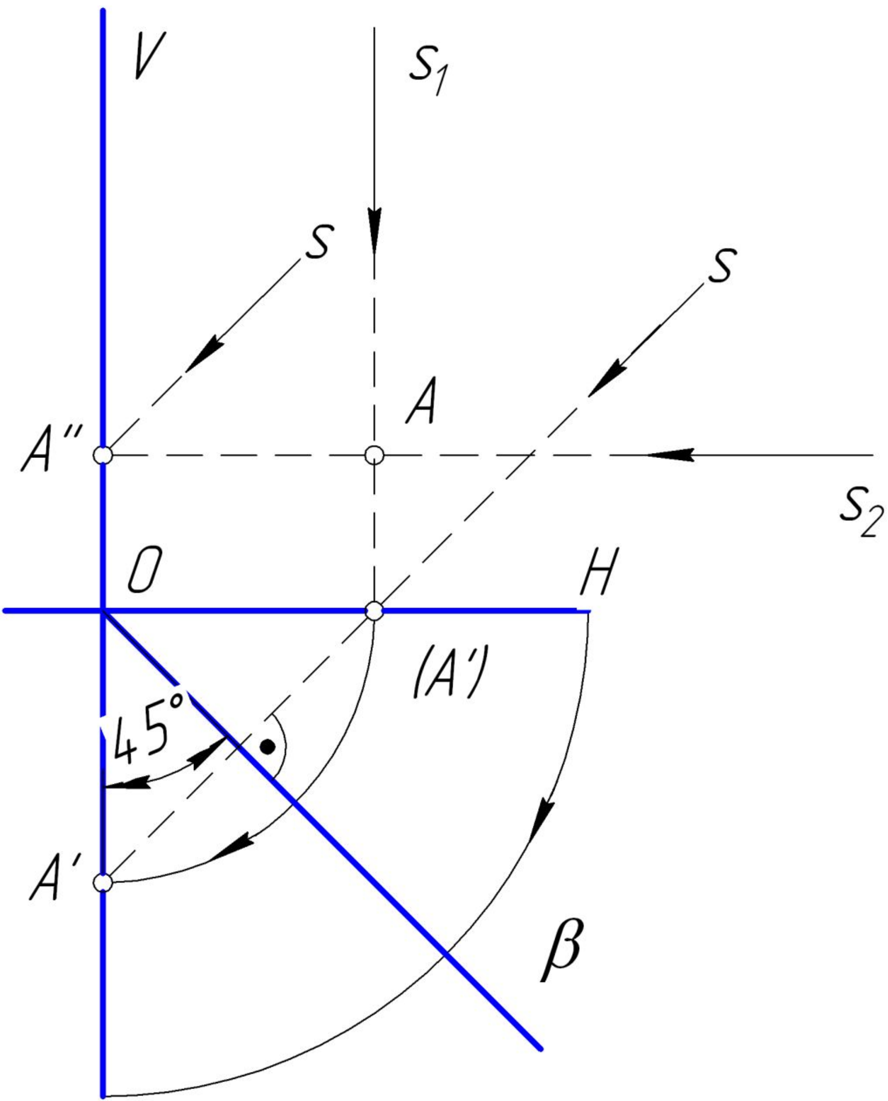
- **Первый** аппарат проецирования - *<u>горизонтальная плоскость проекций</u>* H и проецирующие лучи, заданные направлением прямой $s_1 \perp$ H,
- **Второй** аппарат проецирования – *<u>фронтальная плоскость проекций</u>* V и проецирующие лучи, заданные направлением прямой $s_2 \perp$ V.
- При этом и V□H.
- На рисунке с плоскостями H и V совмещена декартовая система координат 0xyz:
- **x□**- *<u>линия пересечения плоскостей H и V</u>*,
- **z□** - *<u>принадлежит плоскости V</u>*,
- **y□** – *<u>принадлежит плоскости H</u>*,
- **0□** –*<u>начало координат</u>*.
- x□, y□ и z□ – *<u>оси координат</u>* или *<u>оси проекций</u>*.
- Объект проецирования - точка A.
- Результат проецирования:

A□ - *горизонтальная проекция точки* A,
A□□ - *фронтальная проекция точки* A.
1, 2, 3, 4 – четверти пространства, созданные плоскостями H и V. $H_{1/4}$, $H_{2/3}$, $V_{1/2}$ $V_{3/4}$ – полуплоскости между четвертями пространства.
Плоскость A□A A□□ □ и к H, и к V и к оси x!
|0□A_X□| = x_A,
|AA□□| = y_A = |A□A_X□|
| AA□| = z_A = |A□□A_X□|

В машиностроительной практике наибольшее распространение получил метод прямоугольных (ортогональных) проекций, разработанный Г. Монжем. На рисунке, созданном во фронтальной диметрии, показан процесс получения проекций точки по методу главного и вторичного изображений.



Метод ортогональных проекций (метод Монжа)



- Основной аппарат проецирования: плоскость V и s□ □.
- Вспомогательный аппарат проецирования: плоскость V и $s_{2\square}$□V .
- Вспомогательный аппарат проецирования: плоскость H и $s_{1\square}$□H Плоскость H□V.
- Проецируя (A□) на V по направлению s_{∞}□□ из основного центра проецирования, получим вторичную проекцию A□ точки A.
- Есть и другой вариант получения на эпюре Монжа вторичной проекции A': плоскость H вместе со вспомогательной проекцией (A□) вращаем вокруг оси x до совмещения с плоскостью П.

Построение эпюра Монжа

Воспользуемся вторым вариантом, т.е. плоскость H с полученными проекциями вращаем вокруг оси x до совмещения её с плоскостью V. Направление поворота плоскости H показано на фронтальной диметрии стрелками. Полученный таким образом чертёж называется **<u>эпюром Монжа</u>** или **<u>комплексным чертежом</u>**.

При этом прямые $A'A_X$ и $A''A_X$ станут располагаться на общем к оси x перпендикуляре $A'A''$.

$|0\square A_X\square| = x_{A'}$,

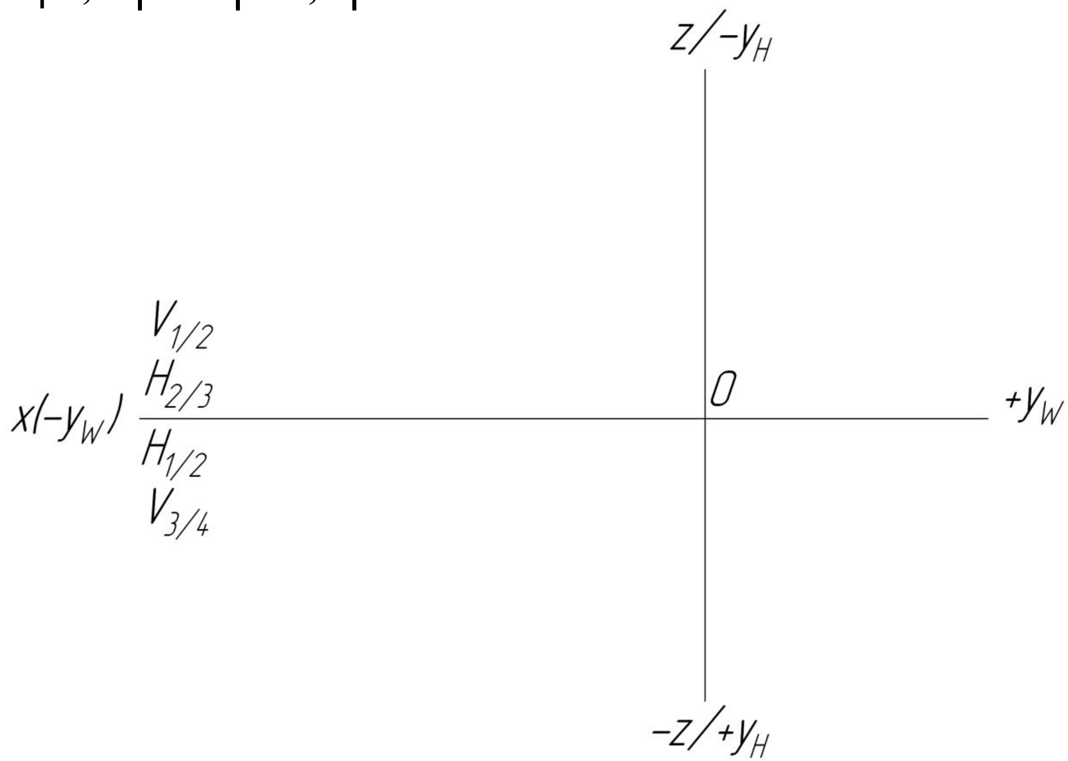
$|AA\square\square| = y_A = |A\square A_X\square|$

