КАФЕДРА
КОНСТРУКЦИИ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ
И РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Строительная механика ракет-носителей

Контрольный опрос по лекции 2.1

Общие сведения о тонких пластинах

1. Какие напряжения и деформации в пластине, согласно гипотезам Кирхгофа, = 0?

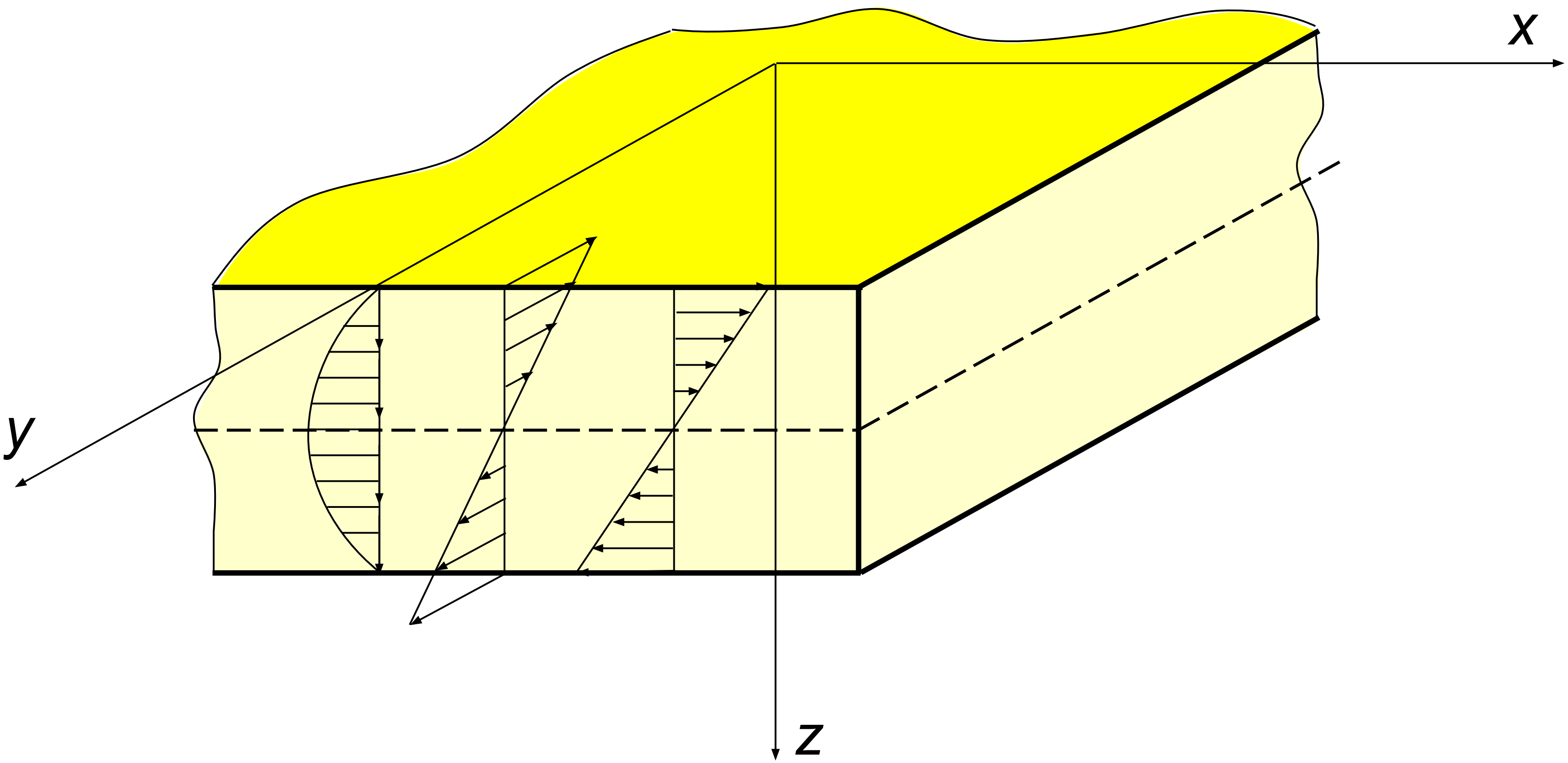
σ_x	σ_y	σ_z	τ_{xy}	τ_{yz}	τ_{zx}
ε_x	ε_y	ε_z	γ_{xy}	γ_{yz}	γ_{zx}

2. Упростить геометрические соотношения для пластины, с учетом гипотез Кирхгофа

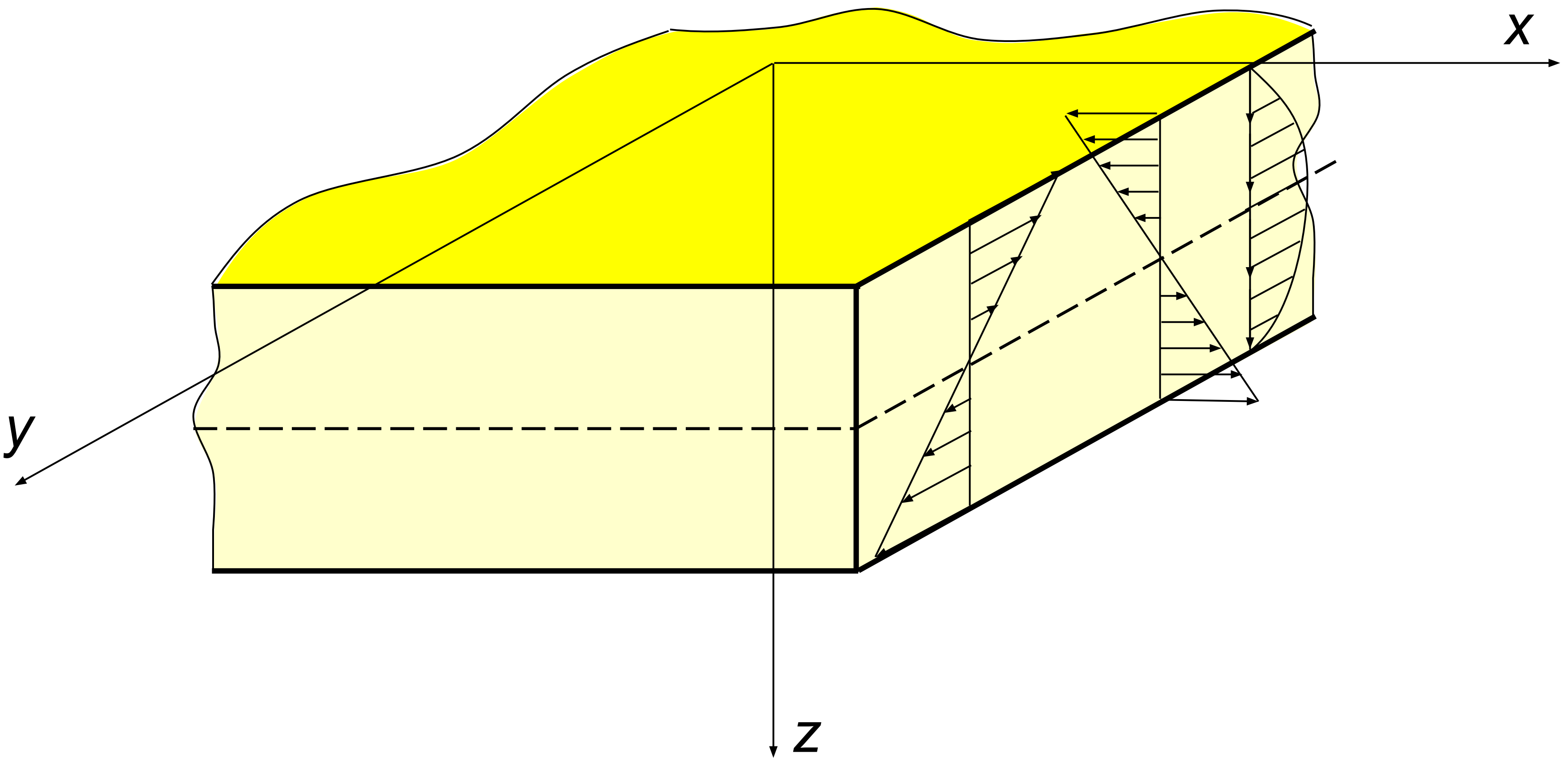
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_x + \mu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)\right]; \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_y + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)\right]; \\ \sigma_z = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_z + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right] \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \\ \tau_{yz} = G\gamma_{yz}; \\ \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \end{cases}$$

3. Эпюры каких напряжений, возникающих в пластине, изображены на рисунке?

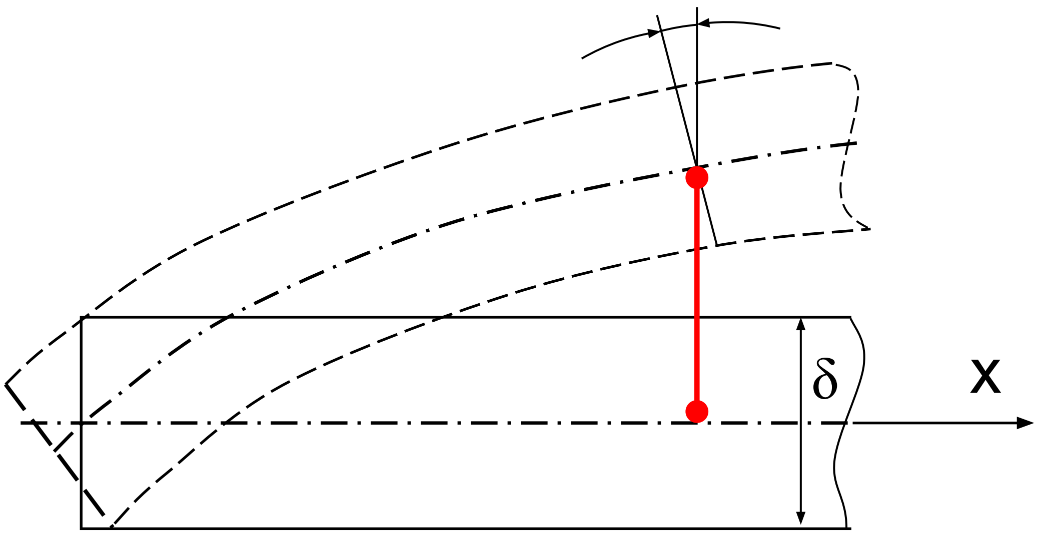


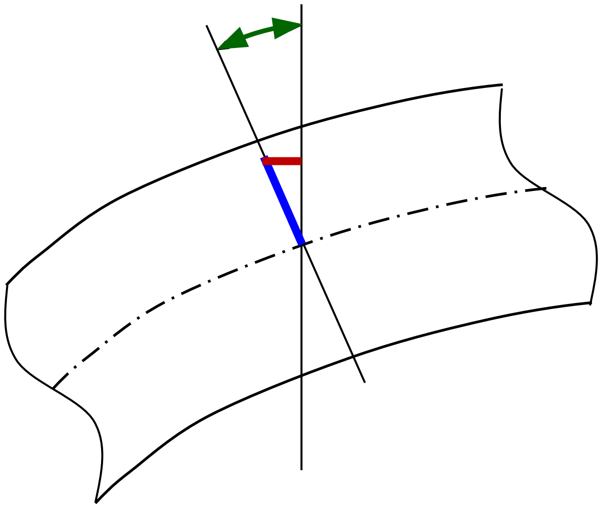
4. Эпюры каких напряжений, возникающих в пластине, изображены на рисунке?



