BRVKA

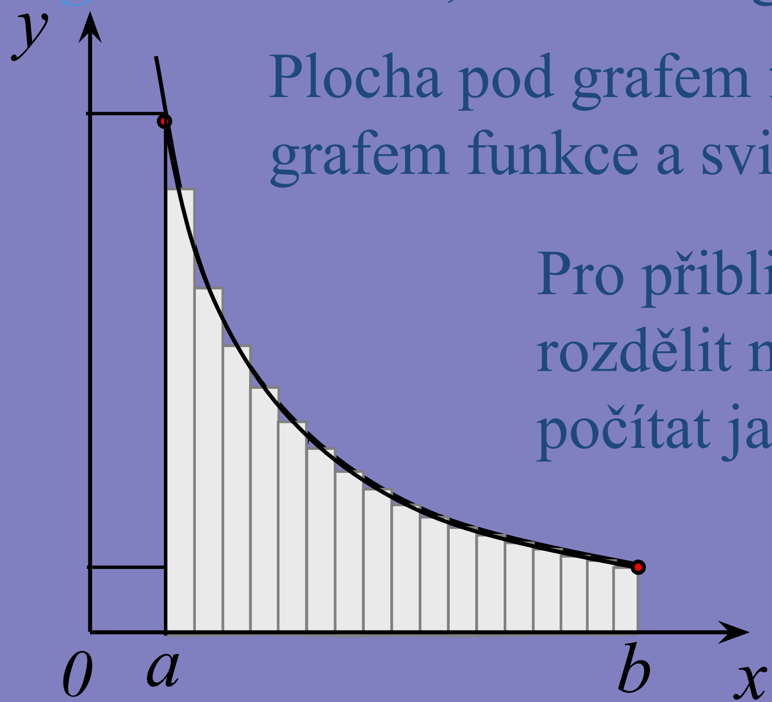
13.PŘEDNÁŠKA

URČITÝ INTEGRÁL

Jean Gaston Darboux
(1842 - 1917)

GEOMETRICKÝ VÝZNAM INTEGRÁLU

- Geometrický význam integrálu je **obsah plochy pod grafem** funkce, kterou integrujeme.



Plocha pod grafem funkce je ohraničena osou *x*, grafem funkce a svislými přímkami v bodech *a*, *b*.

Pro přibližný výpočet můžeme plochu rozdělit na úzké obdélníky a plochu počítat jako jejich součet.

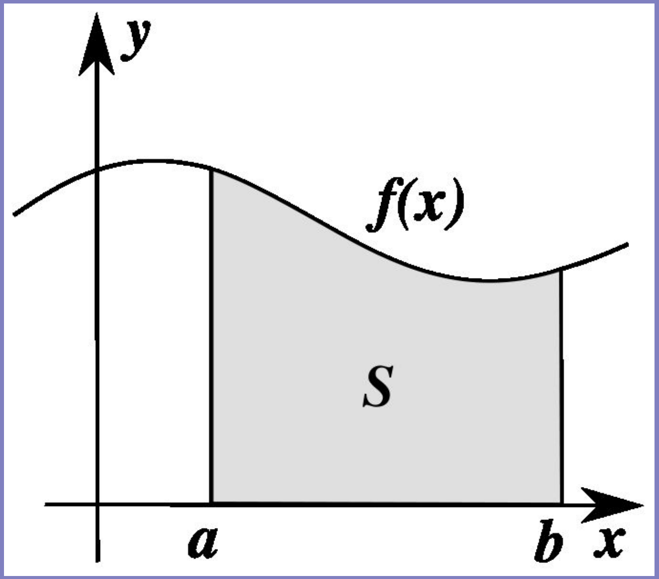
Čím budou obdélníky užší, tím bude určení obsahu plochy pod grafem přesnější.

Pokud se bude šířka obdélníků blížit nule, bude se jejich součet limitně blížit obsahu plochy.

Určitý integrál chápeme jako limitu ze součtu obdélníků při jejich limitně se zužující šířce.

URČITÝ INTEGRÁL - DEFINICE

Definice: Určitý integrál nezáporné funkce $f(x)$ mezi dvěma body a, b je roven ploše obrazce omezeného přímkami $x = a$, $x = b$, osou x a křivkou definovanou grafem funkce $f(x)$.



Značení: $\int_a^b f(x)dx$

Čteme: (Určitý) integrál funkce $f(x)$ od a do b.
a je **DOLNÍ MEZ**,
b je **HORNÍ MEZ** integrálu.

Poznámka: Určitý integrál není funkce, ale číslo.