$|AA\square| = z_A = |A\square\square A_X\square|$

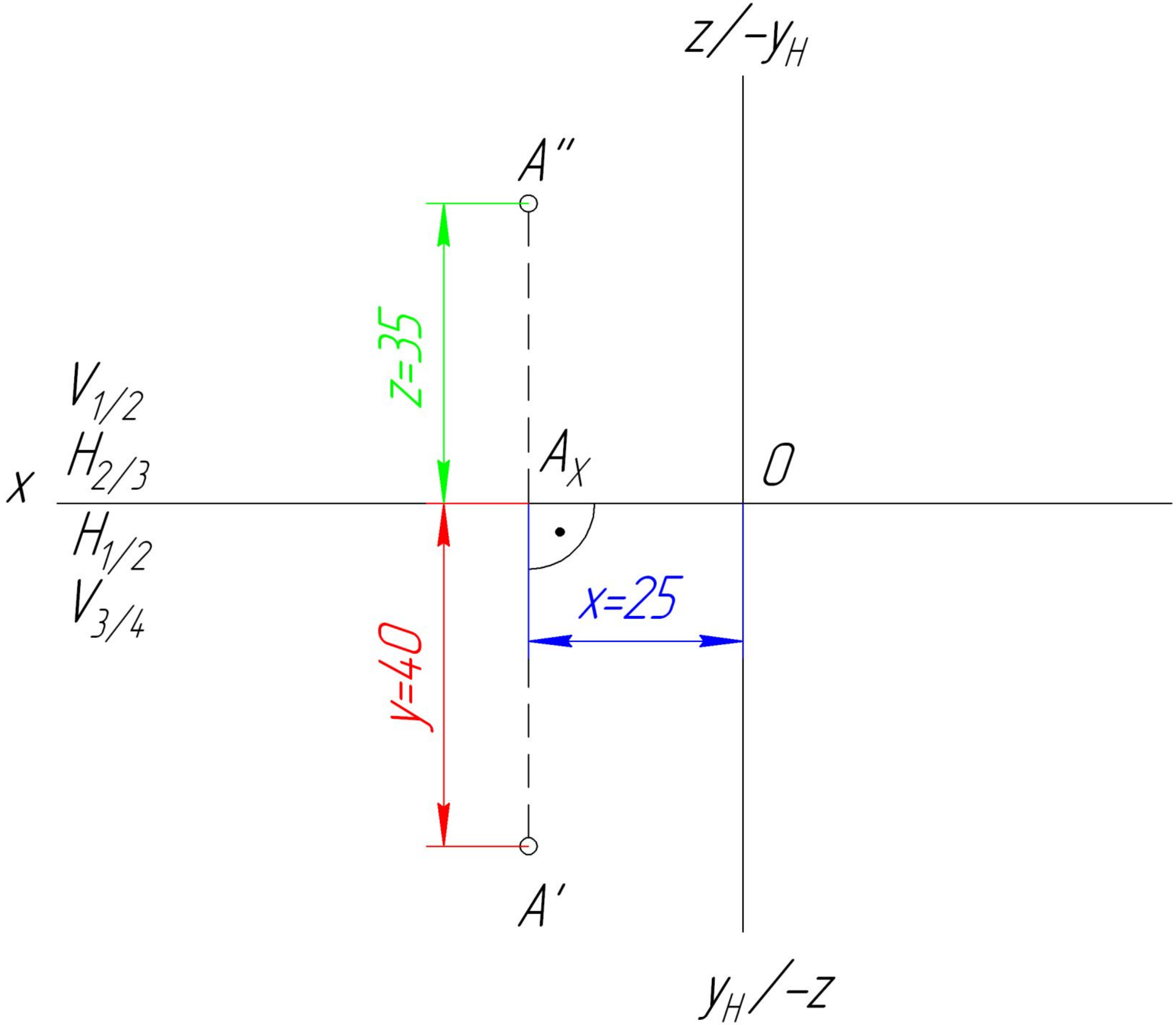
Теперь можно сформулировать следующие выводы.

<u>Следствие 1-е.</u> *Горизонтальная и фронтальная проекции точки лежат на <u>одном перпендикуляре к оси x</u> эпюра. Этот перпендикуляр является вертикальной линией связи.* Запись этого следствия в символах: $A'A'' \perp x$.

<u>Следствие 2-е</u>. *Расстояние точки от плоскости V равно расстоянию горизонтальной проекции точки от оси x. Расстояние точки от плоскости H равно расстоянию фронтальной проекции точки от оси x.* Запись этого следствия в символах: $|A,V| = y = |A',x|$, $|A,H| = z = |A'',x|$.



Проекции точки A(25, 40,



2. Проекции точки на 3-х плоскостях проекций

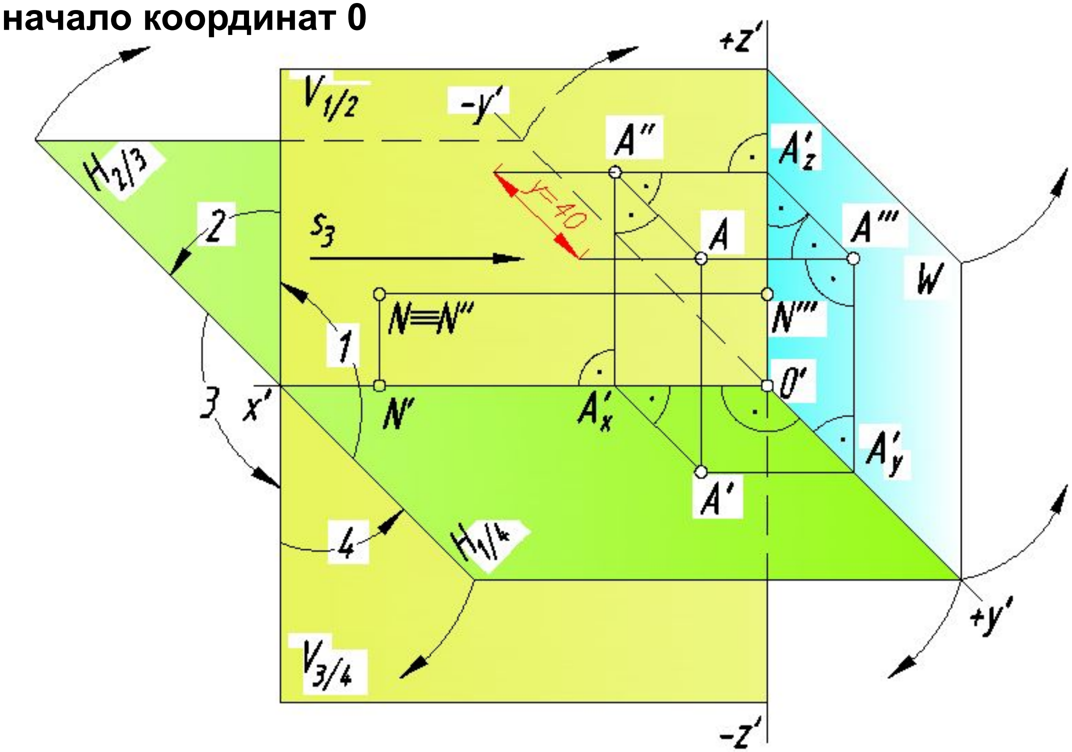
В ряде случаев фигуры могут занимать такое положение в системе плоскостей проекций V/H, при котором нельзя получить полную геометрическую информацию о фигуре или её элементах. В этом случае используют третий аппарат проецирования: плоскость W и лучи, перпендикулярные к W, заданные направлением прямой s_3.