5. На рисунке указать графическую интерпретацию выражения для перемещения пластины

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}$$





КАФЕДРА
КОНСТРУКЦИИ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ
И РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Строительная механика ракет-носителей

Ответы на вопросы по лекции 2.1

1. Какие напряжения и деформации в пластине, согласно гипотезам Кирхгофа, = 0?

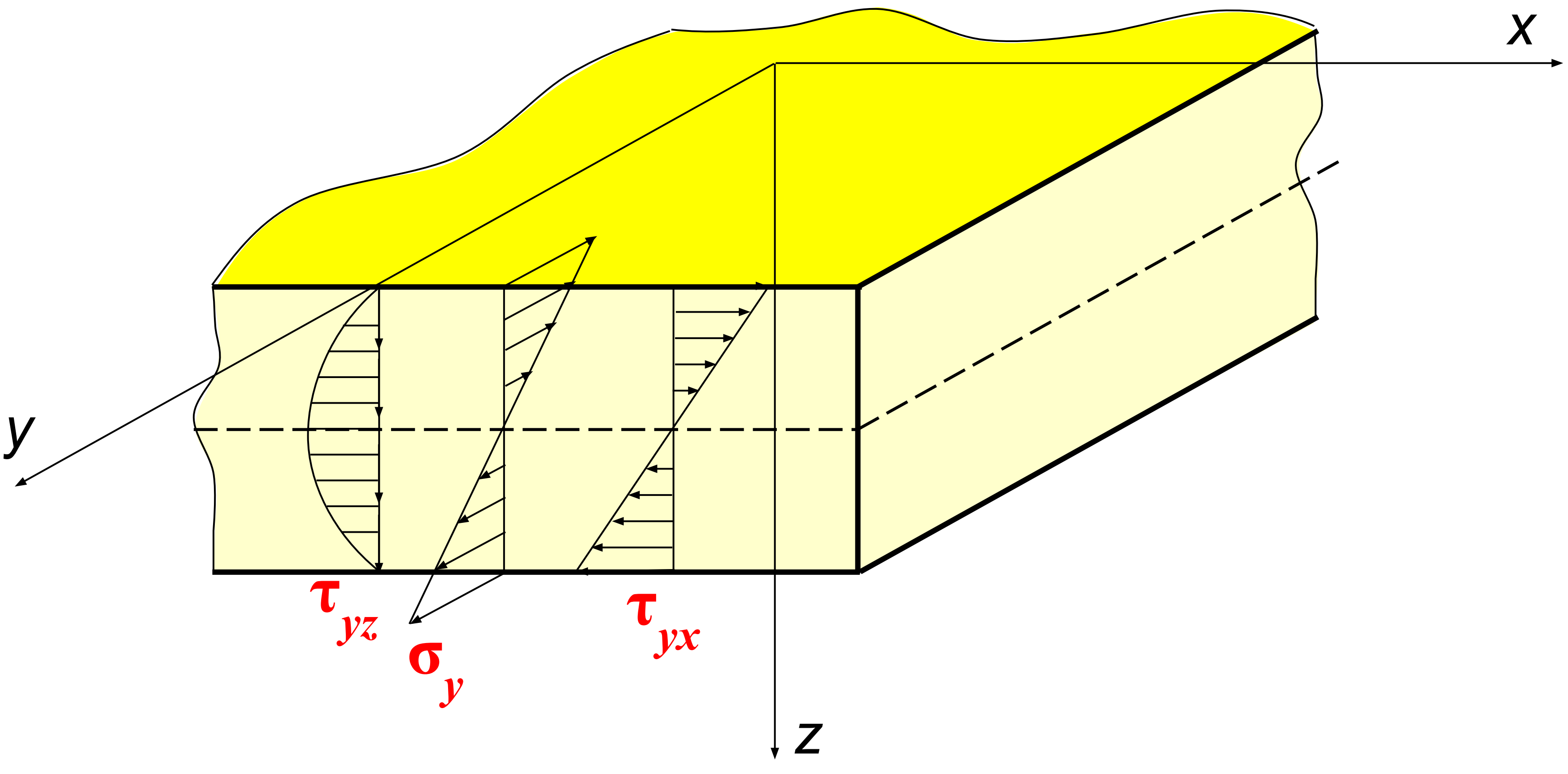
σ_x	σ_y	$\boxed{\sigma_z}$	τ_{xy}	$\boxed{\tau_{yz}}$	$\boxed{\tau_{zx}}$
ε_x	ε_y	$\boxed{\varepsilon_z}$	γ_{xy}	$\boxed{\gamma_{yz}}$	$\boxed{\gamma_{zx}}$

2. Упростить геометрические соотношения для пластины, с учетом гипотез Кирхгофа

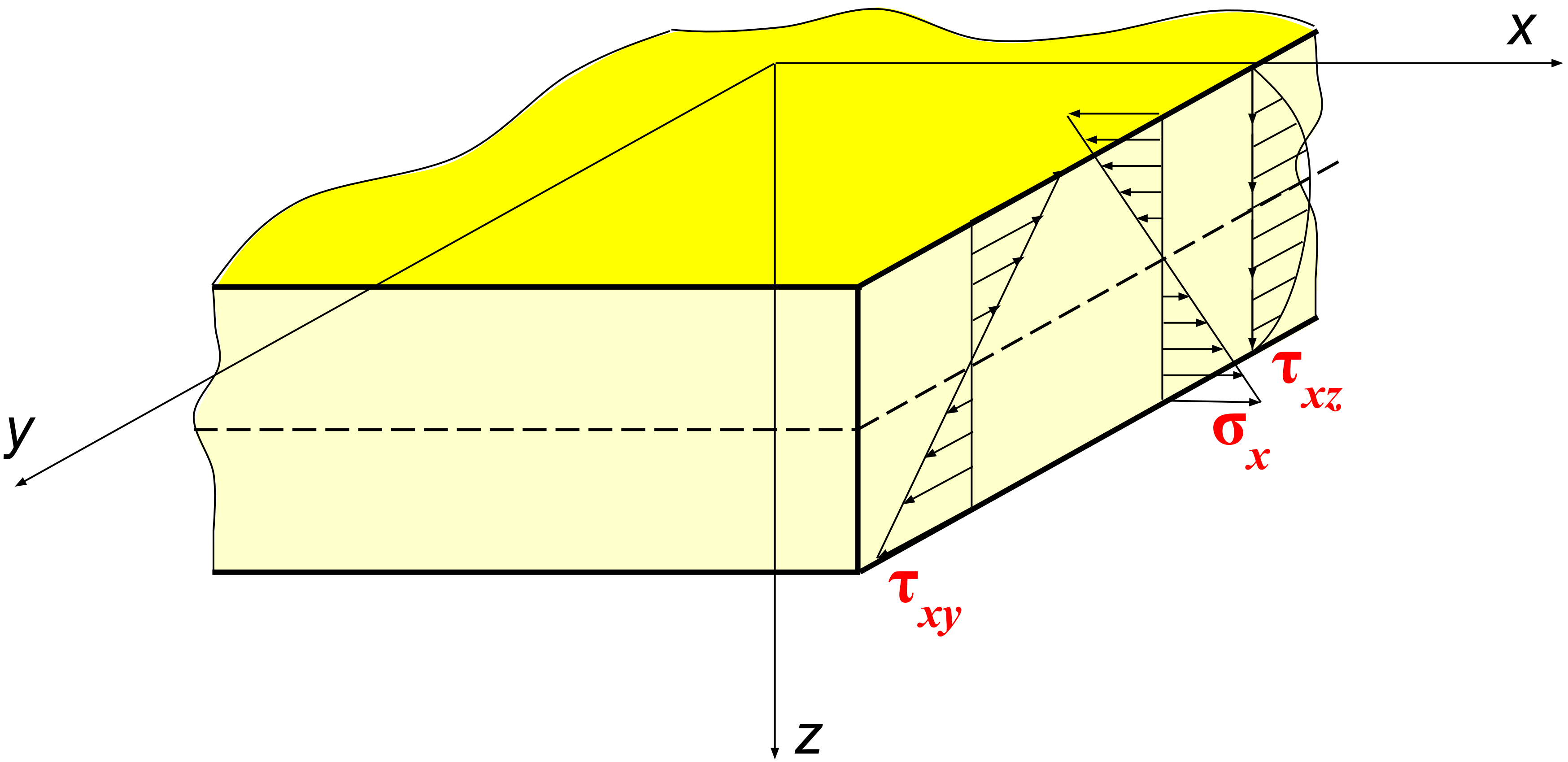
$$\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_x + \mu(\varepsilon_y + \cancel{\varepsilon_z})\right]; \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_y + \mu(\varepsilon_x + \cancel{\varepsilon_z})\right]; \\ \cancel{\sigma_z = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[\varepsilon_z + \mu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)\right]} \end{cases}
\qquad
\begin{cases} \tau_{xy} = G\gamma_{xy}; \\ \cancel{\tau_{yz} = G\gamma_{yz}}; \\ \cancel{\tau_{zx} = G\gamma_{zx}} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y\right); \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x\right); \\ \tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{cases}}$$

3. Эпюры каких напряжений, возникающих в пластине, изображены на рисунке?

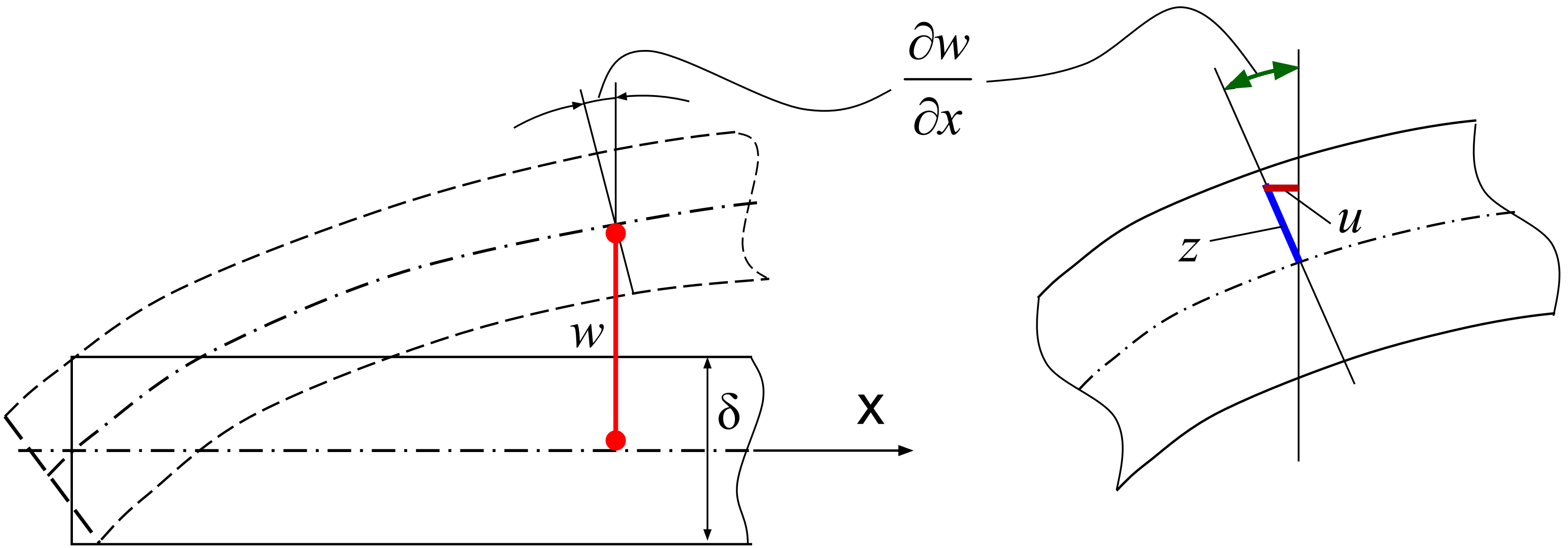


4. Эпюры каких напряжений, возникающих в пластине, изображены на рисунке?



