

# ***Признаки равенства треугольников***

1. Треугольник и его элементы
2. Задачи по теме «Первый признак равенства треугольников»
3. Задачи по теме «Второй признак равенства треугольников»
4. Задачи по теме «Третий признак равенства треугольников»
5. Справочный материал (формулировка теоремы и ее доказательство):
  - а) Первый признак равенства треугольников
  - б) Второй признак равенства треугольников
  - в) Третий признак равенства треугольников



# Треугольник



Рис. 1

Назовите:

1) сторону, лежащую против угла  $N$   
:

2) сторону, лежащую против угла  
 $NDL$ :

3) угол, лежащий против стороны  $DL$   
 $DN$ :

4) угол, лежащий против стороны



# Первый признак равенства треугольников

Задача. Заполните пропуски.

Докажите, что  $\triangle OLF = \triangle OMN$

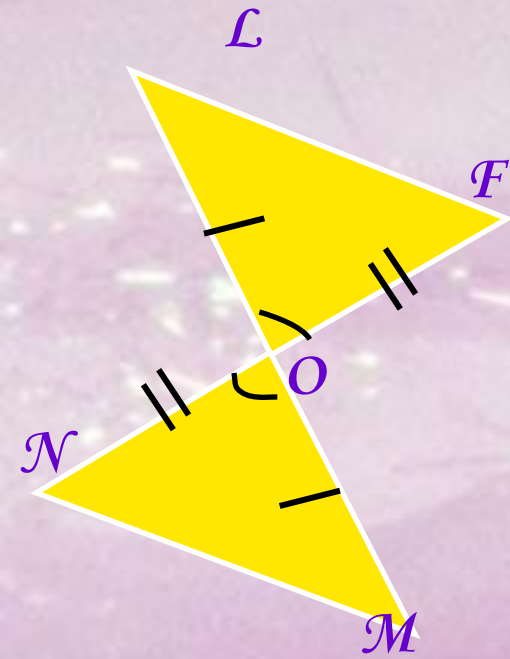


Рис. 2

Решение:

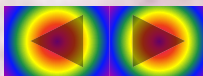
1) Рассмотрим  $\triangle OLF$  и  $\triangle OMN$  :

а)  $OL = OM$  - по условию,

б)  $OF = ON$  - по условию,

в)  $\angle LOF = \angle MON$  - как вертикальные углы.

Следовательно  $\triangle OLF = \triangle OMN$  - по двум сторонам и углу между ними.







# Задача. Заполните пропуски.

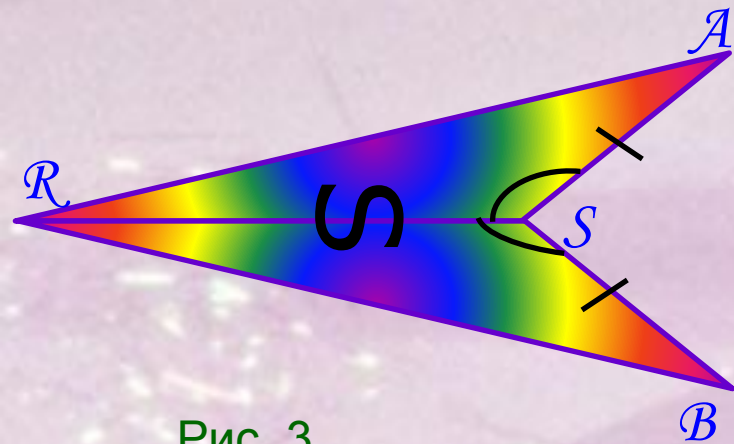


Рис. 3

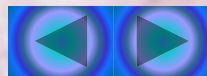
Докажите, что  $\triangle ARS = \triangle BRS$

Решение:

1) Рассмотрим  $\triangle ARS$  и  $\triangle$

- а) Сторона  $AR = BR$  - по условию.  
 б) Сторона  $AS = BS$  - общая сторона.  
 в)  $\angle ARS = \angle BRS$  - по условию.  
 г) Следовательно,  $\triangle ARS = \triangle BRS$  - по двум  
 и углу.