<u>Обозначения</u>:

W – *профильная плоскость проекций*,

A‴ – *профильная проекция точки* A.

Плоскость проекций W располагаем перпендикулярно относительно H и V и проводим через начало координат 0



Для построения профильной проекции проводим через точку A по направлению s_3 проецирующий луч ⊥ к W и пересекающий W в искомой профильной проекции A‴. Проецирующие прямые AA″ и AA‴ образуют проецирующую плоскость, □ к оси z. Эта плоскость пересекает ось z в точке A_z'. Точка A_z' на оси z определяет координату z точки A. При этом $A''A_z' \perp z$ и $A'''A_z' \perp z$.

Аналогично, прямые AA′ и AA‴ образуют проецирующую плоскость, □ к оси y. Эта плоскость пересекает ось y в точке A_y'. Точка на оси y с обозначением A_y' определяет координату y точки A. При этом $A'A_y' \perp y$ и $A'''A_y' \perp y$.

Для получения двумерного чертежа (<u>эпюра</u>) плоскость W поворачивают вокруг оси z до совмещения её с плоскостью V. На рисунке стрелками показано направление поворота плоскости W. Как видно из рисунка, ось y раздваивается на y_H и y_W. Поэтому на эпюре наносим эти обозначения.

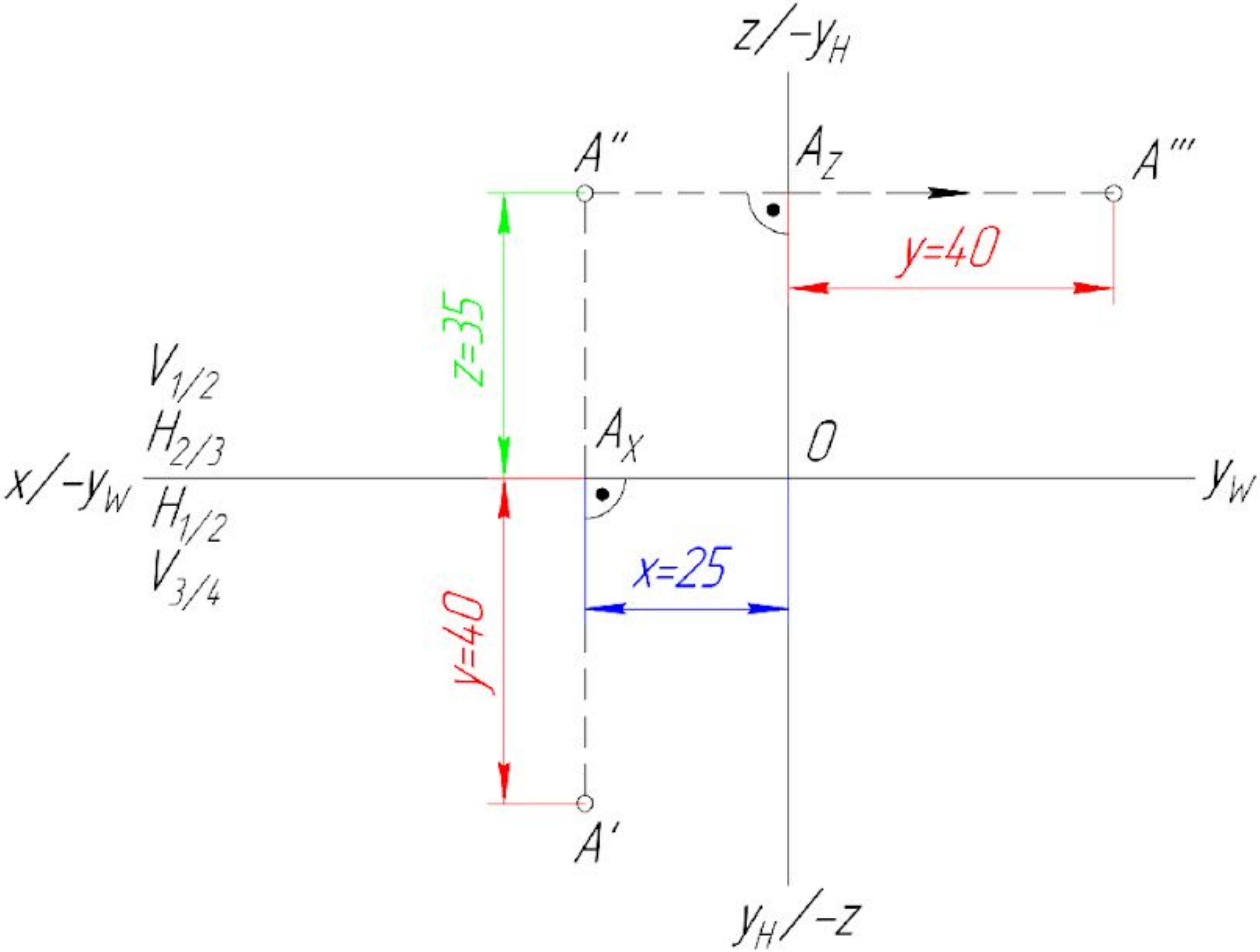
После совмещения W с V прямые $A''A_z'$ и $A'''A_z'$ будут располагаться на общем перпендикуляре A''A''' к оси z. При этом длина отрезка $A'''A_z'$ равна координате y .

<u>**Следствие 3-е**</u>. *Фронтальная и профильная проекции точки лежат <u>на одном перпендикуляре к оси z</u> эпюра. Этот перпендикуляр является горизонтальной линией связи.*