5. На рисунке указать графическую интерпретацию выражения для перемещения пластины

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x}$$



Критерии оценки:

Оценка	Количество ошибок
«отлично» –	0
«хорошо» –	1
«удовлетворительно» –	2
«неудовлетворительно» –	3 и более

КАФЕДРА
КОНСТРУКЦИИ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ
И РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Строительная механика ракет-носителей

Тема 2
Основы теории оболочек

Лекция № 10 /2.2/

Старший преподаватель 13 кафедры
Карчин Александр Юрьевич

Тема 2 Основы теории оболочек

Лекция 2.2

Общие сведения о тонких пластинах /продолжение/

Вопрос 4 Статические соотношения для пластин

Вопрос 5 Изгиб круглых пластин /граничные условия/

Тема 2 Основы теории оболочек

Лекция 2.2

Общие сведения о тонких пластинах /продолжение/

Карчин А.Ю., Болдырев К.Б.
Теоретические основы строительной механики ракет-носителей
СПб.: ВКА имени А.Ф. Можайского, 2015
с. 69-75

Тема 2 Основы теории оболочек

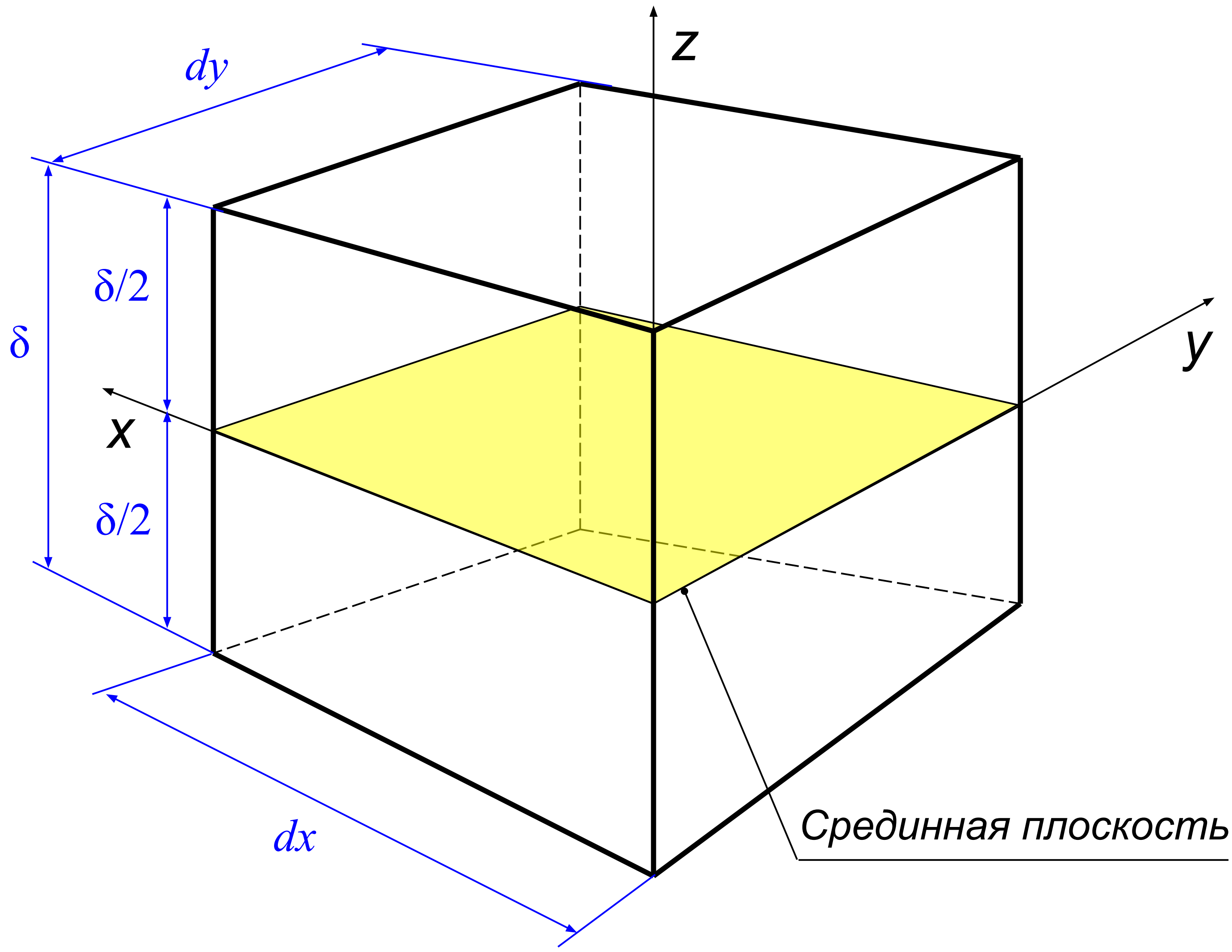
Лекция 2.2

Общие сведения о тонких пластинах /продолжение/

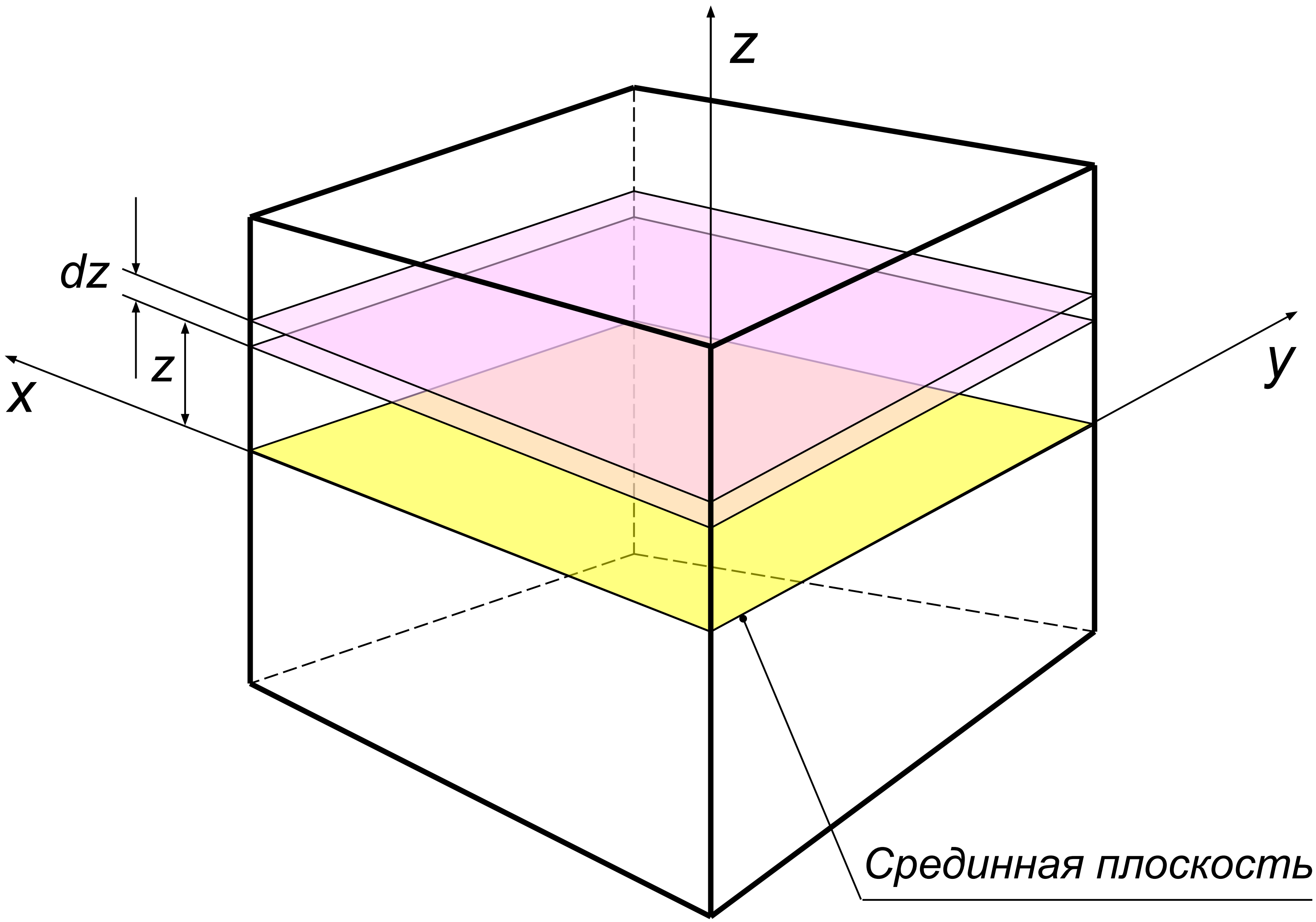
Вопрос 4 Статические соотношения для пластин

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

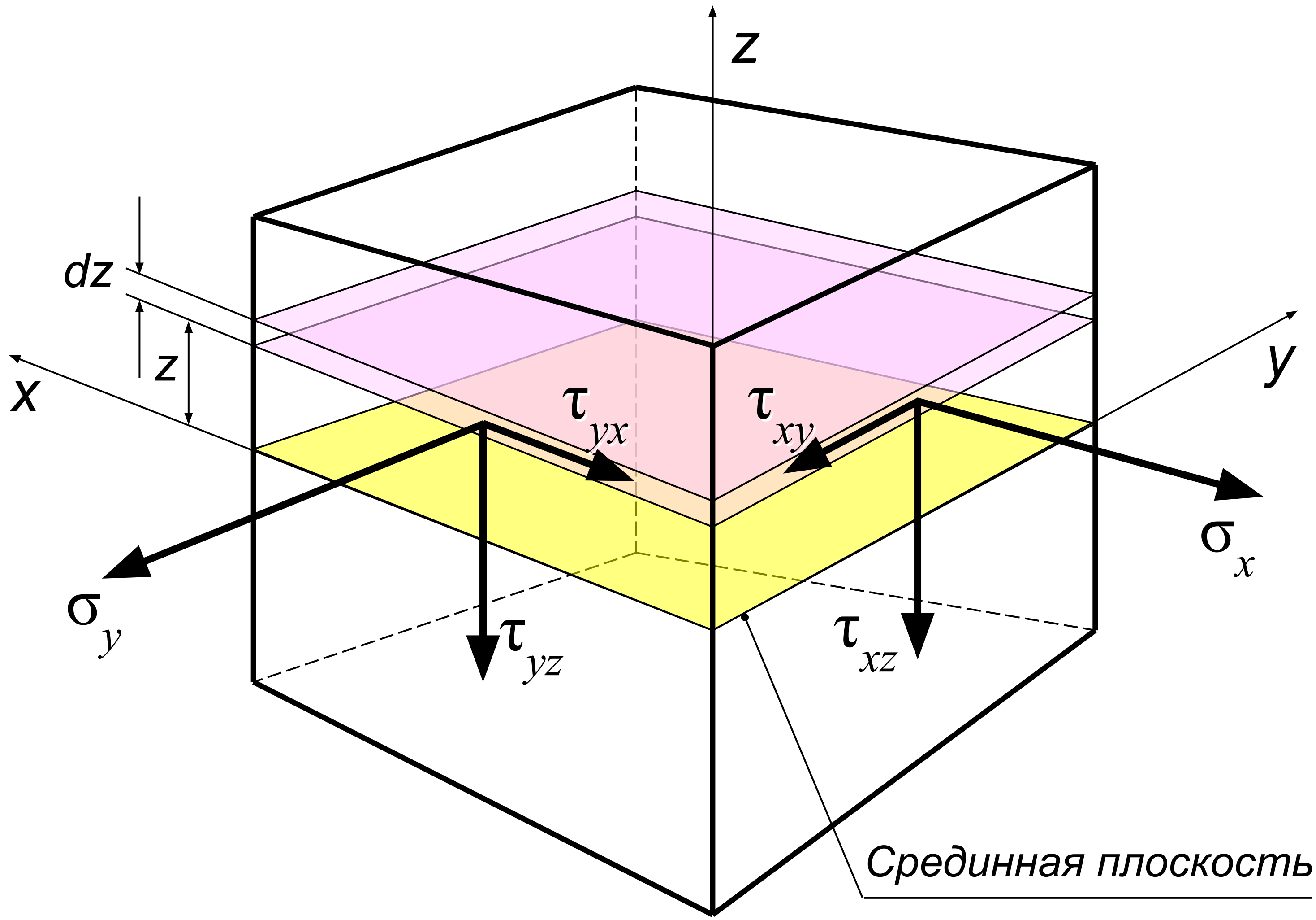
Рассматривается элемент пластины



На расстоянии **z** от серединной плоскости необходимо выделить элементарный участок пластины **dz**