URČITÝ INTEGRÁL - VÝPOČET

- Určitý integrál budeme počítat podle vzorce:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Funkce $F(x)$ je integrál (primitivní funkce) k $f(x)$.

Návod: Zintegrujeme funkci $f(x)$ a odečteme od sebe funkční hodnoty v horní (b) a dolní (a) mezi.

$$\int_1^2 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 3{,}75$$

URČITÝ INTEGRÁL - VÝPOČET

- Pokud řešíme integrál substitucí, musíme upravit i integrační meze:

$$\int_{-1}^{2} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2+1=t \\ 2x\,dx=dt \\ a'=t(-1)=(-1)^2+1=2 \\ b'=t(2)=2^2+1=5 \end{array} \right| = \int_{2}^{5} \frac{1}{2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln t\right]_2^5 =$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 2 = \frac{1}{2}\ln 2{,}5$$

Úlohu dořešíme s proměnnou *t*, nedosazujeme zpět za *x*.

To bychom udělali pouze v případě, že by dopočítání nových mezí bylo extrémně obtížné, a to se nám nestane.

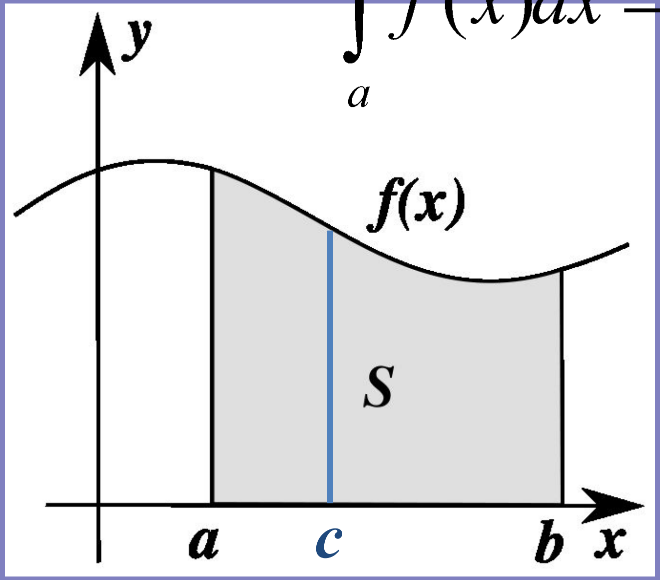
URČITÝ INTEGRÁL - VĚTY

Věta: Při záměně mezí se mění znaménko určitého integrálu.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Věta: Pokud je číslo *c* z intervalu (*a*,*b*), platí:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$



URČITÝ INTEGRÁL - ÚLOHY

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1-\cos^2 x\right)^2 \sin x\,dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\,dx = dt \\ a' = \cos 0 = 1 \\ b' = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \end{array} \right| = \int_1^0 \left(1-t^2\right)^2(-1)\,dt = \int_0^1 \left(1-t^2\right)^2 dt =$$

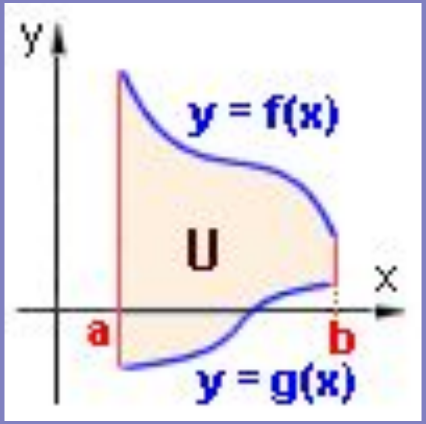
$$= \int_0^1 \left(1-2t^2+t^4\right)dt = \left[t-\frac{2}{3}t^3+\frac{t^5}{5}\right]_0^1 =$$

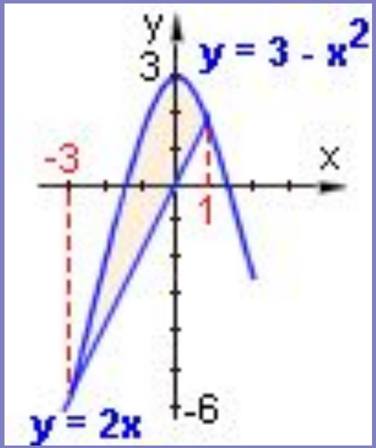
$$= \left(1-\frac{2}{3}1^3+\frac{1^5}{5}\right)-\left(0-\frac{2}{3}0^3+\frac{0^5}{5}\right) = \frac{8}{15}$$

URČITÝ INTEGRÁL - GRAFY

Často je položena otázka na obsah plochy *U* mezi dvěma křivkami danými grafy funkcí *f*(*x*) a *g*(*x*). Při využití určitého integrálu řešíme podle vztahu:

$$U = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$





Pokud se grafy funkcí protínají, nejsou většinou zadány meze, ty dopočítáme jako průsečíky grafů funkcí.