2) Т. к.  $\triangle ARS = \triangle BRS$ , то соответственные стороны и углы равны,  
 $BR = AR = 18$  см,  $\angle BRS = \angle ARS = 15^\circ$



## Второй признак равенства треугольников

### Задача.

Докажите, что  $\triangle AXO = \triangle BZO$

Решение:

1) Рассмотрим  $\triangle BZO$  и  $\triangle$

У них: а) Сторона  $AO = BO$  - по условию;

б)  $\angle AOX = \angle BOZ$  - по условию;

в)  $\angle XAO = \angle ZBO$  - как вертикальные.

Следовательно  $\triangle AXO = \triangle BZO$  - по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Рис. 4



# Задача.

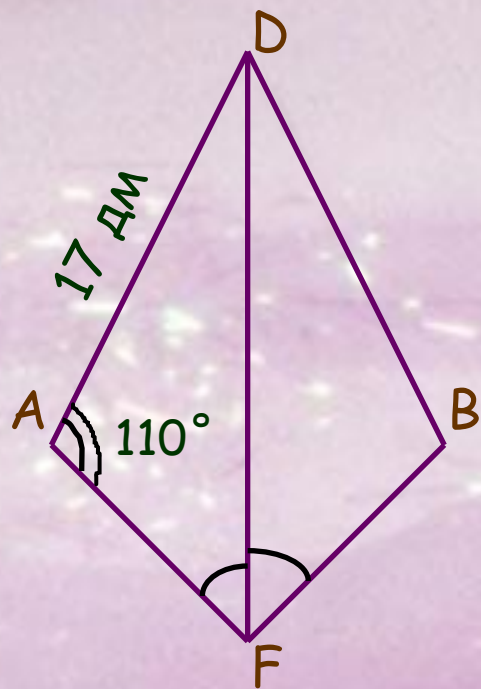


Рис. 5

На рисунке 5 луч DF биссектриса угла ADB

а) Докажите, что  $\triangle ADF = \triangle BDF$ ;

б) Найдите сторону BD и  $\angle DBF$ .

Решение:

а) Рассмотрим  $\triangle ADF$  и  $\triangle BDF$ .

У них: 1)  $DF = DF$  - общая сторона;

2)  $\angle ADF = \angle BDF$  - по условию;

3)  $\angle AFD = \angle BFD$ , так как DF –

биссектриса  $\angle ADB$ .

Следовательно,  $\triangle ADF = \triangle BDF$  по  $\text{по}$  и  $\text{прилежащим к ней}$ .

б) Из равенства треугольников следует равенство соответствующих сторон и углов, то есть сторона  $BD = AD = 17$  дм,  $\angle B = \angle A = 110^\circ$ .





# Третий признак равенства треугольников

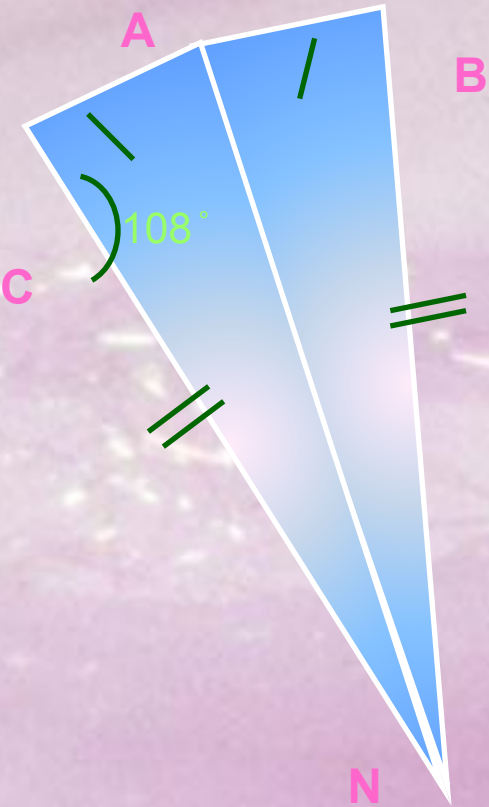


Рис. 6

а) Докажите, что  $\triangle CAN = \triangle BAN$

б) Найдите  $\angle ABN$ .