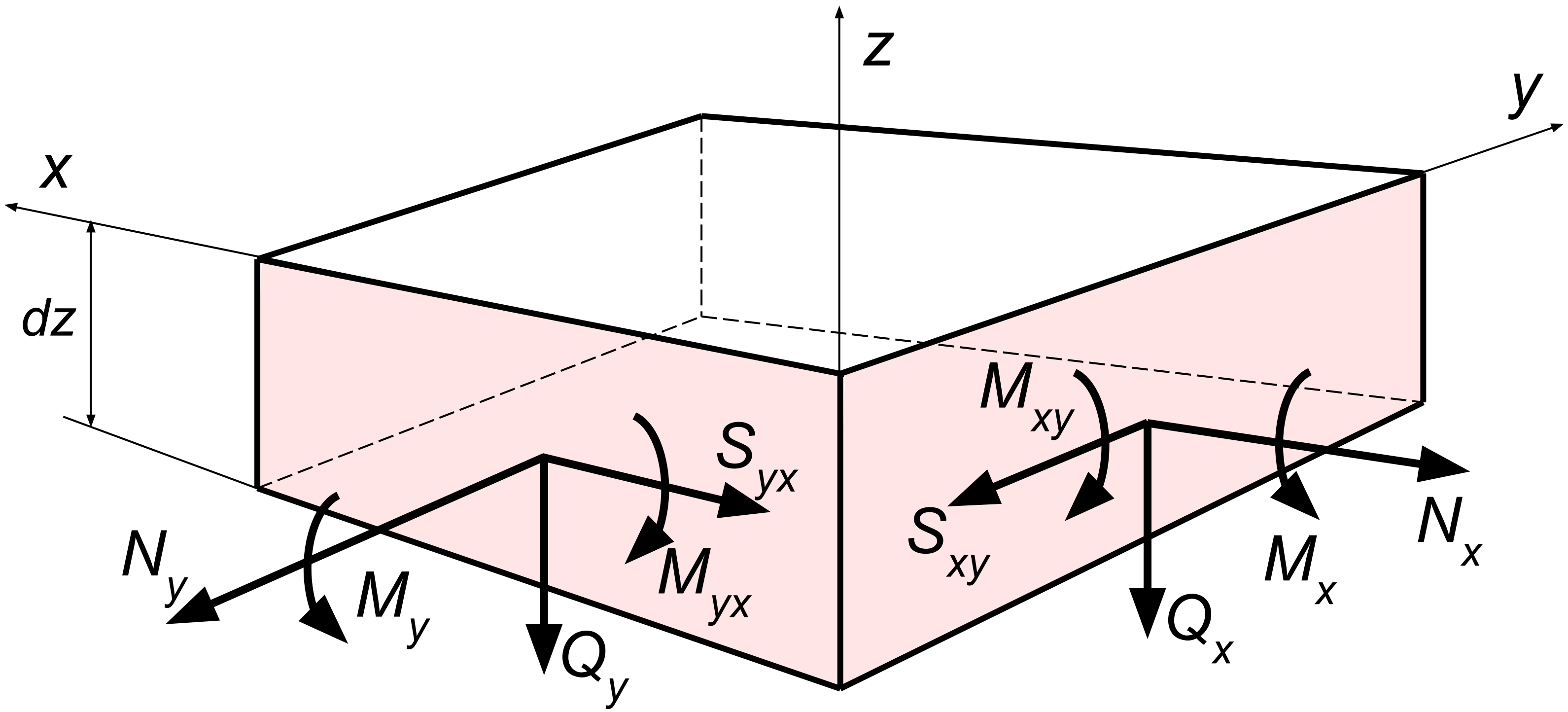


В плоскостях элементарного участка пластины действуют напряжения



Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Эти напряжения являются результатом действия сил и моментов



N_i – погонные осевые силы

Q_i – погонные перерезывающие силы

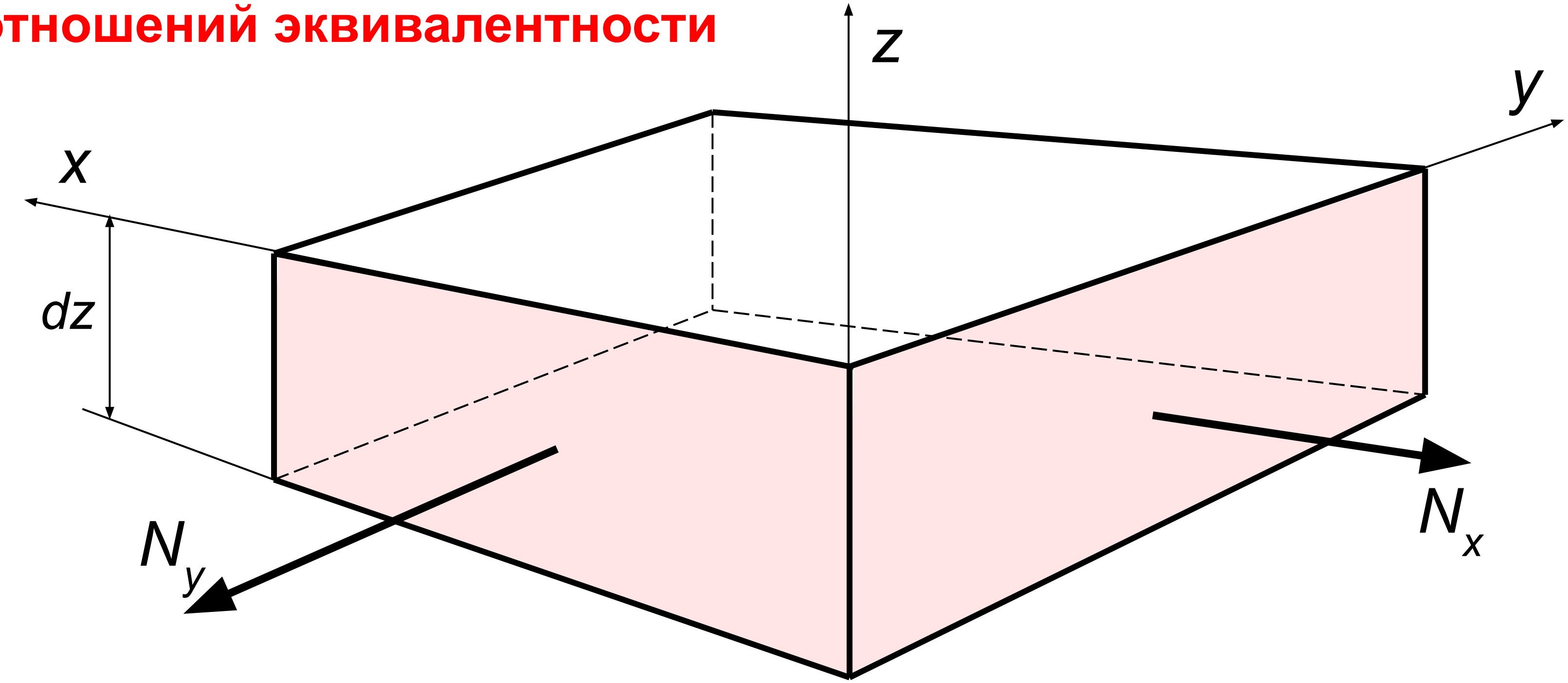
S_{ij} – погонные сдвигающие силы

M_i – погонные изгибающие моменты

M_{ij} – погонные крутящие моменты

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

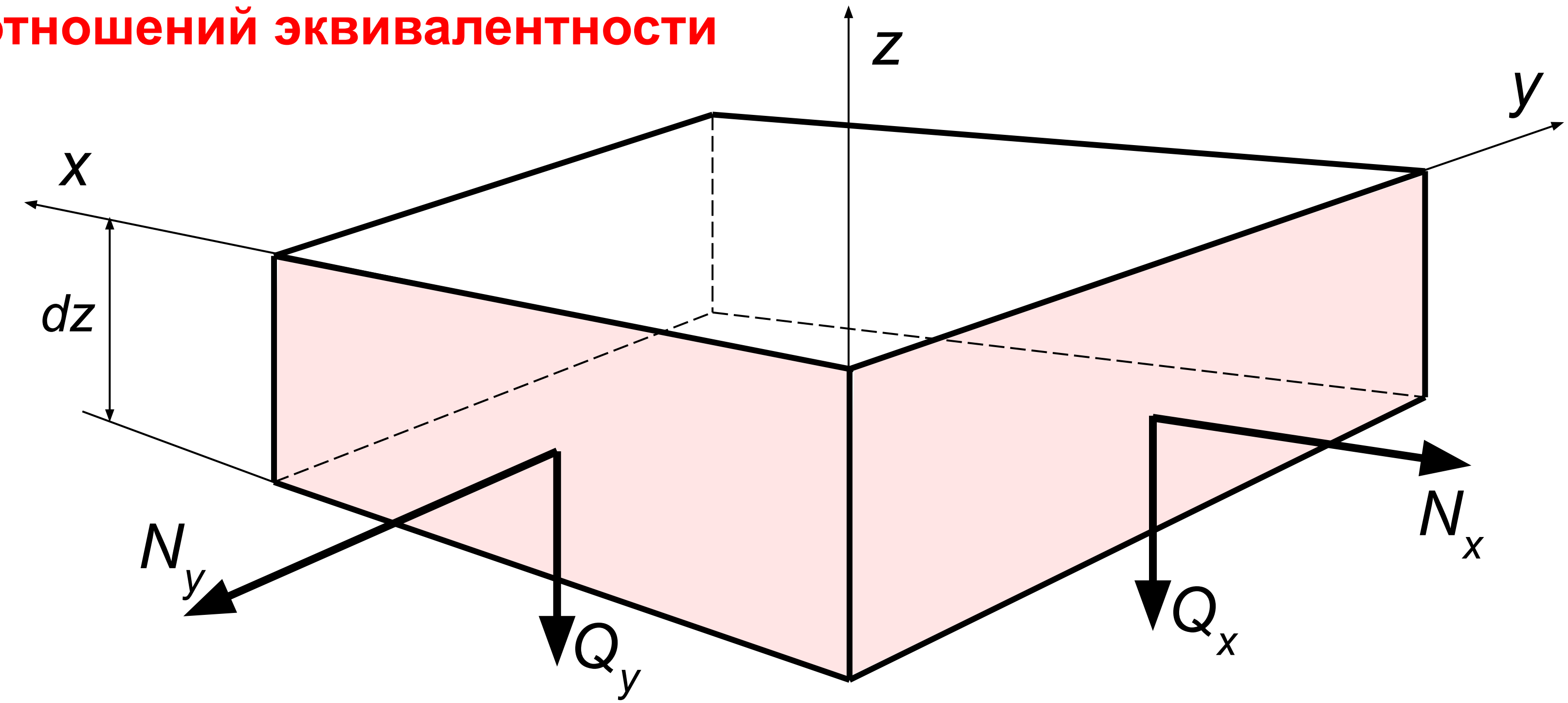
Основные соотношения для пластины носят названия **соотношений эквивалентности**