Pro funkce na obrázku by byly meze:
$a = -3$, $b = 1$
a počítali bychom integrál:

$$U = \int_{-3}^{1} \left((3 - x^2) - 2x\right) dx$$

URČITÝ INTEGRÁL - GRAFY

Určete obsah plochy *U* ohraničený osou *x* a grafem funkce $f(x) = x^2 - 6x + 8$.

Nejdříve najdeme průsečíky funkce $f(x)$ s osou *x*.
Určitý integrál počítáme z rozdílu $f(x)$ a $y = 0$.

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \rightarrow x_{12} = a, b = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4.8}}{2} \rightarrow a = 2, b = 4$$

$$\int_2^4 \left(x^2 - 6x + 8\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - 6.\frac{x^2}{2} + 8x\right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{4^3}{3} - 3.4^2 + 8.4\right) - \left(\frac{2^3}{3} - 3.2^2 + 8.2\right) = -\frac{4}{3}$$

$$U = \frac{4}{3}$$

Vyšla záporná hodnota, což je tím, že zkoumaná plocha je pod osou *x*. Velikost plochy je samozřejmě kladná.

URČITÝ INTEGRÁL - GRAFY

Určete obsah plochy *U* ohraničený křivkami $x^2 + y - 8 = 0$ a $2x - y = 0$.

Křivky nemají předpis ve tvaru funkce, nejprve je tedy upravíme a najdeme jejich průsečíky.

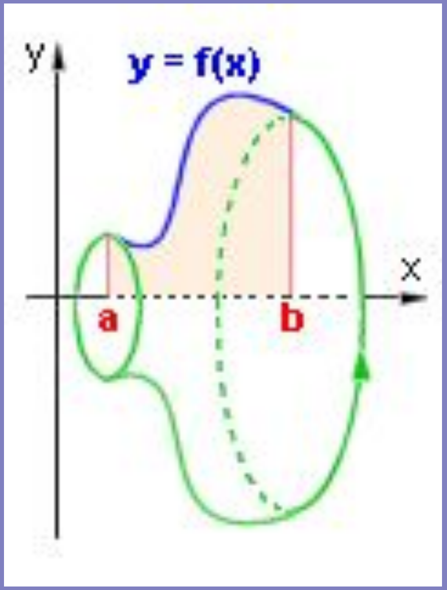
$$y = 8 - x^2 \qquad 8 - x^2 = 2x \rightarrow 0 = x^2 + 2x - 8$$

$$y = 2x \qquad x_{12} = a, b = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4.8}}{2} \rightarrow a = -4, b = 2$$

$$\int_{-4}^{2} \left(\left(8 - x^2\right) - 2x\right) dx = \left[8x - \frac{x^3}{3} - 2.\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{2} =$$

$$= \left(8.2 - \frac{2^3}{3} - 2^2\right) - \left(8.(-4) - \frac{(-4)^3}{3} - (-4)^2\right) = 36$$

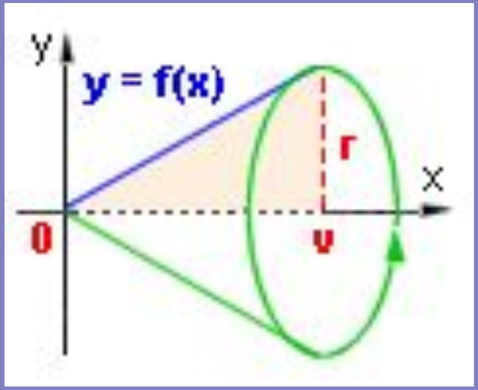
URČITÝ INTEGRÁL - APLIKACE



Objem rotačního tělesa, které vznikne rotací křivky dané funkcí *f*(*x*) je možné určit využitím určitého integrálu:

$$\boxed{V = \pi \int_a^b f^2(x)dx}$$

Příklad: Objem rotačního kužele:



Funkce *f*(*x*) je přímá úměrnost $y = r/v.x$

$$V = \pi \int_0^v \left(\frac{r}{v}x\right)^2 dx = \pi \frac{r^2}{v^2} \int_0^v x^2 dx =$$

$$= \pi \frac{r^2}{v^2} \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^v = \pi \frac{r^2}{v^2} . \frac{v^3}{3} = \frac{1}{3} \pi r^2 v$$

A to je pro dnešek vše,

děkuji za pozornost.