Решение:

а) Рассмотрим  $\triangle CAN$  и  $\triangle BAN$ .

У них: 1)  $AC =$  - по условию;

2)  $CN =$  - по условию;

3)  $AN = AN$  – общая сторона.

Значит,  $\triangle CAN =$  - по трем .

б) Из равенства треугольников  $CAN$  и  $BAN$  следует равенство соответствующих углов, то есть  $\angle ABN =$  = .

$\angle$   $\angle$



# Теорема

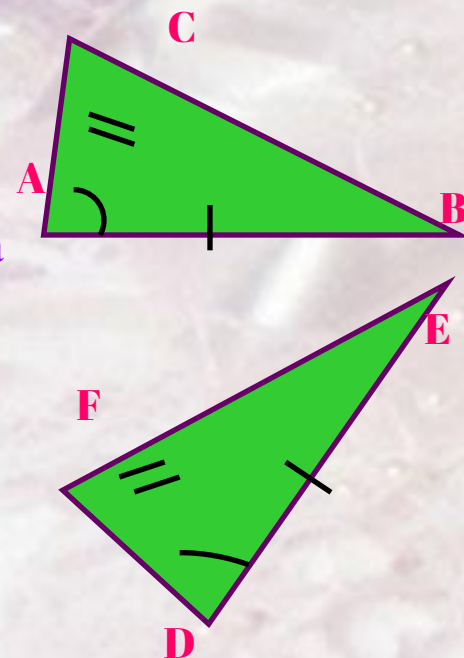


Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

## Доказательство

Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $DEF$ , у которых  $AB=DE$ ,  $AC=DF$ , углы  $A$  и  $D$  равны (рис. 7). Докажем, что  $ABC = DEF$   $\triangle$   $\triangle$

Так как  $\angle A = \angle D$ , то треугольник  $ABC$  можно наложить на треугольник  $DEF$  так, что вершина  $A$  совместится с вершиной  $D$ , а стороны  $AB$  и  $AC$  наложатся соответственно на лучи  $DE$  и  $DF$ . Поскольку  $AB=DE$ ,  $AC=DF$ , то сторона  $AB$  совместится со стороной  $DE$ , а сторона  $AC$  – со стороной  $DF$ ; в частности, совместятся точки  $B$  и  $E$ ,  $C$  и  $F$ . Следовательно, совместятся стороны  $BC$  и  $EF$ . Итак, треугольники  $ABC$  и  $DEF$  полностью совместятся, значит, они равны.



Теорема доказана.

Рис. 7





# Теорема

*Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.*

## Доказательство

Рассмотрим треугольники **ABC** и **DEF**, у которых **AB = DE**, **A = D**, **∠B = ∠E** (рис. 8). Докажем, что **ABC = DEF**. ▲ ▲

Наложим треугольник **ABC** на треугольник **DEF** так, чтобы вершина **A** совместилась с вершиной **D**, сторона **AB** – с равной ей стороной **DE**, а вершины **C** и **F** оказались по одну сторону от прямой **DE**.

Так как **A = D** и **B = E**, то сторона **AC** наложится на луч **DF**, а сторона **BC** – на луч **EF**. Поэтому вершина **C** – общая точка сторон **AC** и **BC** – окажется лежащей как на луче **DF**, так и на луче **EF** и, следовательно, совместится с общей точкой этих лучей – вершиной **F**. Значит, совместятся стороны **AC** и **DF**, **BC** и **EF**.

Итак, треугольники **ABC** и **DEF** полностью совместятся, поэтому они равны.

Теорема доказана.