N_i – погонные осевые силы

$$N_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x dz \qquad N_y = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_y dz$$

Основные соотношения для пластины носят названия **соотношений эквивалентности**

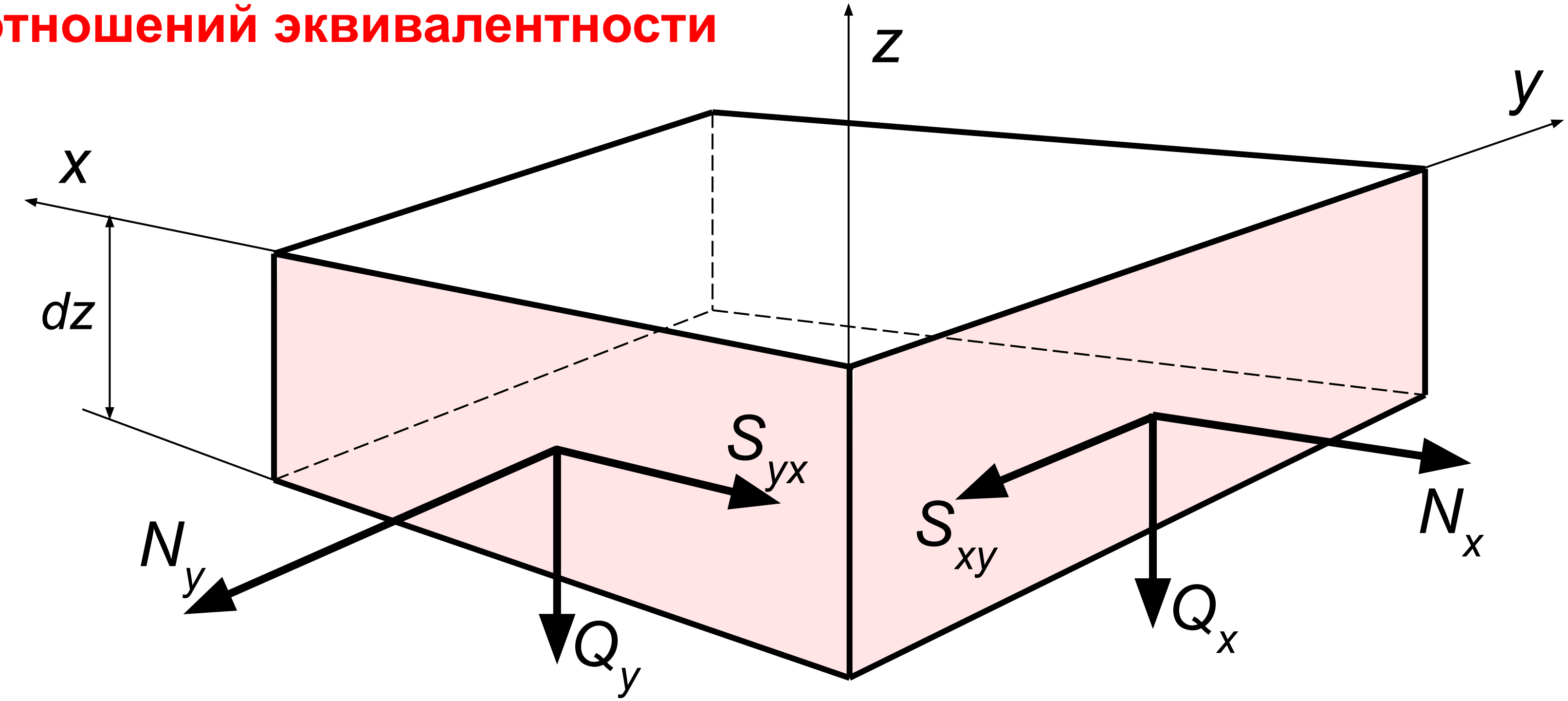


Q_i – погонные перерезывающие силы

$$Q_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{xz} dz \qquad Q_y = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{yz} dz$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Основные соотношения для пластины носят названия **соотношений эквивалентности**

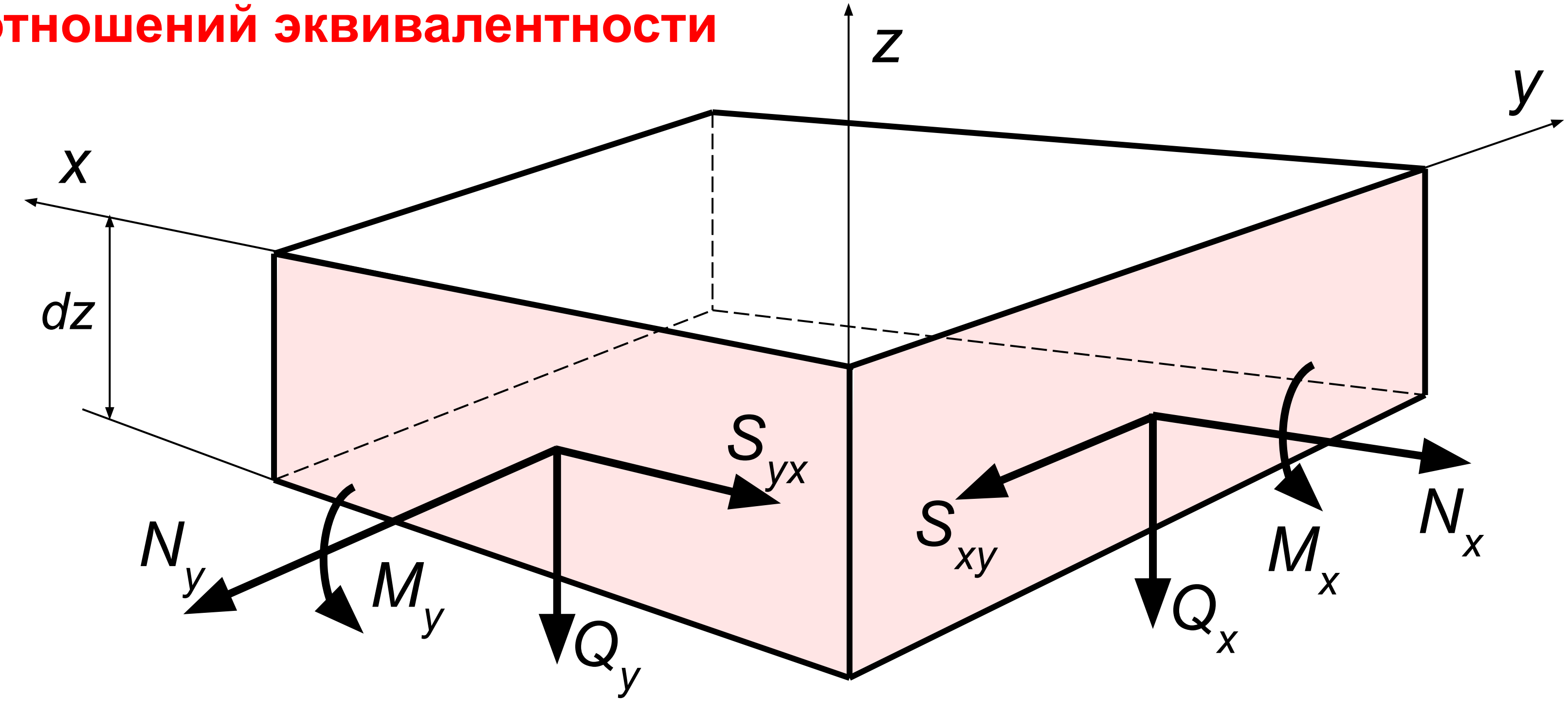


S_{ij} – погонные сдвигающие силы

$$S_{xy} = S_{yx} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{xy} dz$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Основные соотношения для пластины носят названия **соотношений эквивалентности**

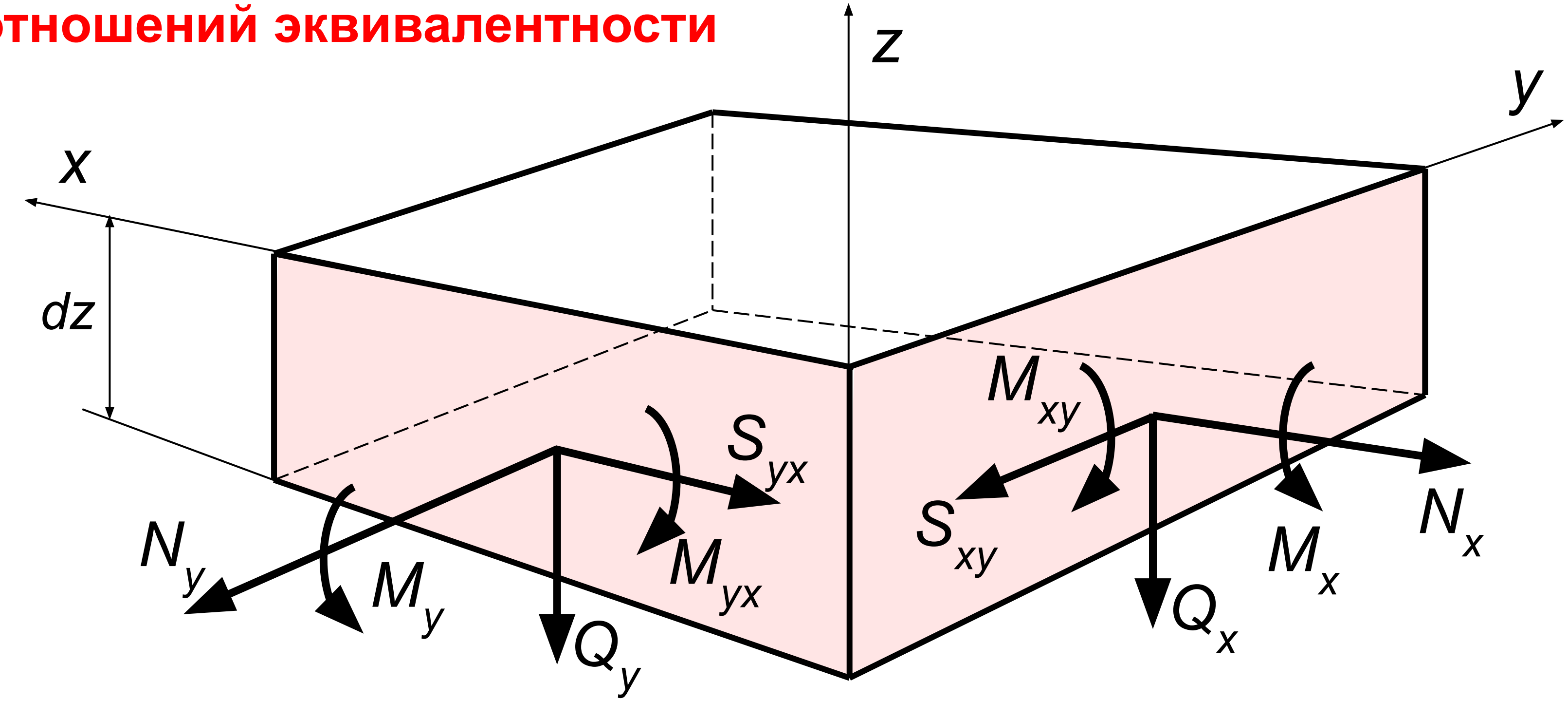


M_i – погонные изгибающие моменты

$$M_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x z dz \qquad M_y = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_y z dz$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Основные соотношения для пластины носят названия **соотношений эквивалентности**