Запись этого следствия в символах: $A''A''' \perp z$

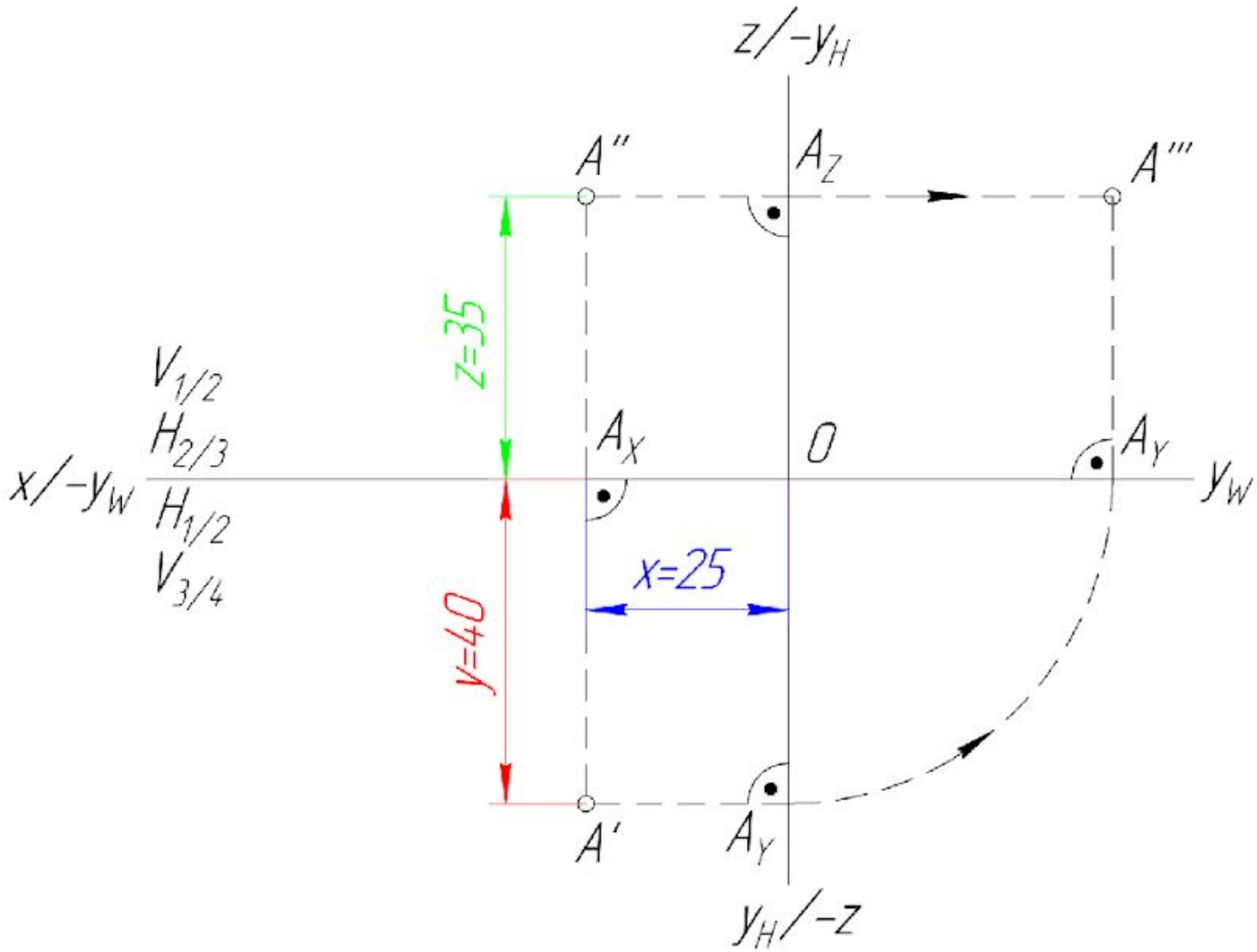
1-й приём построения профильной проекции точки А

Проведя прямую A□□□A_Z ⊥ z и отложив от оси z вправо отрезок $A_Z A'''$, равный координате $+y_A$,
получим проекцию A'''



2-й приём построения профильной проекции точки А

При построении профильной проекции любой точки ось y раздваивается на y_H и y_W. Значит, раздваивается и координатная отметка A_y. Для этого циркулем раздваиваем A_y. Затем через A″ проводим горизонтальную линию связи, а через A_y на оси y_W - линию, перпендикулярную к y_W. На пересечении этой линии с горизонтальной линией связи находится проекция A'''.



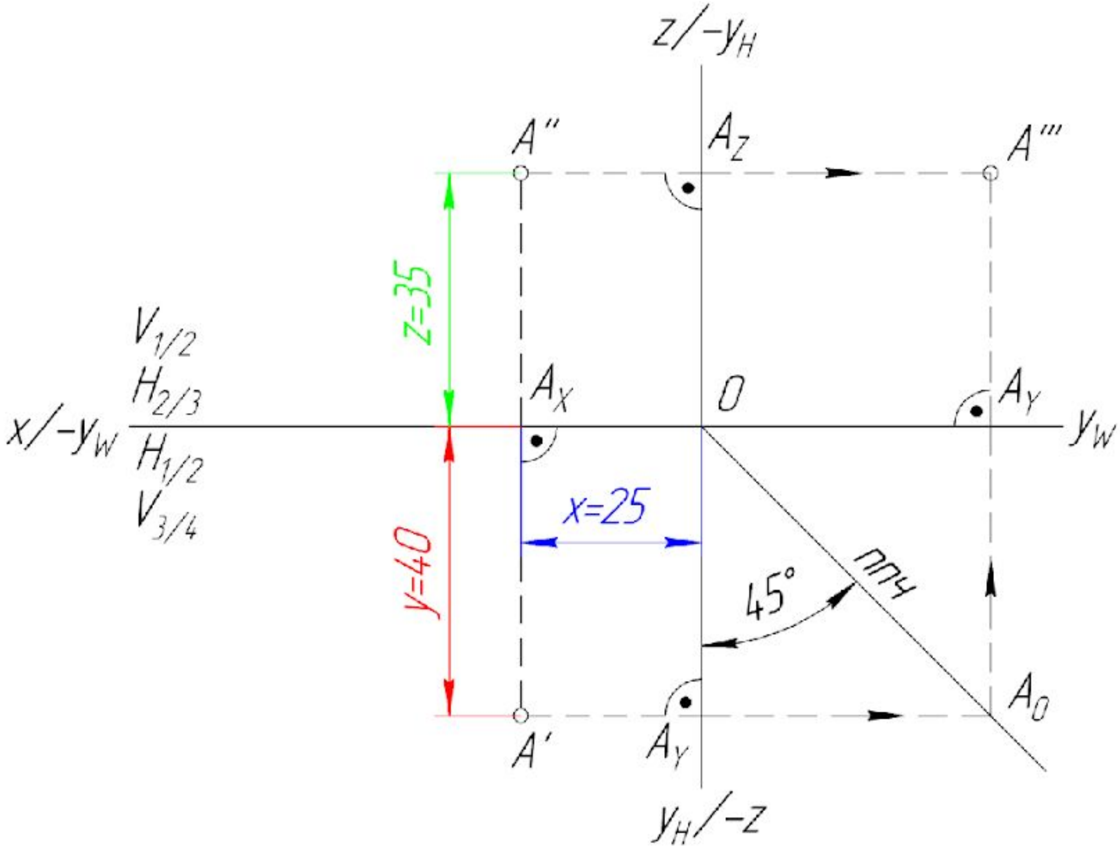
3-й приём построения профильной проекции точки А

Проведём прямые $A'A_y$ и $A'''A_y$ до взаимного пересечения в точке A_0. Затем проведём прямую через начало координат 0 и точку A_0, т.е. биссектрису угла y_H0y_W. Эту прямую назовем постоянной прямой чертежа (ППЧ). Ломаную линию $A'A_0A'''$ назовём горизонтально- вертикальной линией связи, а точку A_0 – вершиной этой линии связи.