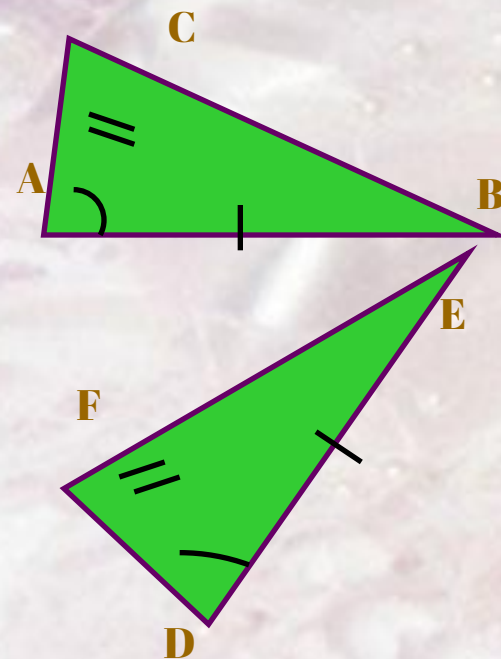


Рис. 8



# Теорема

Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.

## Доказательство

Рассмотрим треугольники  $ABC$  и  $DEF$ , у которых  $AB = DE$ ,  $BC = EF$ ,  $CA = FD$  (рис. 9). Докажем, что  $\triangle ABC = \triangle DEF$ . Приложим треугольник  $ABC$  к треугольнику  $DEF$  так, чтобы вершина  $A$  совместилась с вершиной  $D$ , вершина  $B$  – с вершиной  $E$ , а вершины  $C$  и  $F$  оказались по разные стороны от прямой  $DE$  (рис. 10).

Возможны три случая: луч  $FC$  проходит внутри угла  $DFE$  (рис. 10, а); луч  $FC$  совпадает с одной из сторон этого угла (рис. 10, б); луч  $FC$  проходит вне угла  $DFE$  (рис. 10, в). Рассмотрим первый случай (остальные случаи можете рассмотреть самостоятельно).

Так как по условию теоремы стороны  $AC$  и  $DF$ ,  $BC$  и  $EF$  равны, то треугольники  $DFC$  и  $EFC$  – равнобедренные (см. рис. 10, а). По теореме о свойстве углов равнобедренного треугольника  $\angle 1 = \angle 2$ ,  $\angle 3 = \angle 4$ , поэтому  $\angle DCE = \angle DFE$ . Итак,  $AC = DF$ ,  $BC = EF$ ,  $\angle C = \angle F$ .

Следовательно, треугольники  $ABC$  и  $DEF$  равны по первому признаку равенства треугольников. Теорема доказана.

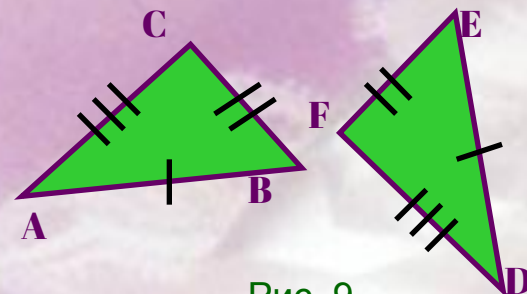
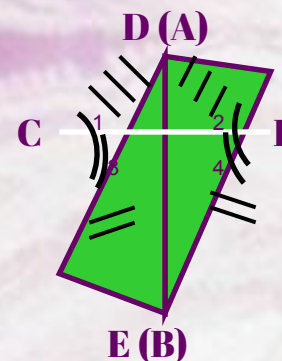
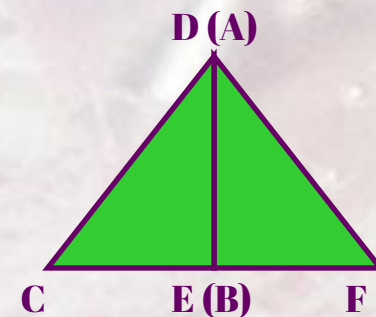


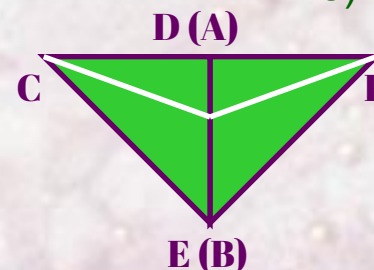
Рис. 9



а)



б)



в)

Рис. 10