M_{ij} – погонные крутящие моменты

$$M_{xy} = M_{yx} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{xy} z dz$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Для определения осевой силы N_x используют выражения для напряжений

$$N_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x dz$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \boxed{-\dfrac{E}{1-\mu^2} z\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)}; \\ \sigma_y = -\dfrac{E}{1-\mu^2} z\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right); \\ \tau_{xy} = -\dfrac{E}{1+\mu} z \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

$$N_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} -\frac{E}{1-\mu^2} z\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) dz$$

Согласно гипотезам, величина ***w*** не зависит от координаты **z**, →

интеграл нечётной функции с противоположными пределами интегрирования = 0 →

$$N_x = -\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z dz$$

$$N_x = 0$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Изгибающие моменты M_x определяются аналогично

$$M_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \sigma_x z dz$$

$$\begin{cases} \sigma_x = \boxed{-\dfrac{E}{1-\mu^2} z \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)}; \\ \sigma_y = -\dfrac{E}{1-\mu^2} z \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} = -\dfrac{E}{1+\mu} z \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

$$M_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} -\frac{E}{1-\mu^2} z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z dz$$

$$M_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z^2 dz$$

D – цилиндрическая жёсткость (жёсткость пластины на изгиб)

В результате интегрирования

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \qquad D = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}$$

D включает физические и геометрические параметры и характеризует сопротивляемость пластины к изгибу

Сравнение выражений для $M_{изг}$ (для балки) и M_x (для пластины)

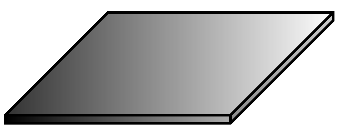
Балка

$$M_{изг} = EI\frac{d^2w}{dx^2}$$

кривизна

жёсткость балки на изгиб

Пластина



$$M_x = D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_x = \frac{E\delta^3}{12\left(1-\mu^2\right)}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

кривизна для двух плоскостей

цилиндрическая жёсткость пластины на изгиб

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Для определения сдвигающей силы S_{xy} используют выражения для напряжений

$$S_{xy} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{yx} dz$$

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{E}{1-\mu^2} z \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y = -\dfrac{E}{1-\mu^2} z \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} = \boxed{-\dfrac{E}{1+\mu} z \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.} \end{cases}$$

$$S_{xy} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} -\frac{E}{1+\mu} z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dz$$

$$S_{xy} = -\frac{E}{1+\mu} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \int_{-\delta/2}^{\delta/2} z dz$$

z – нечётная функция → $S_{xy} = 0$

Для определения крутящих моментов M_{xy} используют выражения для напряжений

$$M_{xy} = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{xy} z\,dz$$

$$\begin{cases} \sigma_x = -\dfrac{E}{1-\mu^2} z \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y = -\dfrac{E}{1-\mu^2} z \left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} = \boxed{-\dfrac{E}{1+\mu} z \dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.} \end{cases}$$

В результате преобразования и интегрирования

$$M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Для определения перерезывающей силы Q_x используют выражения для напряжений

$$Q_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} \tau_{zx} dz \qquad \tau_{xz} = -\boxed{\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{\delta^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w}$$

$$Q_x = \int_{-\delta/2}^{\delta/2} -\frac{E}{2(1-\mu^2)}\left(\frac{\delta^2}{4} - z^2\right)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w dz$$

$$Q_x = -\frac{E}{2(1-\mu^2)}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \int_{-\delta/2}^{\delta/2}\left(\frac{\delta^2}{4} - z^2\right)dz$$

В результате интегрирования: $Q_x = -D\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Внутренние силовые факторы в сечении, нормаль которого параллельна оси ***X***:

Аналогичным образом определяются внутренние силовые факторы в сечении, нормаль которого параллельна оси ***У***:

$$\cancel{N_x = 0}$$

$$Q_x = -D\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w$$

$$\cancel{S_x = 0}$$

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\cancel{N_y = 0}$$

$$Q_y = -D\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w$$

$$\cancel{S_y = 0}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$$

$$M_{yx} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$M_{xy} = M_{yx}$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Таким образом, под действием внешней нагрузки в сечениях пластины, которые перпендикулярны её срединной плоскости, возникают:

Поперечные силы:

$$\begin{cases} Q_x = -D\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \\ Q_y = -D\dfrac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \end{cases}$$

Изгибающие моменты:

$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \end{cases}$$

Крутящие моменты:

$$M_{xy/yx} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Все силовые факторы выражены через цилиндрическую жёсткость D и прогибы w срединной плоскости пластины

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Из физических уравнений для пластины:

$$\sigma_x = -\frac{E}{1-\mu^2} z \boxed{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)}$$

Из статических соотношений для пластины:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$$

или $$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = \boxed{-\frac{M_x}{D}}$$

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2} z \frac{M_x}{D} = \frac{\cancel{E}}{\cancel{1-\mu^2}} z \frac{12\cancel{(1-\mu^2)}M_x}{\cancel{E}\delta^3}$$

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$\sigma_x = 12 M_x \frac{z}{\delta^3}$$

аналогично → $$\sigma_y = 12 M_y \frac{z}{\delta^3}$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

В сечении пластины максимальные по модулю нормальные напряжения возникают на поверхностях

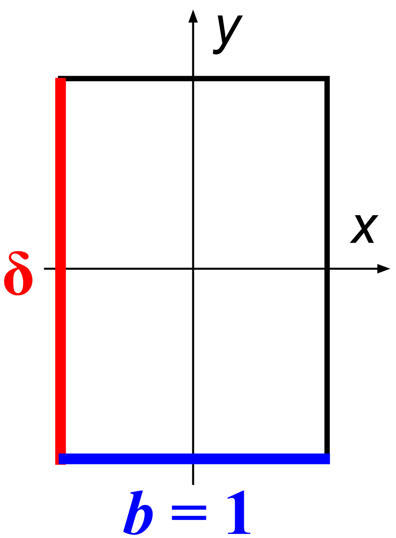
$$z = \pm\frac{\delta}{2}$$

$$\sigma_x^{\max} = 12M_x\frac{z}{\delta^3} = \frac{6M_x}{\delta^2} = \frac{M_x}{W}$$

Момент сопротивления прямоугольного сечения с шириной = 1

$$W = \frac{I}{\delta/2} = \frac{2\delta^3}{12\delta} = \frac{\delta^2}{6}$$

Момент инерции площади прямоугольного сечения (b = 1)



$$I_\delta = \frac{b\delta^3}{12} = \frac{\delta^3}{12}$$

$$\sigma_x^{\max} = \frac{6M_x}{\delta^2}$$

аналогично $\rightarrow$ $\sigma_y^{\max} = \dfrac{6M_y}{\delta^2}$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Из физических уравнений для пластины:

$$\tau_{xy} = -\frac{E}{1-\mu} z \boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}}$$

Из статических соотношений для пластины:

$$M_{xy/yx} = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

или

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \boxed{-\frac{M_{xy/yx}}{D(1-\mu)}}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{1-\mu} z \frac{M_{xy/yx}}{D(1-\mu)} = \frac{12 M_{xy/yx}}{\delta^3} z$$

$$\frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

$$\tau_{xy}^{\max} = \frac{6 M_{xy/yx}}{\delta^2}$$

Сравнение максимальных значений напряжений, при $z = \pm\frac{\delta}{2}$

$$\boxed{\sigma_x^{\max} = \frac{6M_x}{\delta^2}; \qquad \sigma_y^{\max} = \frac{6M_y}{\delta^2};}$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Для определения вертикальных касательных напряжений, необходимо сравнить:

Из физических уравнений для пластины:

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \tau_{xz} = -\dfrac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\dfrac{\delta^2}{4} - z^2\right)\boxed{\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w} \\ \tau_{zy} = \tau_{yz} = -\dfrac{E}{2\left(1-\mu^2\right)}\left(\dfrac{\delta^2}{4} - z^2\right)\boxed{\dfrac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w} \end{cases}$$

Из статических соотношений для пластины:

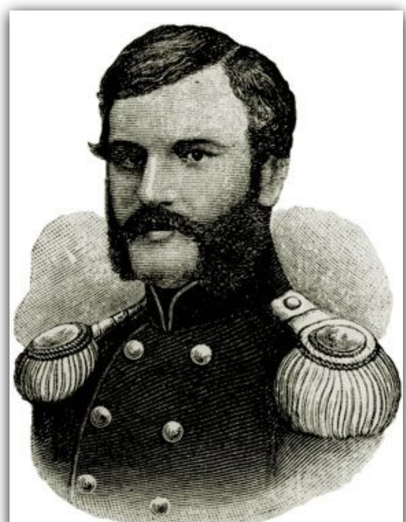
$$\begin{cases} Q_x = -D\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \\ Q_y = -D\dfrac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w = \boxed{-\dfrac{Q_x}{D}} \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w = \boxed{-\dfrac{Q_y}{D}} \end{cases}$$

$$\tau_{zx} = \frac{6Q_x}{\delta\left(4 - z^2\right)} \qquad \tau_{zx}^{\max} = \frac{3Q_x}{2\delta}$$

$$\tau_{zy} = \frac{6Q_y}{\delta\left(4 - z^2\right)} \qquad \tau_{zy}^{\max} = \frac{3Q_y}{2\delta}$$