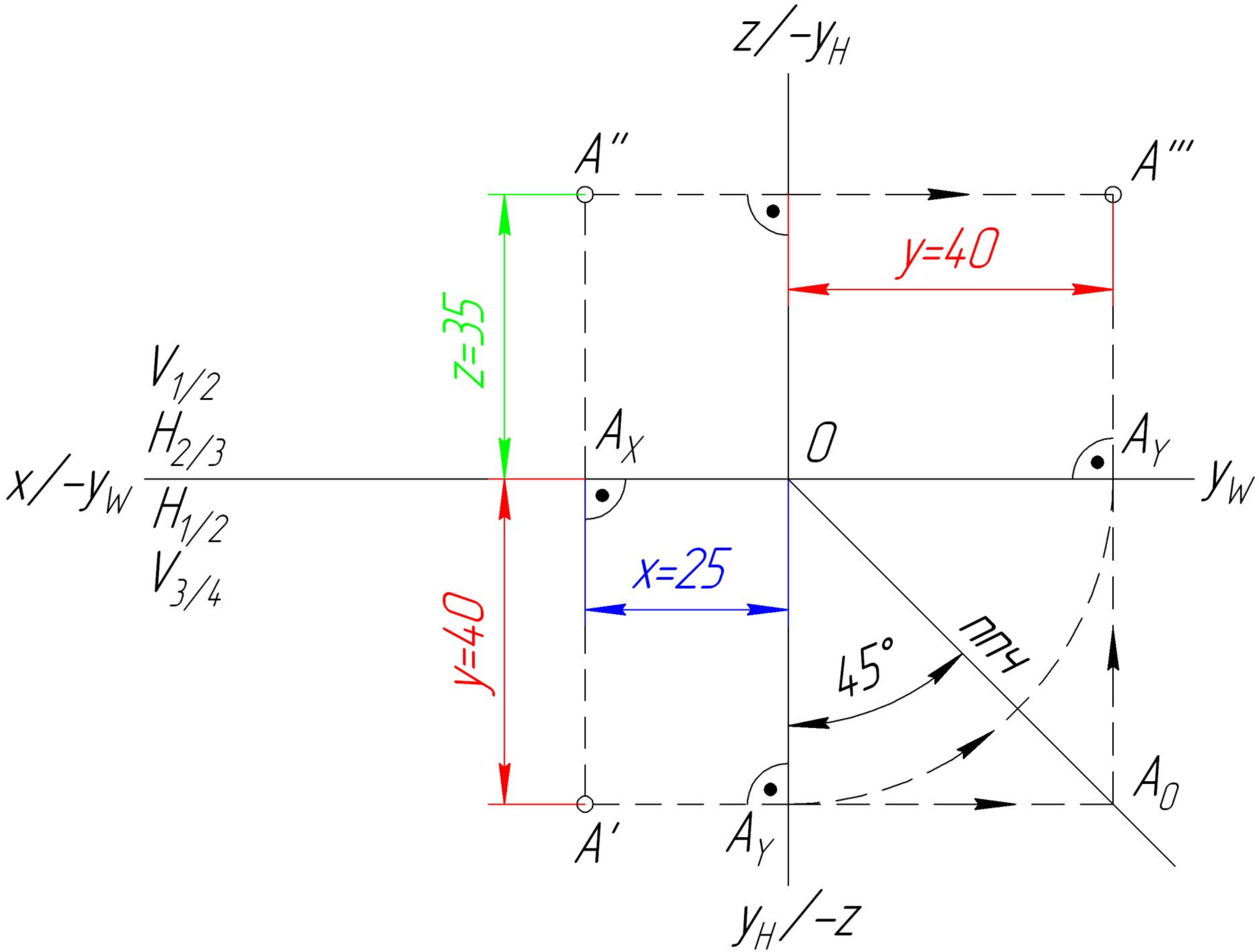
<u>Следствие 4-е.</u> *На эпюре горизонтальная и профильная проекции точки лежат на горизонтально-вертикальной линии связи, вершина которой принадлежит ППЧ.*

Значит, построение профильной проекции точки А теперь можно выполнить так: через A'' проводим горизонтальную линию связи, а через A' - горизонтально-вертикальную линию связи. В точке пересечения этих линий связи находится A''' – профильная проекция точки А.

Если необходимо строить профильные проекции большого количества точек, то использование ППЧ наиболее рациональный вариант построений.

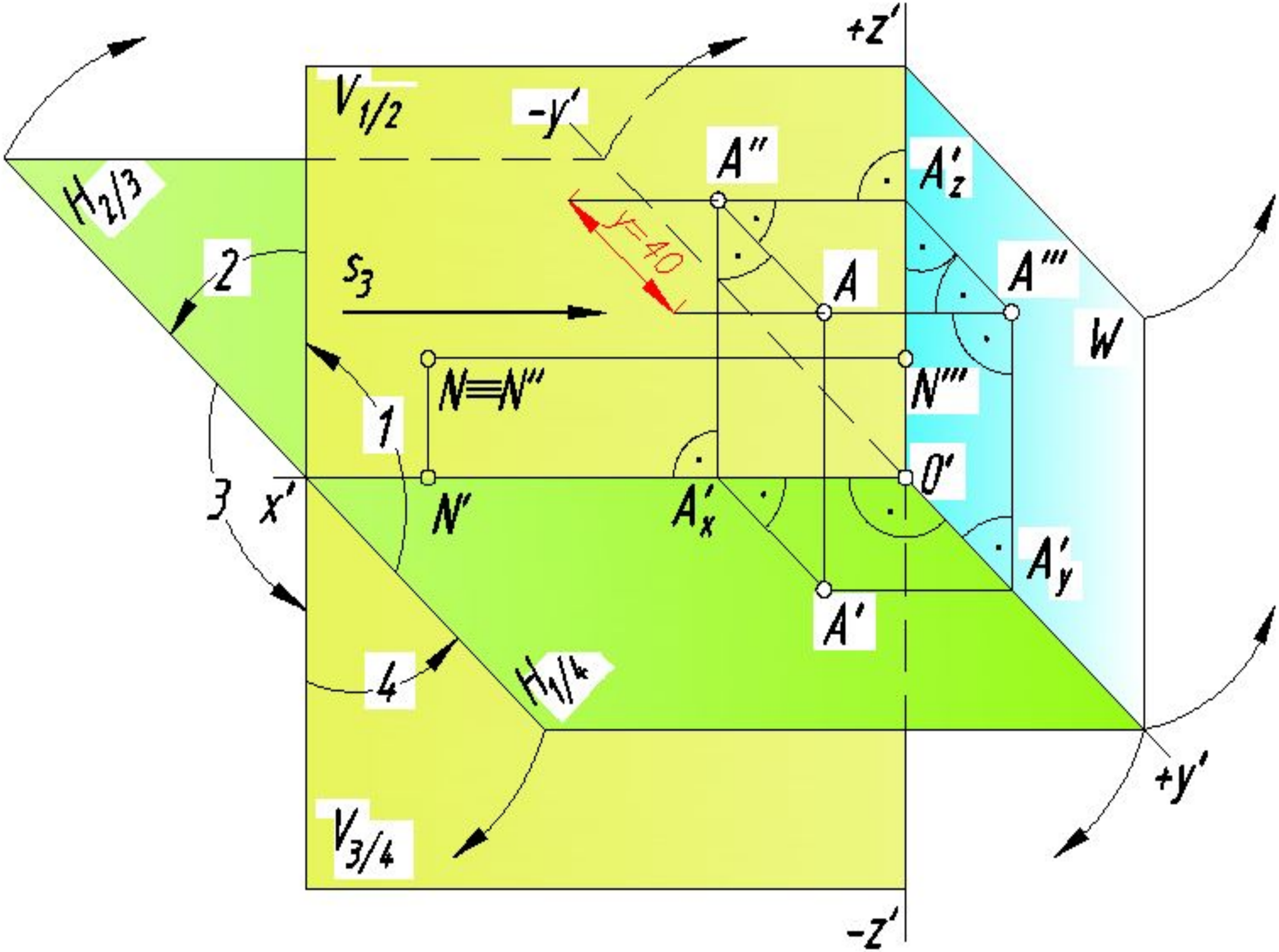


Проекции точки А(25, 40, 35)



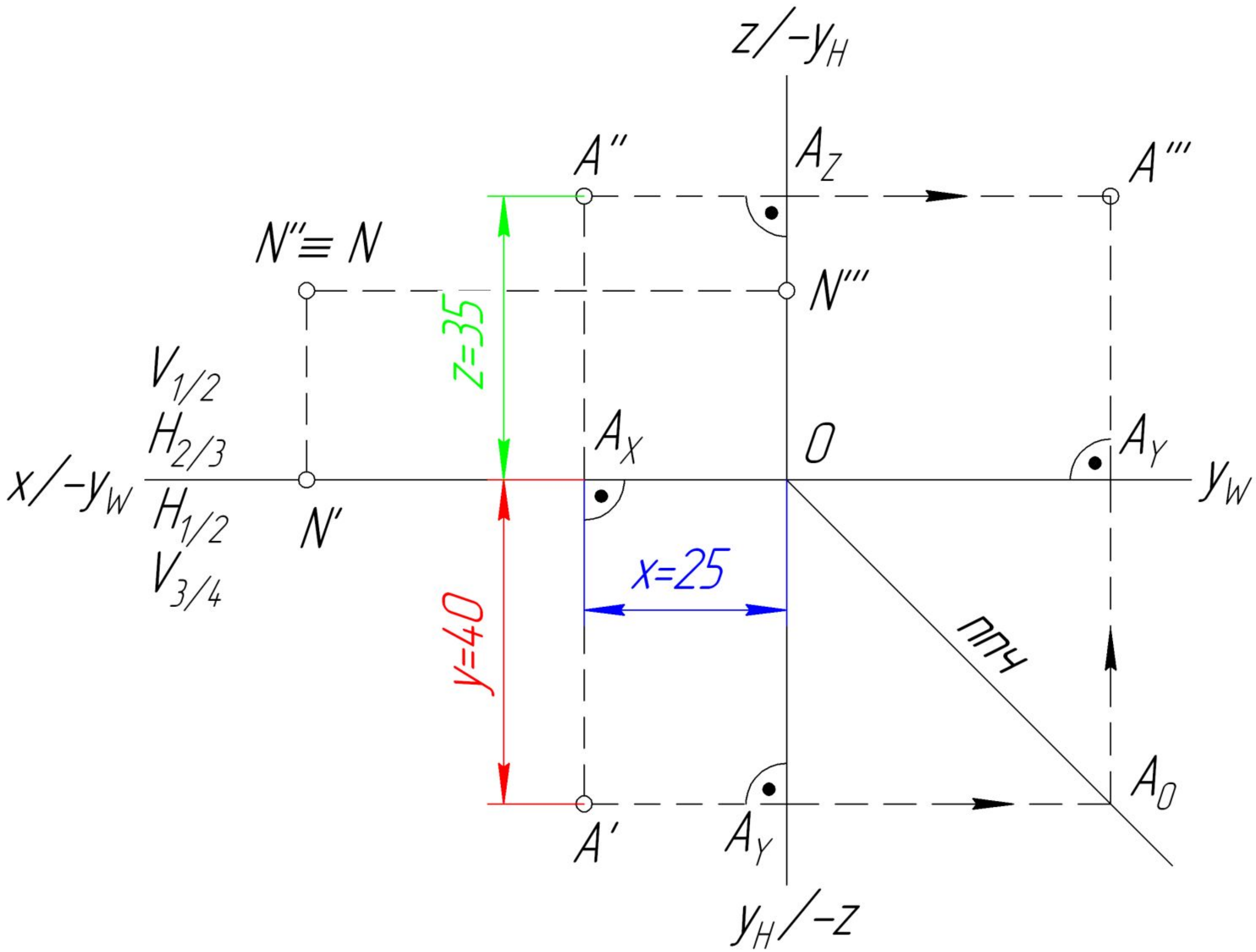
Пусть, например, точка $N \subset V$

Построим теперь три проекции какой-либо точки N, лежащей на одной из плоскостей проекций.



Три проекции точки N⊂V

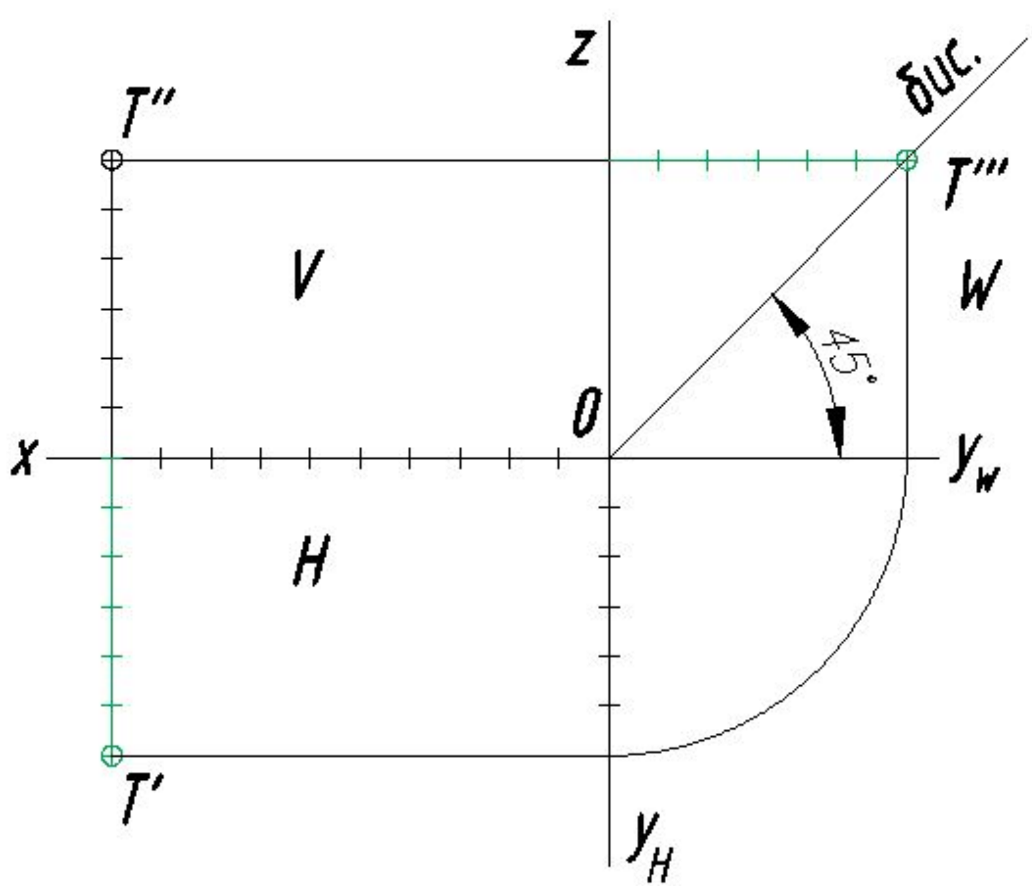
Следствие 5-е. *Если точка лежит в плоскости проекций, то та проекция точки, которая совпадает с самой точкой, располагается на поле эпюра, а две другие проекции – на соответствующих осях эпюра.*



3. О равноудалённых точках

Т (50, 30, 30). Точка Т равноудалена от двух плоскостей (H и V), т.к. y=z=30. Видим, что на третьей плоскости W проекция Т''' будет находиться на биссектрисе угла $z0y_W$, составленного осями координат плоскости W. Отсюда **Следствие**.