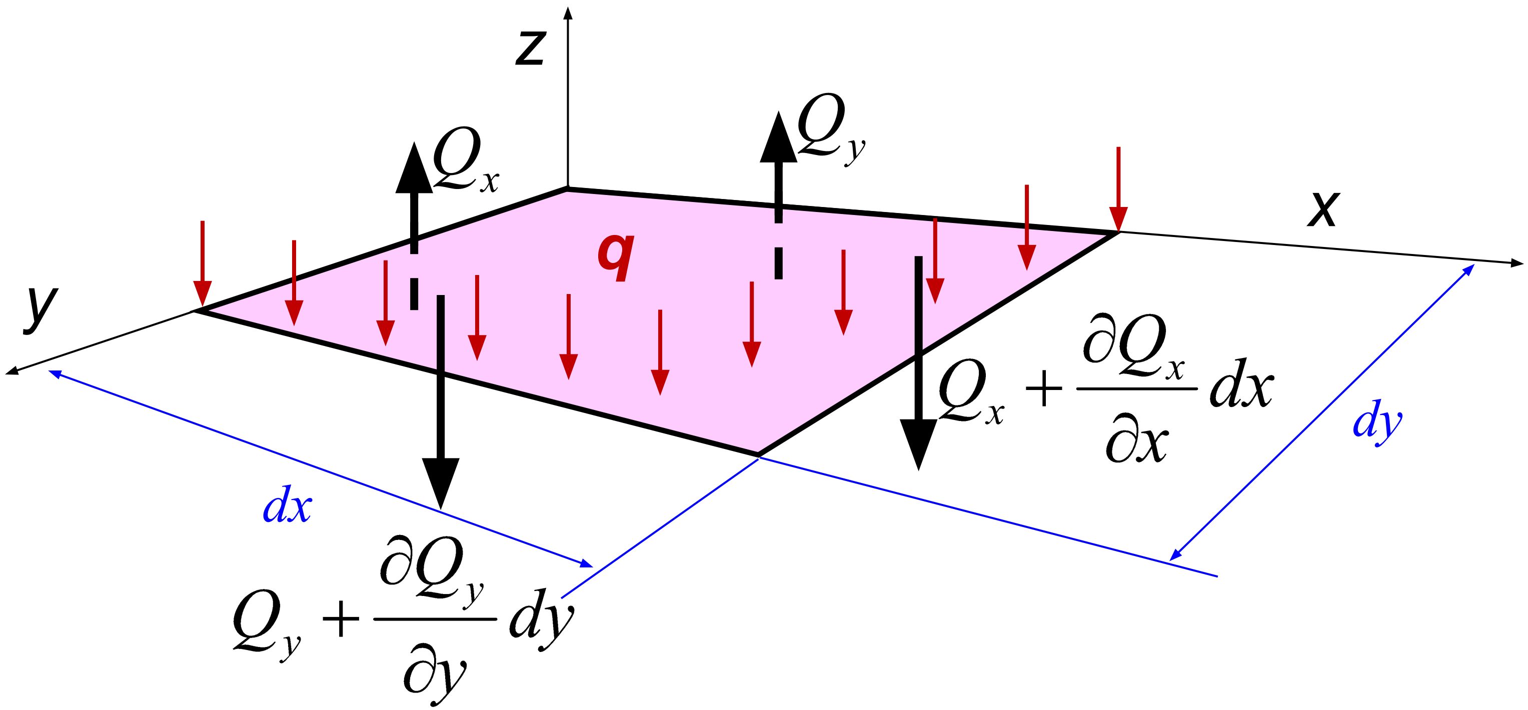
Формулы Журавского



Журавский Дмитрий Иванович (1821-1891) – русский учёный-механик и инженер, специалист в области мостостроения и строительной механики

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

Для получения уравнения изгиба пластины нужно воспользоваться условием равновесия выделенного элемента срединной плоскости:



Уравнение равновесия всех сил на ось Z:

$$Q_x dy - \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy + Q_y dx - \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - q\,dx\,dy = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = q$$

Уравнение равновесия всех сил на ось Z:

Уравнение моментов относительно оси У:

$$\boxed{\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}}=Q_x$$

Уравнение моментов относительно оси Х:

$$\boxed{\frac{\partial M_y}{\partial y}+\frac{\partial M_{yx}}{\partial x}}=Q_y$$

$$\boxed{D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+\mu\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)=D\nabla^4 w=q}$$

уравнение Софи Жармен

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}=q$$

Софи Жермен (1776-1831) – французский математик, философ и механик

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

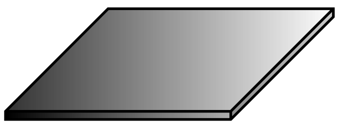
Сравнение соотношений для балки и пластины

МОМЕНТЫ

Балка

$$M_{изг} = EI\frac{d^2w}{dx^2}$$

Пластина



$$\begin{cases} M_x = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \\ M_y = -D\left(\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{xy} = -D(1-\mu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ M_{yx} = -D(1-\mu)\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

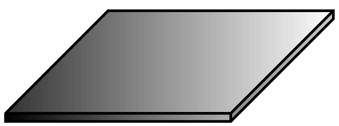
Сравнение соотношений для балки и пластины

ПЕРЕРЕЗЫВАЮЩИЕ СИЛЫ

Балка

$$Q = \frac{dM_{изг}}{dx} = EI\frac{d^3 w}{dx^3}$$

Пластина



$$\begin{cases} Q_x = \dfrac{\partial M_x}{\partial x} + \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} = -D\dfrac{\partial}{\partial x}\nabla^2 w \\ Q_y = \dfrac{\partial M_y}{\partial y} + \dfrac{\partial M_{yx}}{\partial x} = -D\dfrac{\partial}{\partial y}\nabla^2 w \end{cases}$$

Вопрос 4. Статические соотношения для пластин

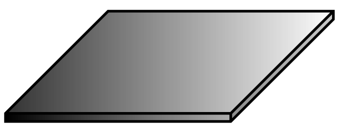
Сравнение соотношений для балки и пластины

РАСПРЕДЕЛЁННАЯ НАГРУЗКА

Балка

$$q = \frac{dQ}{dx} = EI\,\frac{d^4 w}{dx^4}$$

Пластина



$$q = \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} \right)$$

$$q = D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \mu\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = D\nabla^4 w$$

Тема 2 Основы теории оболочек

Лекция 2.1

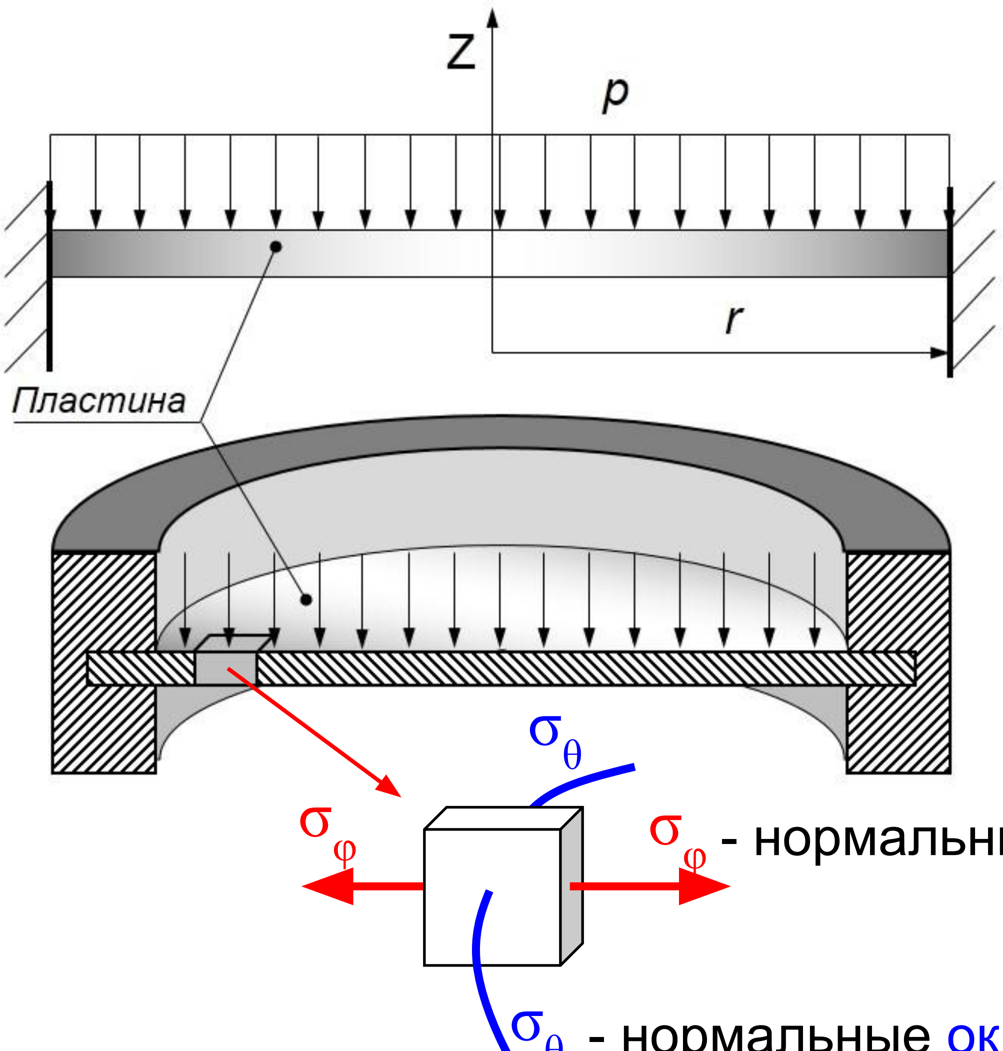
Общие сведения о тонких пластинах /продолжение/

Вопрос 4 Статические соотношения для пластин

Вопрос 5 Изгиб круглых пластин /граничные условия/

В качестве примера сплошной круглой пластины
с **жесткой заделкой краев**, нагруженной равномерным давлением:

- мембрана трубопровода
- днище смесительной головки камеры ракетного двигателя



Максимальный прогиб пластины (из геометрических соотношений)

$$w_{\max} = \frac{pr^4}{64D}$$

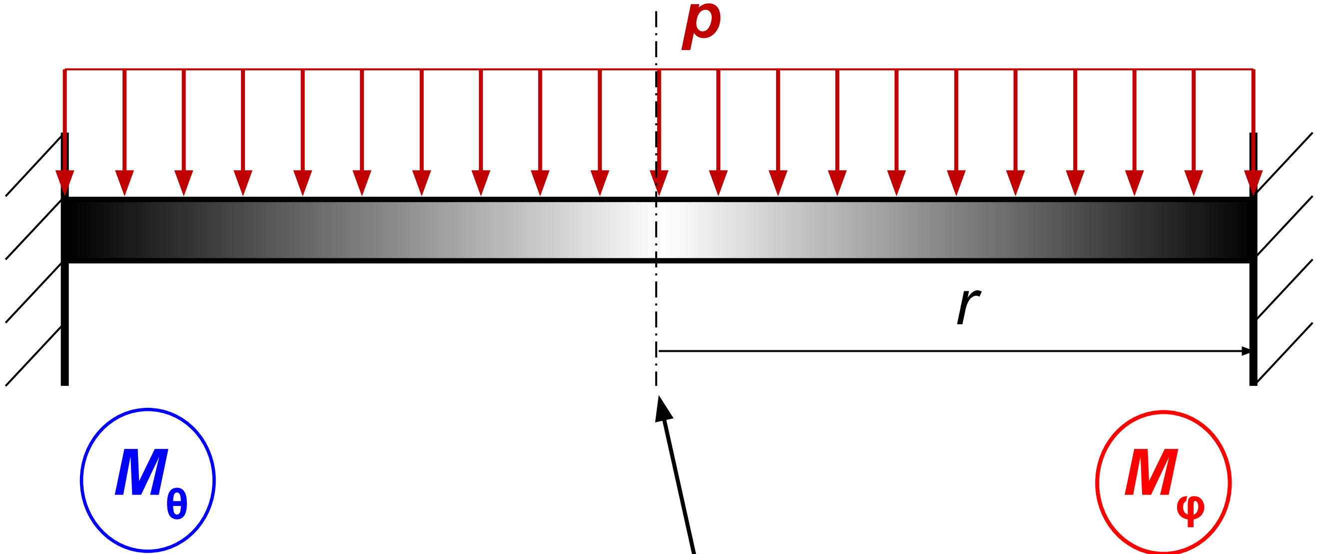
$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\mu^2)}$$

σ_φ - нормальные меридиональные напряжения

σ_θ - нормальные окружные напряжения

Вопрос 5. Изгиб круглых пластин

С учетом максимального прогиба (из физических соотношений) получают выражения для изгибающих моментов