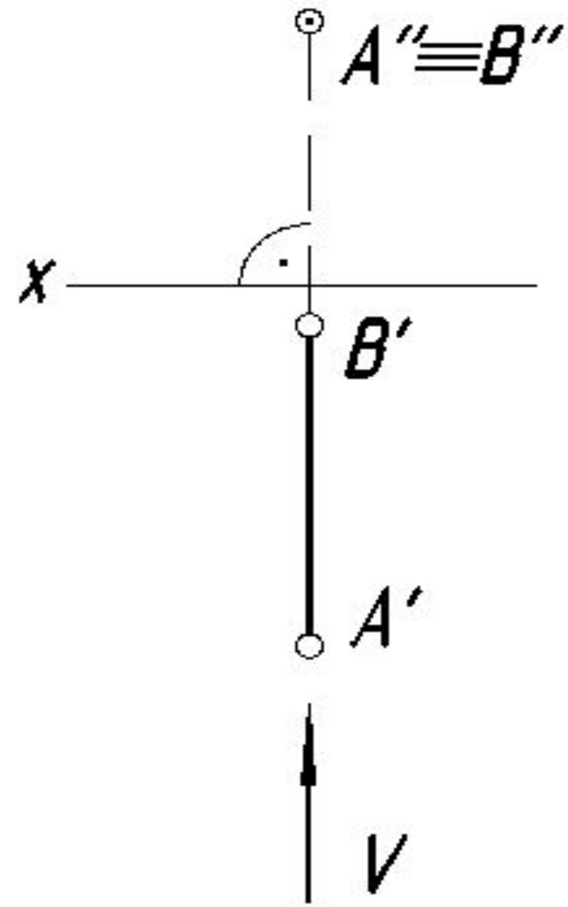
Если точка равноудалена от двух данных плоскостей проекций, то проекция точки на третьей плоскости проекций находится на биссектрисе угла, составленного осями координат, расположенными в этой третьей плоскости проекций.



4. О конкурирующих точках

Две точки, расположенные на одном перпендикуляре к данной плоскости проекций, называются конкурирующими, в смысле видимости. На этой плоскости проекции точек совпадают.

В данном случае на рисунке точки А и В конкурируют относительно V. Точка А видимая, точка В закрыта точкой А. Стрелка на эпюре показывает направление взгляда на плоскость V.



5. Инвариантные свойства ортогонального проецирования

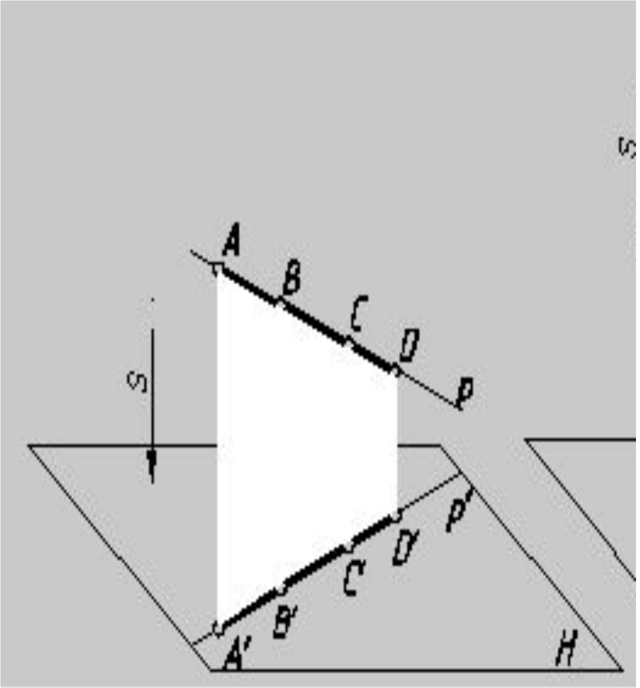
- Те свойства фигур, которые сохраняются после ортогонального проецировании на любую из плоскостей проекций – на H, на V или на W - называются *инвариантными.*
- *1-й инвариант:*
- A→A, т.е. точка проецируется в точку. Это инвариантное свойство вытекает из самого определения понятия проекции, как точки пересечения проецирующего луча с плоскостью проекций.
- *2-й инвариант:*
- Ф1⊂Ф2 ⇒ Ф1 ⊂ Ф2, т.е. если фигура Ф1 принадлежит фигуре Ф2, то проекция Ф1' фигуры Ф1 принадлежит проекции Ф2' фигуры Ф2.
- 2-й инвариант можно записать и в таком виде:
- Ф1∩Ф2 =Ф3⇒Ф1∩Ф2=Ф3, т.е. если фигуры Ф1 и Ф2 пересекаются по фигуре Ф3, то проекции Ф1' и Ф2' фигур пересекаются по проекции Ф3'.
- *3-й инвариант:*
- (Ф⊂α) ∧ (α||H)⇒Ф≅Ф, т.е. если фигура Ф принадлежит плоскости α, а плоскость α параллельна плоскости проекций, например H, то проекция Ф фигуры конгруэнтна самой фигуре Ф. Конгруэнтными фигурами называются такие фигуры, которые при наложении друг на друга полностью совпадают.

5. Инвариантные свойства ортогонального проецирования

- С помощью **1-го инварианта** можно построить проекции любой геометрической фигуры, проецируя множество точек этой фигуры.
-
- С помощью **2-го инварианта** и вытекающих из него следствий можно решать позиционные задачи.
-
- С помощью **3-го инварианта** решаются метрические задачи.
- Из каждого инвариантного свойства можно получить следствия, позволяющие дать ответ практически на любую геометрическую задачу, решаемую с помощью НГ.

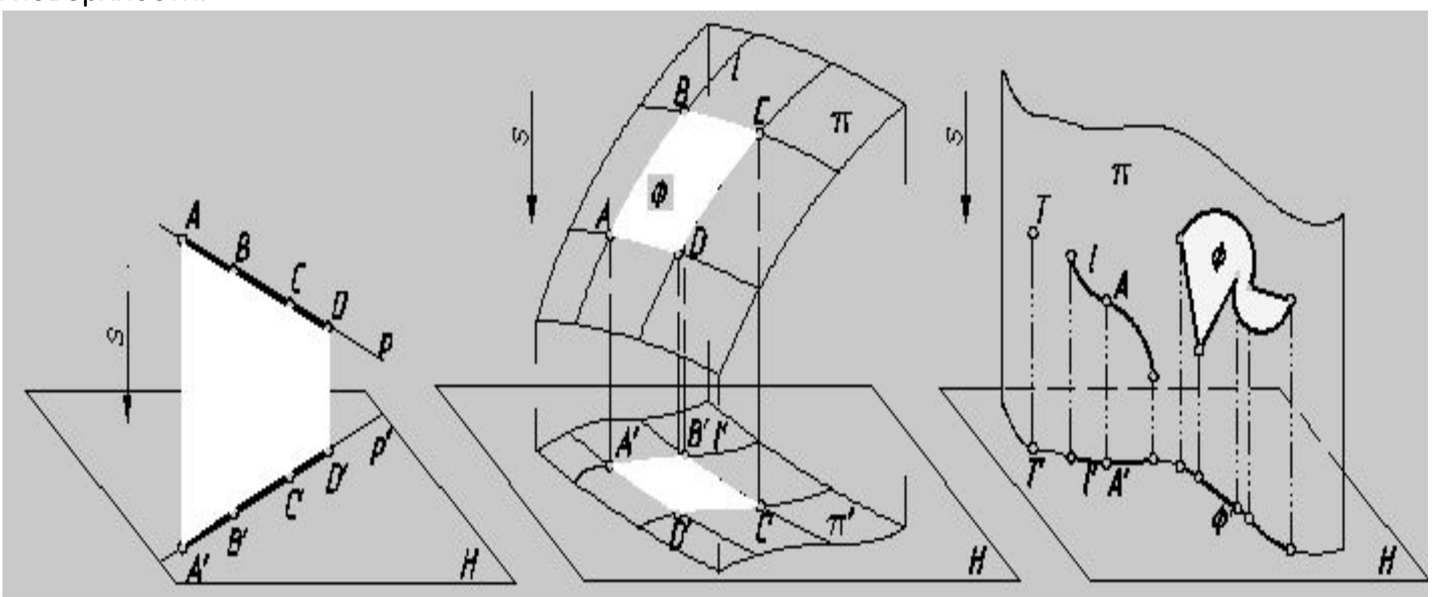
5. Инвариантные свойства ортогонального проецирования

- Из **1-го инварианта** можно получить
- **Следствие 1.1:**
- **pȽH⇒p→p** (если прямая **p** не перпендикулярна плоскости проекций, то она проецируется на неё в виде прямой) – см. рисунок.
- Действительно, все проецирующие лучи, проходящие через точки прямой **p,** образуют проецирующую плоскость, а линия пересечения двух плоскостей, т.е. проецирующей плоскости и плоскости проекций, например H, есть прямая **p'**.
- В соответствии с этим можно утверждать, что **в общем положении** плоский многоугольник (или плоская кривая) проецируются соответственно в многоугольник (или кривую линию).



5. Инвариантные свойства ортогонального проецирования

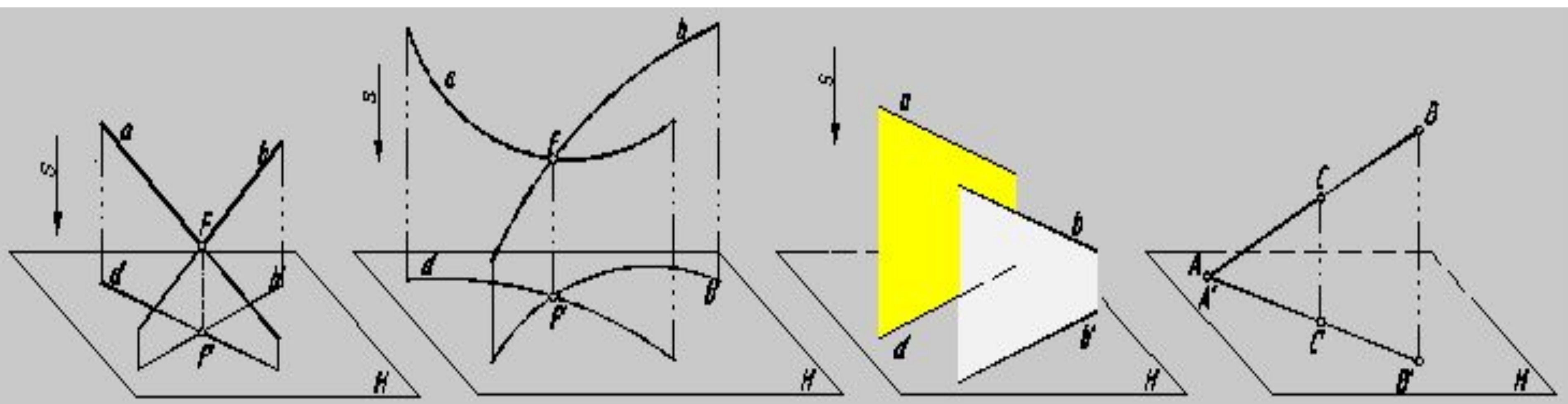
- Из **2-го инварианта**, если заменить Ф1 и Ф2 на конкретные геометрические образы, можно получить следующие следствия.
- **<u>Следствие 2.1</u>**: A ⊂ p (l)⇒ A□□ ⊂ p□□(l'), т.е. если точка A принадлежит линии (прямой p или кривой l), то проекция A□□ точки принадлежит проекции этой линии (p□□ прямой или l' кривой) – рис. a,c.
- **<u>Следствие 2.2:</u>** l ⊂ π ⇒ l□□⊂ π□□, т.е. если линия l принадлежит поверхности π, то проекция l□□ линии принадлежит проекции π□□ поверхности – рис. b.
- **<u>Следствие 2.3:</u>** Ф ⊂ π ⇒ Ф□□ ⊂ π□□, т.е. если фигура Ф принадлежит поверхности π, то проекция Ф□□ фигуры принадлежит проекции π□□ поверхности – рис. b.
- **<u>Следствие 2.4:</u>** (Ф ⊂ π) ∧ (π ⊥H) ⇒ Ф□⊂ $π_H$, т.е. если фигура Ф принадлежит поверхности π и поверхность π перпендикулярна плоскости проекций, например H, то проекция Ф□ фигуры принадлежит линии пересечения $π_н$ поверхности π с этой плоскостью проекций – рис. c.
- На рис. **c** качестве фигур, принадлежащих поверхности π, представлены точка T, линия **l** и более сложная фигура Ф.
- В данном случае поверхность π называется **проецирующей** относительно плоскости проекций, а линия $\mathbf{π_H}$ – следом-носителем этой поверхности.



-
-
- **a)** **b)** **c)**

5. Инвариантные свойства ортогонального проецирования

- **<u>Следствие 2.5:</u>** *F = p□ l ⇒ F' = p'□ l' , т.е. если точка F есть точка пересечения линий p и l, то проекция F' этой точки есть результат пересечения проекций p' и l' этих линий – рис. 7 а, б.*
- Информацию о взаимно параллельных прямых можно записать в такой форме - ***a||b ⇒ a□b = F***$_\infty$.. Здесь ***F***$_\infty$ бесконечно удалённая точка «пересечения» прямых.
- Тогда на основании 2-го инварианта получаем:
- **<u>Следствие 2.6</u>**: *a||b ⇒ a'||b' , если a и b параллельны друг другу, то и их проекции на плоскости проекций будут параллельными – рис. 7 в.*
- На рис. 28г показана прямая AB и её проекция. При этом точка A принадлежит плоскости проекций, а точка C делит отрезок AB в отношении m/n. Т.к. лучи BB' и CC' параллельны, получаем следующее следствие.
- **<u>Следствие 2.7:</u> ,** *т.е. если точка C принадлежит отрезку AB, то отношение длин отрезков AC к CB равно отношению длин проекций этих отрезков.*

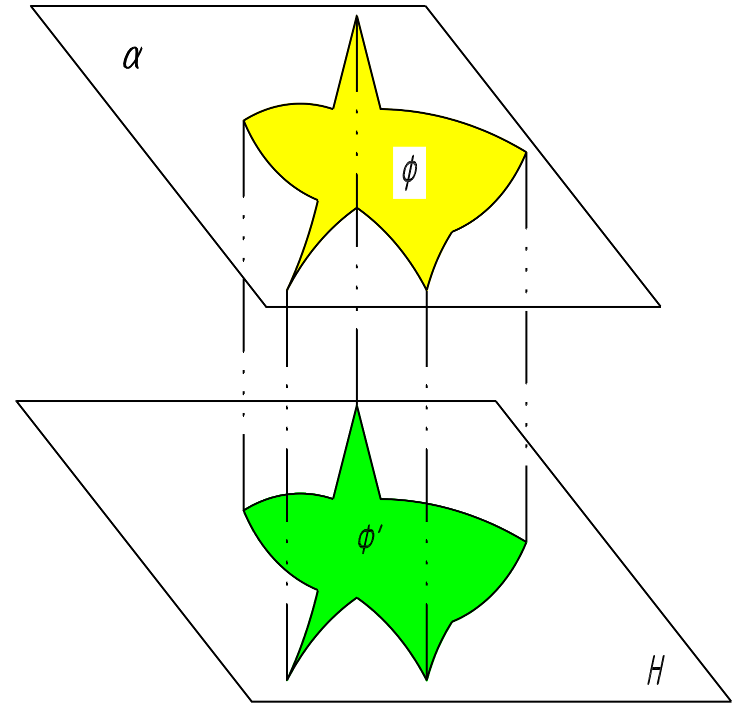


- а) б) в) г)

инвариант:

(Ф⊂α) ∧ (α||H)⇒Ф□≅Ф, т.е. если фигура принадлежит плоскости α и плоскость α параллельна, например, плоскости проекций H, то проекция Ф□ конгруэнтна самой фигуре Ф.

Ещё раз напоминаем: если фигуры при наложении друг на друга полностью совпадают, то они называются конгруэнтными



Спасибо за внимание!