В заделке:

$$M_\theta = \frac{pr^2}{8}\mu$$

$$M_\varphi = \frac{pr^2}{8}$$

В центре пластины:

$$M_\varphi = M_\theta = \frac{pr^2}{16}(1+\mu)$$

$$\frac{pr^2}{8}\mu \qquad \frac{pr^2}{16}(1+\mu)$$

$$\frac{pr^2}{8}$$

максимальный изгибающий момент

$$\boxed{M_\varphi^{\max} = \frac{pr^2}{8}}$$

Вопрос 5. Изгиб круглых пластин

Из соотнесений эквивалентности для пластины получают значения нормальных напряжений

- для окружных напряжений:

$$\sigma_{\theta}^{\max} = \frac{6M_{\theta}}{\delta^2} = \frac{3pr^2}{4\delta^2}\mu$$

- для меридиональных напряжений:

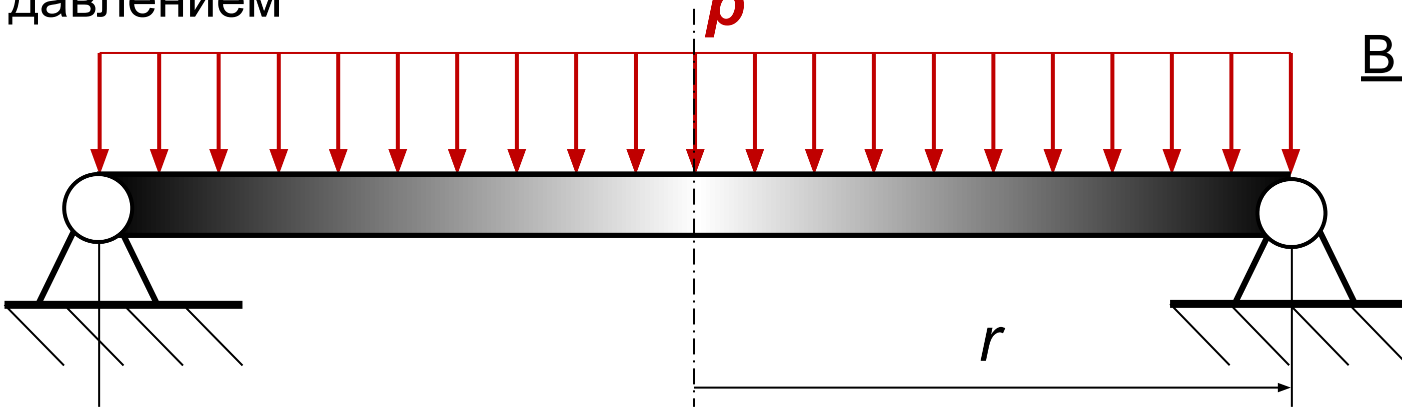
$$\boxed{\sigma_{\varphi}^{\max} = \frac{6M_{\varphi}}{\delta^2} = \frac{3pr^2}{4\delta^2}} \; *$$

Максимальные напряжения в этом виде закрепления пластины будут возникать в жесткой заделке

Выражение * используется для определения минимального значения толщины $\delta_{\min}$ пластины

$$\boxed{\delta_{\min} = \sqrt{\frac{3pr^2}{4\sigma_{\varphi}^{\max}}}}$$

Второй вариант закрепления сплошной круглой пластины – **шарнирно опертая по контуру** и нагруженная равномерным давлением



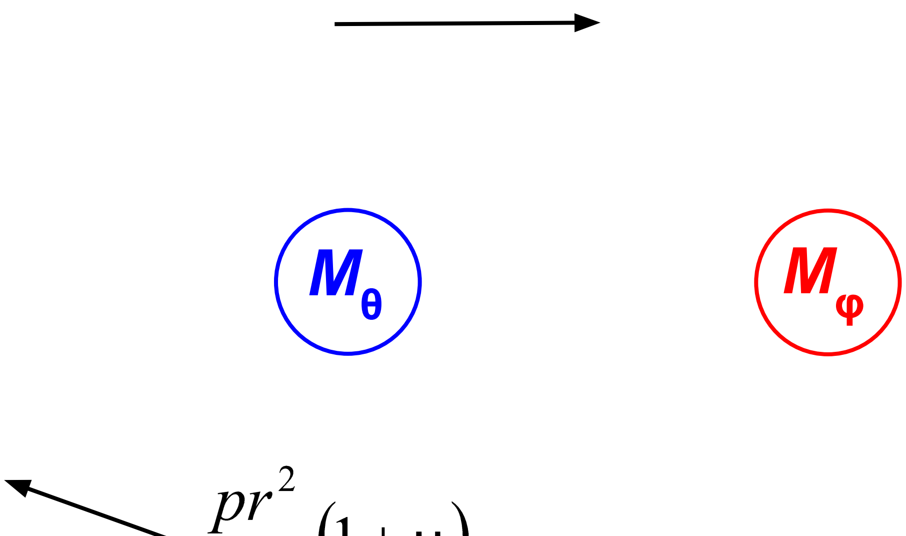
В местах опор:

$$M_\theta = \frac{pr^2}{8}(1-\mu)$$

$$M_\varphi = 0$$

В центре пластины:

$$M_\varphi = M_\theta = \frac{pr^2}{16}(3+\mu)$$

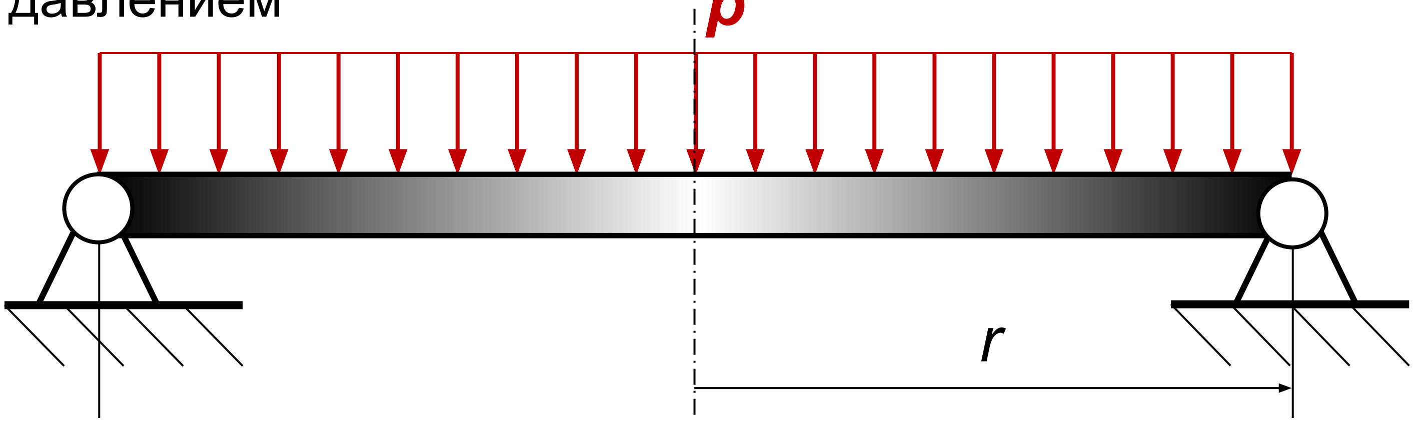


$$\frac{pr^2}{8}(1+\mu)$$

максимальный изгибающий момент

$$\boxed{M^{\max}_{\theta(\varphi)} = \frac{pr^2}{16}(3+\mu)}$$

Второй вариант закрепления сплошной круглой пластины – **шарнирно опертая по контуру** и нагруженная равномерным давлением



Максимальный прогиб пластины (из геометрических соотношений)

$$w_{\max} = \left(\frac{5+\mu}{1+\mu}\right)\frac{pr^4}{64D}$$

Сравнивая значения максимальных моментов для первого и второго вариантов закрепления пластины

$$\frac{M_{\max.2}}{M_{\max.1}} = \frac{pr^2(3+\mu)}{16} \cdot \frac{8}{pr^2} = \frac{(3+\mu)}{2} \approx 1{,}65$$

$$\mu = 0{,}3$$

Величина максимального момента для шарнирно опертой пластины (вариант 2) более чем в 1,5 раза больше, чем для пластины с жестко заделанными краями (вариант 1)

В прикладных задачах приходиться сравнивать прогибы различных пластин

$$\frac{w_{\max.2}}{w_{\max.1}} = \left(\frac{5+\mu}{1+\mu}\right)\frac{pr^4}{64D} \cdot \frac{64D}{pr^4} = \frac{5+\mu}{1+\mu} \approx 4$$

Максимальный прогиб шарнирно опертой пластины (вариант 2), будет в четыре раза больше прогиба пластины в жесткой заделке (вариант 1)

Тема 2 Основы теории оболочек

Лекция 2.2

Общие сведения о тонких пластинах /продолжение/

Вопрос 4 Статические соотношения для пластин

Вопрос 5 Изгиб круглых пластин /граничные условия/

Тема 2 Основы теории оболочек

Лекция 2.2

Общие сведения о тонких пластинах /продолжение/

Вопросы для самоконтроля:

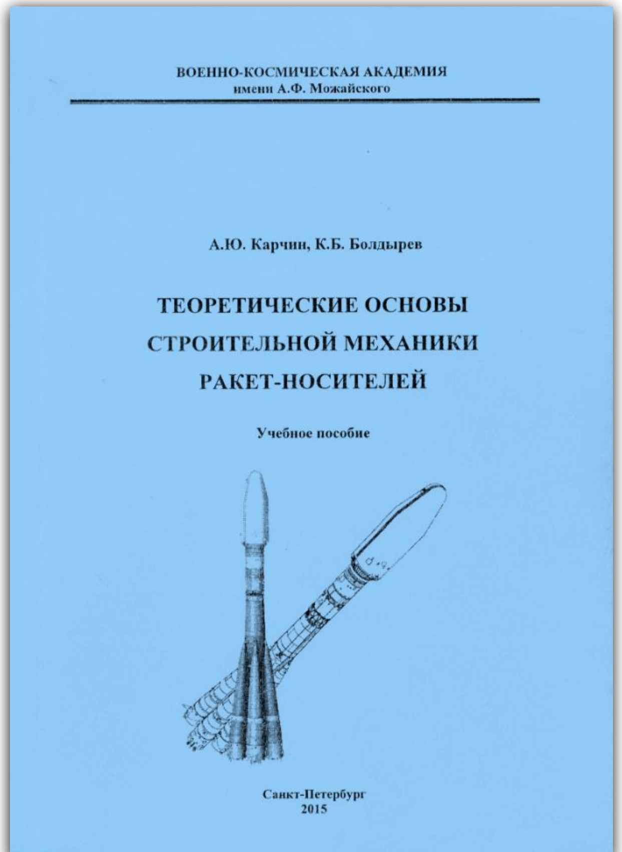
1. Как называют статические соотношения для пластин?
2. Какие силовые факторы действуют в пластине?
3. Что характеризует цилиндрическая жёсткость D?
4. Какие существуют способы крепления пластин?
5. При каком закреплении пластины на нее действует максимальный момент?
6. При каком закреплении пластины в ней возникает максимальный прогиб?

Тема 2 Основы теории оболочек

Лекция 2.2

Общие сведения о тонких пластинах /продолжение/

Карчин А.Ю., Болдырев К.Б.
Теоретические основы строительной механики ракет-носителей
СПб.: ВКА имени А.Ф. Можайского, 2015
с. 69-75



КАФЕДРА
КОНСТРУКЦИИ РАКЕТ-НОСИТЕЛЕЙ
И РАКЕТНЫХ ДВИГАТЕЛЕЙ

Строительная механика ракет-носителей

Тема 2
Основы теории оболочек

Лекция № 10 /2.2/

Старший преподаватель 13 кафедры
Карчин Александр Юрьевич